応用複素関数 第 9 回
〜 ポテンシャル問題 (2) 〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2020 年 7 月 8 日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. FreeFem++ を体験しよう
   - 入手とインストール
   - サンプル・プログラム
3. 弱解の方法
4. 基本解の方法

本日の内容・連絡事項

- 有限要素法は、弱解の方法を一つの基礎としている (もう一つは領域の三角形分割に基づく区分的多項式の利用)。そこで Poisson 方程式を題材として、弱解の方法を解説する。FreeFem++ のプログラムに必要不可欠な**弱形式がどのように得られるか**、どういう意味を持つか、理解することを期待する。
- もう一つ、ポテンシャル問題の数値解法として有力な**基本解の方法**を解説する。残念ながら残された講義時間が短いので、内容を絞り込まざるを得ない (興味を持った人は、例年の講義ノート (かなり粗雑であるが…) を見て下さい、と逃げることにする)。
- 繰り返しになるが、FreeFem++ はこの機会にぜひ体験してもらいたい。インストールやサンプル・プログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。7 月 8 日は 17:30〜18:50 に Zoom 質問ミーティングを行います。
- レポート課題 2 を発表する。締め切りは 7 月 22 日。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report2.pdf`

再掲: FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

1. **FreeFem++ の WWW サイト** ▶ Link
2. FreeFem++-4.6-full-MacOS_10.11.pkg ▶ Link
(フランスは遠いので、2020/7/8 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 ▶ Link
(最新版 v. 4.6 ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 ▶ Link
(FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 ▶ Link
(ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

とりあえず本家 (1) を訪問する。ソフトの入手は (1) でも良いですが、(2) にしたらいかがでしょう。インストール作業は前回の講義動画 ▶ Link を見てもらっても良いですが、(3) も参考になるかもしれません。FreeFem++ については、大塚・高石 [1] 以外にも、最近は WWW 上の日本語の解説が増えて来て、多くは信頼できます (ノイズが少ない)。手短な説明として (4) を用意しておきます。

再掲: FreeFem++ を体験しよう

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを開いて以下の 4 つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp

curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp
```

FreeFem++ では、`plot()` 実行後に停止させることがあります (グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。前者は使用する Mac で Zoom 質問ミーティングに参加して (空いています)、画面共有で状況を見せてくれるとスムーズに相談できると思います。

4.7 弱解の方法　入門

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann が Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [2] に沿った解説である)。

厳密に議論するには、**広義導関数**、いわゆる **Sobolev（ソボレフ）空間**を導入する必要がある。具体的には、後で出て来る X_{g_1} と X は、本当は Sobolev 空間の一種 $H^1(\Omega)$ を用いて

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}$$

と定義すべきものである。ともあれ、ここでは関数の滑らかさに関する議論には目をつぶって議論する。

Laplace 方程式を一般化した Poisson 方程式の境界値問題を考える。

Ω は $\mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3)$ の有界領域、$\Gamma := \partial\Omega$ は Ω の境界、Γ_1 と Γ_2 は

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

を満たす。また、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。$\Gamma_1 = \emptyset$ (全周 Neumann) のときは $\displaystyle\int_{\Gamma_2} g_2\, d\sigma = 0$ を仮定する。

問題 (P)

Find u s.t.

(1) $$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega),$$

(2) $$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

(3) $$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

4.7 弱解の方法　弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

(4) $$J[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}).$$

とおく。

(V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(5) $$J[u] = \inf_{w \in X_{g_1}} J[w]. \qquad (\inf \text{ は結局は } \min)$$

(W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(6) $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

(条件 (6) を**弱形式 (weak form)** と呼ぶ。)

(P), (W), (V) はほぼ同値な問題である。実際、次が成り立つ。

定理

1. u が (P) の解 $\Rightarrow$ u が (W) の解
2. u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解
3. u が (W) の解かつ u が C^2 級 $\Rightarrow$ u が (P) の解

(2) の証明のために補題を準備する (証明は単なる計算である)。

補題

任意の $w \in X_{g_1}$, $v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ に対して次式が成立する。

$$
\text{(7)} \qquad J[w+tv] = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,d\boldsymbol{x} + t\left(\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\;d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\;v\;d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\;v\;d\sigma\right) + J[w].
$$

4.7 弱解の方法　(P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出

(1) の証明　u が (P) を満たすと仮定する。任意の $v \in X$ に対して、(1) に v をかけて Ω 上で積分すると

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

左辺に Green の公式を用いてから、$v = 0$ (on Γ_2) と (3) を用いると

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

(8) に代入して移項すると

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma.$$

すなわち、u は弱形式を満たす ((W) の解である)。 $\square$

(2) の証明

[u が (V) の解 $\Rightarrow$ u は (W) の解]　(デジャブ？)

u は (V) の解とする。任意の $v \in X$ に対して、$f(t) := J[u+tv]$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$f(t) = J[u+tv] \ge J[u] = f(0).$$

ゆえに f は $t=0$ で最小になる。ゆえに $J[u+tv]$ の 1 次の項の係数は 0 である:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma = 0.$$

[u が (W) の解 $\Rightarrow$ u は (V) の解]

u は (W) の解とする。任意の $w \in X_{g_1}$ に対して、$v := u - w$ とおくと $v \in X$ である。

$$\begin{aligned} J[w] - J[u] &= J[u + 1 \cdot v] - J[u] \qquad (t = 1 \text{ として補題を適用}) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \ge 0. \end{aligned}$$

ゆえに $J[u]$ は $J[w]$ の最小値である。 □

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx + \int_{\Gamma_2} g \, v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_\Omega \triangle u \, v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u \, v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

再び変分法の基本補題より、

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

ゆえに u は (P) の解である。 証明終　　$\cdots\cdots\cdots$ 以上、Dirichlet 原理の一般化

4.7 弱解の方法　定理をどう使うか

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれである)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

良く知られた (部分的な) 解答

- Ω が C^2 級であれば (どういう意味？) Yes.
- Ω が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

(FreeFem++ の例で、L 字型の領域や、立方体から小さい立方体を除いた領域がしばしば登場するが、このあたりのこと (領域の凸性) を問題にしているわけである。)

4.8 基本解の方法　$-\triangle$ の基本解

次の関数 E は $-\triangle$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (2\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|} & (3\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases} \tag{9}$$

一体何者か？
数学的な解答　次を満たす。ここで δ は **Dirac のデルタ超関数**。

$$-\triangle E = \delta. \tag{10}$$

物理的な解答 (解釈)　E は原点にある単位点電荷の作る電場のポテンシャル (電位) である。

なぜ重要か？

Laplace 方程式, Poisson 方程式の解を (かなり一般に) E を用いて表せる。

ここでは、ポテンシャル問題の近似解法への応用を紹介する。

　次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の場合を考える。

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{11}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{12}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or $n = 3$) の領域である。

　Ω の外部に、Ω を取り囲むように、有限個の点 $y_1, \cdots, y_N$ を取り、各 y_k に電荷量 Q_k の電荷を置く。

それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^{N} Q_k E(x - y_k). \tag{13}$$

$\triangle E = 0$ (in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) であるから、$Q_k$ の取り方によらず

$$\triangle u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, \cdots, y_N\}).\quad \text{特に}\quad \triangle u^{(N)} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

後は Q_k をうまく選んで、(12) を近似的に満たすようにする。

一つのやり方として、$\partial\Omega$ 上に N 個の点 $x_1, \cdots, x_N$ を取って

$$u^{(N)}(x_j) = g(x_j) \quad (j = 1, \cdots, N). \tag{14}$$

非常に素朴な感じがするが、とてもうまく行くことが多い。
(14) は次と同値である。

$$\begin{pmatrix} E(x_1 - y_1) & E(x_1 - y_2) & \cdots & E(x_1 - y_N) \\ E(x_2 - y_1) & E(x_2 - y_2) & & E(x_2 - y_N) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ E(x_N - y_1) & E(x_N - y_2) & \cdots & E(x_N - y_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

この連立１次方程式を解いて得た Q_k $(k = 1, \cdots, N)$ に対して、(13) を用いる。

4.8 基本解の方法　近似解の特徴

1. ある ρ $(0<\rho<1)$, C が存在して
$$\left\|u-u^{(N)}\right\|\le C\rho^N\quad(\|\cdot\|\text{ は適当なノルム})$$
が成り立つ (**誤差の指数関数的減少**)。これは多くの場合、**高精度の解が非常に少ない計算量で得られる**ことを意味する。
Cf. 差分法, 有限要素法では $\left\|u-u^{(N)}\right\|\le\frac{C}{N^2}$.
2. $u^{(N)}$ は調和関数である。$\operatorname{grad}u^{(N)}$ の計算が簡単:
$$\operatorname{grad}u^{(N)}(x)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}Q_k\frac{x-y_k}{\left|x-y_k\right|^2}\quad(2\text{ 次元の場合}).$$
しかも $\left\|\operatorname{grad}u-\operatorname{grad}u^{(N)}\right\|$ も指数関数的に減少する。
3. 理論的な基礎づけは、差分法、有限要素法と比べてまだ不十分である (テキストはない)。

同次方程式にしか適用できない、具体的な基本解が必要であることから、特殊な方法であると言わざるを得ないが、差分法・有限要素法に性能で勝る場合が多い。

4.8 基本解の方法　応用上の長所

- 渦なし流 (ポテンシャル流) の問題に適用した場合、速度ポテンシャル ϕ を微分して速度場 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ を得る際に高精度に計算出来て便利である。
- Jordan 領域の等角写像 ($\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$ の形) を近似的に求める場合、$u^{(N)}$ が $\log|\cdot - y_k|$ の線型結合で得られるので、その共役調和関数 $v^{(N)}$ が簡単に得られる。線積分をする必要はない ($u = \log|\cdot|$ の共役調和関数は $v = \arg$, $u + iv = \log$)。…とてもうまい話。

… ということを実例を見せながら説明する予定であったが、今年度は通常の授業期間に行える講義回数が少ないので、カットする。

Jordan 領域の等角写像の数値計算については、講義ノート「ポテンシャル問題の数値解法」 Link の §6.3, 6.4 に簡単な解説を載せてある。

参考文献

- 大塚 厚二, 高石 武史, 有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++ 数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014).
- 菊地 文雄, 有限要素法概説, サイエンス社 (1980, 新訂版 1999).