

応用複素関数 第12回

～ 数値積分 (3) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年7月29日

1 本日の内容・連絡事項

2 数値積分 (続き)

- 関数論を用いた数値積分の誤差解析 (続き)
 - 無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数
 - 無限区間の台形公式 I_h の誤差解析

3 参考文献

4 講義を終えるにあたって

- 講義内容: \mathbb{R} 上の解析関数の積分に対する台形公式 I_h の誤差解析
- レポートについて
 - レポート課題 3 締め切り 8月1日 (提出は 8月2日 0:30)
注意 レポート課題 1, 2 を提出した人は提出する必要はない。
 - 期末レポート課題 (“レポート課題 ABC”) 締め切り 7月31日と宣言したつもりで、そう書いてあるところもありますが、Oh-o! Meiji で 8月8日 0:30 となっていました (設定し間違えました)。今さら Oh-o! Meiji の方を 7月31日に訂正はしませんが、出来れば7月中に提出してもらえると嬉しいです。
- 当初シラバスに載せていた「佐藤超関数」は、12回分オンデマンド講義には入れられなかったもので、とりあえず PDF 資料

「佐藤超関数の紹介」 [▶ Link](#)

を紹介しておく。期末レポートの採点が終了次第、動画を作成する予定である。

前回の復習: 高橋・森の関数論を用いた数値積分公式の誤差解析

$$(1) \quad I = \int_a^b f(x)p(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\Psi(z) dz,$$

$$(2) \quad I_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)w_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\Psi_n(z) dz,$$

$$(3) \quad I - I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\Phi_n(z) dz.$$

ただし

$$(4) \quad \Psi(z) := \int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx,$$

$$(5) \quad \Psi_n(z) := \sum_{k=1}^n \frac{w_k}{z-x_k},$$

$$(6) \quad \Phi_n(z) := \Psi(z) - \Psi_n(z).$$

Ψ_n を数値積分公式の**特性関数**, Φ_n を数値積分公式の**誤差の特性関数**という。

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

に対する台形公式 (ただし無限和バージョン)

$$I_h = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)$$

の特性関数はどうなるだろうか？ (今回は積分区間が有界区間 (a, b) である場合の数値積分公式を調べた。それとは随分様子が違っている。)

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

に対する台形公式 (ただし無限和バージョン)

$$I_h = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)$$

の特性関数はどうなるだろうか？ (前回は積分区間が有界区間 (a, b) である場合の数値積分公式を調べた。それとは随分様子が違っている。)

$x_n = nh$, $w_n = h$ ($n \in \mathbb{Z}$) だから、積分公式の特性関数は形式的には

$$\Psi_h(z) \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{w_n}{z - x_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{z - nh}.$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

に対する台形公式 (ただし無限和バージョン)

$$I_h = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)$$

の特性関数はどうなるだろうか？ (前回は積分区間が有界区間 (a, b) である場合の数値積分公式を調べた。それとは随分様子が違っている。)

$x_n = nh, w_n = h (n \in \mathbb{Z})$ だから、積分公式の特性関数は形式的には

$$\Psi_h(z) \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{w_n}{z - x_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{z - nh}.$$

これは見覚えがある。これは収束しないが、次のように修正すれば良い。

無限区間の台形公式 l_h の誤差の特性関数 (1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

に対する台形公式 (ただし無限和バージョン)

$$l_h = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)$$

の特性関数はどうなるだろうか? (前回は積分区間が有界区間 (a, b) である場合の数値積分公式を調べた。それとは随分様子が違っている。)

$x_n = nh$, $w_n = h$ ($n \in \mathbb{Z}$) だから、積分公式の特性関数は形式的には

$$\Psi_h(z) \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{w_n}{z - x_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{z - nh}.$$

これは見覚えがある。これは収束しないが、次のように修正すれば良い。

$$\Psi_h(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{h}{z - nh} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(z/h) - n} = \pi \cot \frac{\pi z}{h}$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (2)

一方、 Ψ については、有界区間 (a, b) の場合の $\text{Log} \frac{z-a}{z-b}$ の極限

$$\Psi(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Log} \frac{z - (-R)}{z - R} = \begin{cases} -i\pi & (\text{Im } z > 0) \\ +i\pi & (\text{Im } z < 0) \end{cases}$$

を採用すると良い。実際、このとき次式が成り立つ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} f(z) \Psi(z) dz$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (2)

一方、 Ψ については、有界区間 (a, b) の場合の $\text{Log} \frac{z-a}{z-b}$ の極限

$$\Psi(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Log} \frac{z - (-R)}{z - R} = \begin{cases} -i\pi & (\text{Im } z > 0) \\ +i\pi & (\text{Im } z < 0) \end{cases}$$

を採用すると良い。実際、このとき次式が成り立つ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} f(z) \Psi(z) dz$$

ただし c は正の数で、 $\Gamma_c := \Gamma_c^- - \Gamma_c^+$, $\Gamma_c^-: z = x - ic$ ($x \in \mathbb{R}$), $\Gamma_c^+: z = x + ic$ ($x \in \mathbb{R}$). f は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < d\}$, $d > c$ で正則と仮定する。

$$I - I_h = \int_{\Gamma_c} f(z) \Phi_h(z) dz, \quad \Phi_h(z) := \Psi(z) - \Psi_h(z).$$

誤差の特性関数 $|\Phi_h(z)|$ ($h = 1/2, 1/4$) の等高線を描いてみる (次のスライド)。実軸から離れるにつれ、急速に減衰することが分かる。

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (3)

$$\Psi_h(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{h}{z - nh} = \pi \cot \frac{\pi z}{h},$$

$$\Psi(z) := \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Log} \frac{z - (-R)}{z - R} = \begin{cases} -i\pi & (\operatorname{Im} z > 0) \\ +i\pi & (\operatorname{Im} z < 0) \end{cases},$$

$$\Phi_h(z) := \Psi(z) - \Psi_h(z).$$

数値積分を離れて、 $\pi \cot \pi z$ が実軸から離れるとどうなるかを描いたと考えても興味深い (後で式変形で示すことになります)。

```
Clear[PhiH,Psi,PsiH,NN,n,h]
Psi[z_] = If[Im[z]>0,-Pi I, Pi I]
PsiH[z_, h_] = Pi Cot[Pi z/h]
PhiH[z_, h_] = Psi[z] - PsiH[z, h]
g1=ContourPlot[Log10[Abs[PhiH[x + I y, 1/2]]], {x, -4, 4}, {y, -4, 4},
  Contours->9, ContourLabels -> True,
  ColorFunction -> (Hue[#] &), PlotLegends -> Automatic]
g2=ContourPlot[Log10[Abs[PhiH[x + I y, 1/4]]], {x, -4, 4}, {y, -4, 4},
  Contours->6, ContourLabels -> True, WorkingPrecision->100,
  ColorFunction -> (Hue[#] &), PlotLegends -> Automatic]
```

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (4)

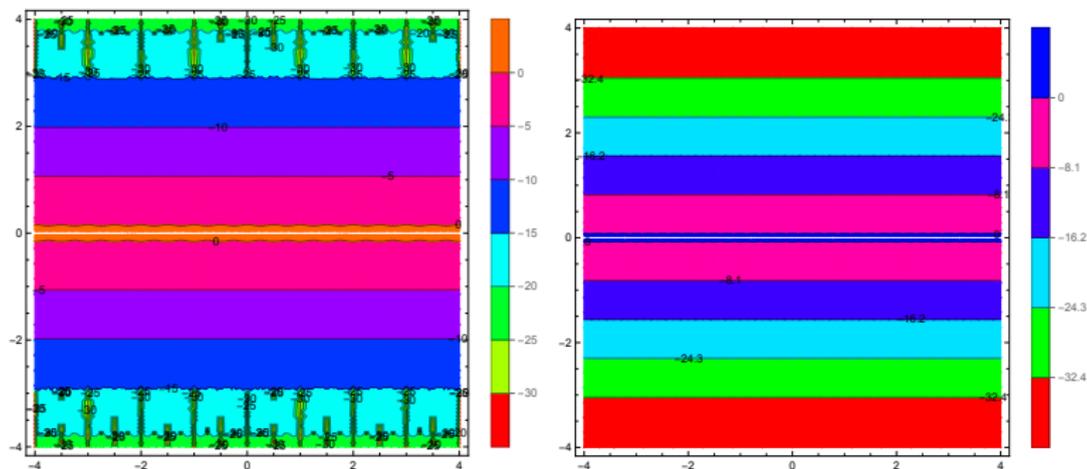


Figure: 台形公式 I_h の誤差の特性関数の絶対値 (左 $h = \frac{1}{2}$, 右 $h = \frac{1}{4}$)

$h = 1/2$ の場合に、グラフがあれいているのは、桁落ちして不十分な計算精度になっているためである。 $h = 1/4$ の場合は、演算精度を 100 桁に上げて計算している。

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (1)

関数 f の積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ に対して、数値積分公式 (台形公式)

$$I_h := h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)$$

の誤差を評価する定理 (Stenger [3]) を紹介する。

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (1)

関数 f の積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ に対して、数値積分公式 (台形公式)

$$I_h := h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)$$

の誤差を評価する定理 (Stenger [3]) を紹介する。

f について仮定をおく。

Ⓐ 正の数 d に対して、 f は $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$ で正則

Ⓑ $\Lambda(f, c) := \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x + ic)| + |f(x - ic)|) dx < \infty$ ($c \in (0, d)$).

$\Lambda(f, d - 0) := \lim_{c \rightarrow d-0} \Lambda(f, c)$ は有限確定

Ⓒ $c \in (0, d)$ に対して、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-c}^c |f(x + iy) dy| = 0$.

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (2)

$c \in (0, d)$, $h > 0$, $N \in \mathbb{N}$ を固定して、4 点

$$\pm(N + 1/2)h - ci, \quad \pm(N + 1/2)h + ci$$

を頂点とする長方形の周を正の向きに一周する曲線を $C_{c,N}$ とする。

$$\varphi(z) := \cot \frac{\pi z}{h} = \frac{\cos(\pi z/h)}{\sin(\pi z/h)}$$

の極は kh ($k \in \mathbb{Z}$), 位数はすべて 1, 留数は

$$\operatorname{Res}(\varphi; kh) = \frac{\cos(\pi z/h)}{(\sin(\pi z/h))'} \Big|_{z=kh} = \frac{h}{\pi}.$$

留数定理により

$$\int_{C_{c,N}} f(z) \cot \frac{\pi z}{h} dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^N f(kh) \operatorname{Res}(\varphi; kh) = 2ih \sum_{k=-N}^N f(kh).$$

ゆえに

$$h \sum_{k=-N}^N f(kh) = \frac{1}{2i} \int_{C_{c,N}} f(z) \cot \frac{\pi z}{h} dz.$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (3)

$N \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} I_h &= h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-f(x+ic) \cot \frac{\pi(x+ic)}{h} + f(x-ic) \cot \frac{\pi(x-ic)}{h} \right) dx. \end{aligned}$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (3)

$N \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} I_h &= h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-f(x+ic) \cot \frac{\pi(x+ic)}{h} + f(x-ic) \cot \frac{\pi(x-ic)}{h} \right) dx. \end{aligned}$$

一方、Cauchy の積分定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ic) dx = I, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ic) dx = I$$

であるから、

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+ic) + f(x-ic)) dx.$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (3)

$N \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} I_h &= h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-f(x+ic) \cot \frac{\pi(x+ic)}{h} + f(x-ic) \cot \frac{\pi(x-ic)}{h} \right) dx. \end{aligned}$$

一方、Cauchy の積分定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ic) dx = I, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ic) dx = I$$

であるから、

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+ic) + f(x-ic)) dx.$$

ゆえに (やや分かりにくい計算をするが)

$$I_h - I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x+ic) \frac{\exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}}{1 - \exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}} - f(x-ic) \frac{\exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}}{1 - \exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}} \right] dx.$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (4)

$$\left| \frac{\exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}}{1 - \exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}} \right|, \left| \frac{\exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}}{1 - \exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}} \right| \leq \frac{e^{-2\pi c/h}}{1 - e^{-2\pi c/h}}$$

が成り立つ。

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (4)

$$\left| \frac{\exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}}{1 - \exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}} \right|, \left| \frac{\exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}}{1 - \exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}} \right| \leq \frac{e^{-2\pi c/h}}{1 - e^{-2\pi c/h}}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned} |I_h - I| &\leq \frac{\exp(-2\pi c/h)}{1 - \exp(-2\pi c/h)} \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x+ic)| + |f(x-ic)|) dx \\ &= \frac{\exp(-2\pi c/h)}{1 - \exp(-2\pi c/h)} \Lambda(f, c). \end{aligned}$$

$c \rightarrow d - 0$ とすると

$$(7) \quad |I_h - I| \leq \frac{\exp(-2\pi d/h)}{1 - \exp(-2\pi d/h)} \Lambda(f, d - 0).$$

を得る。

$h \rightarrow +0$ のとき、分子が指数関数的に減衰する。

参考文献

当初予定では、杉原 [5] による DE 公式の誤差解析を紹介する予定であったが、時間の制約から、Stenger [3] の定理を紹介することにとどめた。DE 公式にしても、台形公式にしても、後から出版された杉原・室田 [6] が最初に参照すべきテキストである。

-  高橋秀俊, 森正武, 解析関数の数値積分の誤差の新しい評価法, 数理解析研究所講究録, Vol. 91, pp. 119–141 (1970), <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0091-04.pdf>.
-  Takahasi, H. and Mori, M., Error estimation in the numerical integration of analytic functions, Rep. Comput. Centre Univ. Tokyo, Vol. 3, pp. 41–08 (1970).
-  F. Stenger, Integration formula based on the trapezoidal formula, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, Vol. 12, No. 1, pp. 103–114 (1973).
-  Takahashi, H. and Mori, M., Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS Kyoto Univ., Vol. 9, pp. 721–741 (1974).
-  杉原 正顕, DE 変換公式の最適性について, 京都大学数理解析研究所講究録, 585 巻, pp. 150–175 (1986).
-  杉原 正顕, 室田 一雄, 数値計算法の数理, 岩波書店 (1994).

講義を終えるにあたって

講義を終えるにあたって

お疲れ様。レポートを提出した後は、良い夏休みが迎えられるように。