応用複素関数 第 9 回

～ ポテンシャル問題 (2) ～

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2020 年 7 月 8 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 有限要素法は、弱解の方法を一つの基礎としている (もう一つは領域の三角形分割に基づく区分的多項式の利用)。そこで Poisson 方程式を題材として、弱解の方法を解説する。FreeFem++ のプログラムに必要不可欠な**弱形式がどのように得られるか**、どういう意味を持つか、理解することを期待する。
- もう一つ、ポテンシャル問題の数値解法として有力な**基本解の方法**を解説する。残念ながら残された講義時間が短いので、内容を絞り込まざるを得ない (興味を持った人は、例年の講義ノート (かなり粗雑であるが…) を見て下さい、と逃げることにする)。
- 繰り返しになるが、FreeFem++ はこの機会にぜひ体験してもらいたい。インストールやサンプル・プログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。7 月 8 日は 17:30〜18:50 に Zoom 質問ミーティングを行います。
- レポート課題 2 を発表する。締め切りは 7 月 22 日。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report2.pdf`

再掲: FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

1. **FreeFem++ の WWW サイト** Link
2. `FreeFem++-4.6-full-MacOS_10.11.pkg` Link
   (フランスは遠いので、2020/7/8 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 Link
   (最新版 v. 4.6 ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

とりあえず本家 (1) を訪問する。ソフトの入手は (1) でも良いですが、(2) にしたらいかがでしょう。インストール作業は前回の講義動画 Link を見てもらっても良いですが、(3) も参考になるかもしれません。FreeFem++ については、大塚・高石 [1] 以外にも、最近は WWW 上の日本語の解説が増えて来て、多くは信頼できます (ノイズが少ない)。手短な説明として (4) を用意しておきます。

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを開いて以下の 4 つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp

curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp
```

FreeFem++ では、`plot()` 実行後に停止させることがあります (グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。前者は使用する Mac で Zoom 質問ミーティングに参加して (空いています)、画面共有で状況を見せてくれるとスムーズに相談できると思います。

4.7 弱解の方法　入門

4.7 弱解の方法　入門

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

4.7 弱解の方法　入門

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann が Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [2] に沿った解説である)。

4.7 弱解の方法　入門

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann が Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [2] に沿った解説である)。

厳密に議論するには、**広義導関数**、いわゆる **Sobolev(ソボレフ) 空間**を導入する必要がある。具体的には、後で出て来る X_{g_1} と X は、本当は Sobolev 空間の一種 $H^1(\Omega)$ を用いて

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}$$

と定義すべきものである。ともあれ、ここでは関数の滑らかさに関する議論には目をつぶって議論する。

4.7 弱解の方法　Poisson 方程式の境界値問題 (P)

Laplace 方程式を一般化した Poisson 方程式の境界値問題を考える。

Ω は $\mathbb{R}^m$ $(m=2,3)$ の有界領域、$\Gamma := \partial\Omega$ は Ω の境界、Γ_1 と Γ_2 は

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

を満たす。また、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。$\Gamma_1 = \emptyset$ (全周 Neumann) のときは $\displaystyle\int_{\Gamma_2} g_2\, d\sigma = 0$ を仮定する。

問題 (P)

Find u s.t.

(1) $$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega),$$

(2) $$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

(3) $$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

$$X_{g_1} := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

$$J[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}). \tag{4}$$

とおく。

4.7 弱解の方法　弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

$$J[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}). \tag{4}$$

とおく。

(V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$J[u] = \inf_{w \in X_{g_1}} J[w]. \qquad (\text{inf は結局は min}) \tag{5}$$

4.7 弱解の方法　弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \left\{ w \;\middle|\; w \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \;\middle|\; w \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

$$\text{(4)} \qquad J[w] := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}).$$

とおく。

(V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$\text{(5)} \qquad J[u] = \inf_{w \in X_{g_1}} J[w]. \qquad (\inf \text{ は結局は } \min)$$

(W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$\text{(6)} \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

(条件 (6) を**弱形式 (weak form)** と呼ぶ。)

(P), (W), (V) はほぼ同値な問題である。

4.7 弱解の方法　3つの問題の同等性

(P), (W), (V) はほぼ同値な問題である。実際、次が成り立つ。

定理

1. u が (P) の解 $\Rightarrow$ u が (W) の解
2. u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解
3. u が (W) の解かつ u が C^2 級 $\Rightarrow$ u が (P) の解

(P), (W), (V) はほぼ同値な問題である。実際、次が成り立つ。

定理

1. u が (P) の解 $\Rightarrow$ u が (W) の解
2. u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解
3. u が (W) の解かつ u が C^2 級 $\Rightarrow$ u が (P) の解

(2) の証明のために補題を準備する (証明は単なる計算である)。

補題

任意の $w \in X_{g_1}$, $v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ に対して次式が成立する。

$$J[w+tv] = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,d\boldsymbol{x} + t\left(\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\;d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\,v\;d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\,v\;d\sigma\right) + J[w]. \tag{7}$$

(1) の証明　u が (P) を満たすと仮定する。任意の $v \in X$ に対して、(1) に v をかけて Ω 上で積分すると

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

(1) の証明　u が (P) を満たすと仮定する。任意の $v \in X$ に対して、(1) に v をかけて Ω 上で積分すると

(8)
$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}.$$

左辺に Green の公式を用いてから、$v = 0$ (on Γ_2) と (3) を用いると

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

(1) の証明　u が (P) を満たすと仮定する。任意の $v\in X$ に対して、(1) に v をかけて Ω 上で積分すると

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

左辺に Green の公式を用いてから、$v=0$ (on Γ_2) と (3) を用いると

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x}\\
&= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x}\\
&= -\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

(8) に代入して移項すると

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma.$$

(1) の証明　u が (P) を満たすと仮定する。任意の $v\in X$ に対して、(1) に v をかけて Ω 上で積分すると

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

左辺に Green の公式を用いてから、$v=0$ (on Γ_2) と (3) を用いると

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x}\\
&= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x}\\
&= -\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

(8) に代入して移項すると

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma.$$

すなわち、u は弱形式を満たす ((W) の解である)。

(2) の証明

[u が (V) の解 $\Rightarrow$ u は (W) の解]　(デジャブ？)

u は (V) の解とする。任意の $v \in X$ に対して、$f(t) := J[u + tv]$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$f(t) = J[u + tv] \geq J[u] = f(0).$$

ゆえに f は $t = 0$ で最小になる。ゆえに $J[u + tv]$ の 1 次の項の係数は 0 である:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma = 0.$$

(2) の証明

[u が (V) の解 $\Rightarrow$ u は (W) の解]　(デジャブ？)

u は (V) の解とする。任意の $v \in X$ に対して、$f(t) := J[u+tv]$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$f(t) = J[u+tv] \geq J[u] = f(0).$$

ゆえに f は $t=0$ で最小になる。ゆえに $J[u+tv]$ の 1 次の項の係数は 0 である:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f\, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2\, v \, d\sigma = 0.$$

[u が (W) の解 $\Rightarrow$ u は (V) の解]

u は (W) の解とする。任意の $w \in X_{g_1}$ に対して、$v := u - w$ とおくと $v \in X$ である。

$$\begin{aligned} J[w] - J[u] &= J[u + 1 \cdot v] - J[u] \qquad (t = 1 \text{ として補題を適用}) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f\, v\, dx - \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

ゆえに $J[u]$ は $J[w]$ の最小値である。

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g\, v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g\, v\, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2} g\,v\,d\sigma\quad(v\in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star)\qquad \int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial n}v\,d\sigma-\int_\Omega \triangle u\,v\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2} g_2\,v\,d\sigma\quad(v\in X).$$

特に $v\in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u\,v\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}\quad(v\in C_0^\infty(\Omega)).$$

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g\, v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_\Omega \triangle u\, v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u\, v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v \, d\boldsymbol{x} \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g\, v\, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \boldsymbol{dx} = \int_\Omega f\, v\, \boldsymbol{dx} + \int_{\Gamma_2} g\, v\, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \triangle u\, v\, \boldsymbol{dx} = \int_\Omega f\, v\, \boldsymbol{dx} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, \boldsymbol{dx} = \int_\Omega f\, v\, \boldsymbol{dx} \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

再び変分法の基本補題より、

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx + \int_{\Gamma_2} g \, v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_\Omega \triangle u \, v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u \, v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

再び変分法の基本補題より、

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

ゆえに u は (P) の解である。 証明終　　……… 以上、Dirichlet 原理の一般化

4.7 弱解の方法　定理をどう使うか

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

4.7 弱解の方法　定理をどう使うか

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれである)。

4.7 弱解の方法　定理をどう使うか

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれである)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれである)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれである)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

良く知られた (部分的な) 解答

- Ω が C^2 級であれば (どういう意味？) Yes.
- Ω が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

4.7 弱解の方法　定理をどう使うか

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれである)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

良く知られた (部分的な) 解答

- Ω が C^2 級であれば (どういう意味？) Yes.
- Ω が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

(FreeFem++ の例で、L 字型の領域や、立方体から小さい立方体を除いた領域がしばしば登場するが、このあたりのこと (領域の凸性) を問題にしているわけである。)

次の関数 E は $-\triangle$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (2\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|} & (3\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases} \tag{9}$$

4.8 基本解の方法　$-\triangle$ の基本解

次の関数 E は $-\triangle$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

(9)
$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (2\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|} & (3\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases}$$

一体何者か？

次の関数 E は $-\triangle$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

(9)
$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (2\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|} & (3\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases}$$

一体何者か？
数学的な解答　次を満たす。ここで δ は **Dirac のデルタ超関数**。

(10)
$$-\triangle E = \delta.$$

次の関数 E は $-\triangle$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

(9)
$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (2\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|} & (3\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases}$$

一体何者か？

数学的な解答　次を満たす。ここで δ は **Dirac のデルタ超関数**。

(10)
$$-\triangle E = \delta.$$

物理的な解答 (解釈)　E は原点にある単位点電荷の作る電場のポテンシャル (電位) である。

次の関数 E は $-\triangle$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

$$
(9) \qquad E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (2\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|} & (3\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases}
$$

一体何者か？
数学的な解答　次を満たす。ここで δ は **Dirac のデルタ超関数**。

$$
(10) \qquad -\triangle E = \delta.
$$

物理的な解答 (解釈)　E は原点にある単位点電荷の作る電場のポテンシャル (電位) である。

なぜ重要か？

次の関数 E は $-\triangle$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (2\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|} & (3\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases} \tag{9}$$

一体何者か？
数学的な解答　次を満たす。ここで δ は **Dirac のデルタ超関数**。

$$-\triangle E = \delta. \tag{10}$$

物理的な解答 (解釈)　E は原点にある単位点電荷の作る電場のポテンシャル (電位) である。

なぜ重要か？

Laplace 方程式, Poisson 方程式の解を (かなり一般に) E を用いて表せる。

次の関数 E は $-\triangle$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (2\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|} & (3\text{ 次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases} \tag{9}$$

一体何者か？
数学的な解答　次を満たす。ここで δ は **Dirac のデルタ超関数**。

$$-\triangle E = \delta. \tag{10}$$

物理的な解答 (解釈)　E は原点にある単位点電荷の作る電場のポテンシャル (電位) である。

なぜ重要か？

Laplace 方程式, Poisson 方程式の解を (かなり一般に) E を用いて表せる。

ここでは、ポテンシャル問題の近似解法への応用を紹介する。

4.8 基本解の方法　ポテンシャル問題の近似解法 (1)

次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の場合を考える。

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{11}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{12}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or $n = 3$) の領域である。

次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の場合を考える。

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{11}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{12}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or $n = 3$) の領域である。

Ω の外部に、Ω を取り囲むように、有限個の点 $y_1, \cdots, y_N$ を取り、各 y_k に電荷量 Q_k の電荷を置く。

4.8 基本解の方法　ポテンシャル問題の近似解法 (2)

それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^{N} Q_k E(x - y_k). \tag{13}$$

それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^{N} Q_k E(x - y_k). \tag{13}$$

$\triangle E = 0$ (in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) であるから、$Q_k$ の取り方によらず

$$\triangle u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, \cdots, y_N\}).\quad \text{特に}\quad \triangle u^{(N)} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^{N} Q_k E(x - y_k). \tag{13}$$

$\triangle E = 0$ (in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) であるから、$Q_k$ の取り方によらず

$$\triangle u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, \cdots, y_N\}). \quad \text{特に} \quad \triangle u^{(N)} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

後は Q_k をうまく選んで、(12) を近似的に満たすようにする。

4.8 基本解の方法　ポテンシャル問題の近似解法 (2)

それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^{N} Q_k E(x - y_k). \tag{13}$$

$\triangle E = 0$ (in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) であるから、$Q_k$ の取り方によらず

$$\triangle u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, \cdots, y_N\}). \quad \text{特に} \quad \triangle u^{(N)} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

後は Q_k をうまく選んで、(12) を近似的に満たすようにする。

一つのやり方として、$\partial\Omega$ 上に N 個の点 $x_1, \cdots, x_N$ を取って

$$u^{(N)}(x_j) = g(x_j) \quad (j = 1, \cdots, N). \tag{14}$$

非常に素朴な感じがするが、とてもうまく行くことが多い。

それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^{N} Q_k E(x - y_k). \tag{13}$$

$\triangle E = 0$ (in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) であるから、$Q_k$ の取り方によらず

$$\triangle u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, \cdots, y_N\}). \quad 特に \quad \triangle u^{(N)} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

後は Q_k をうまく選んで、(12) を近似的に満たすようにする。

一つのやり方として、$\partial\Omega$ 上に N 個の点 $x_1, \cdots, x_N$ を取って

$$u^{(N)}(x_j) = g(x_j) \quad (j = 1, \cdots, N). \tag{14}$$

非常に素朴な感じがするが、とてもうまく行くことが多い。
(14) は次と同値である。

$$\begin{pmatrix} E(x_1 - y_1) & E(x_1 - y_2) & \cdots & E(x_1 - y_N) \\ E(x_2 - y_1) & E(x_2 - y_2) & & E(x_2 - y_N) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ E(x_N - y_1) & E(x_N - y_2) & \cdots & E(x_N - y_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

この連立１次方程式を解いて得た Q_k ($k = 1, \cdots, N$) に対して、(13) を用いる。

4.8 基本解の方法　近似解の特徴

4.8 基本解の方法　近似解の特徴

1. ある ρ $(0 < \rho < 1)$, C が存在して
$$\left\| u - u^{(N)} \right\| \le C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$
が成り立つ (**誤差の指数関数的減少**)。

1. ある ρ $(0 < \rho < 1)$, C が存在して
$$\left\| u - u^{(N)} \right\| \le C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$
が成り立つ (**誤差の指数関数的減少**)。これは多くの場合、**高精度の解が非常に少ない計算量で得られる**ことを意味する。

4.8 基本解の方法　近似解の特徴

1. ある $\rho\ (0<\rho<1)$, C が存在して
$$\left\| u - u^{(N)} \right\| \le C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$
が成り立つ (**誤差の指数関数的減少**)。これは多くの場合、**高精度の解が非常に少ない計算量で得られる**ことを意味する。
Cf. 差分法, 有限要素法では $\left\| u - u^{(N)} \right\| \le \frac{C}{N^2}$.

4.8 基本解の方法　近似解の特徴

1. ある ρ $(0 < \rho < 1)$, C が存在して
$$\left\| u - u^{(N)} \right\| \le C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$
が成り立つ (**誤差の指数関数的減少**)。これは多くの場合、**高精度の解が非常に少ない計算量で得られる**ことを意味する。
Cf. 差分法, 有限要素法では $\left\| u - u^{(N)} \right\| \le \frac{C}{N^2}$.
2. $u^{(N)}$ は調和関数である。$\operatorname{grad} u^{(N)}$ の計算が簡単:
$$\operatorname{grad} u^{(N)}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} Q_k \frac{x - y_k}{|x - y_k|^2} \quad (2\text{ 次元の場合}).$$

4.8 基本解の方法　近似解の特徴

1. ある ρ $(0 < \rho < 1)$, C が存在して
$$\left\| u - u^{(N)} \right\| \le C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$
が成り立つ (**誤差の指数関数的減少**)。これは多くの場合、**高精度の解が非常に少ない計算量で得られる**ことを意味する。
Cf. 差分法, 有限要素法では $\left\| u - u^{(N)} \right\| \le \frac{C}{N^2}$.
2. $u^{(N)}$ は調和関数である。$\operatorname{grad} u^{(N)}$ の計算が簡単:
$$\operatorname{grad} u^{(N)}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} Q_k \frac{x - y_k}{|x - y_k|^2} \quad (2\text{ 次元の場合}).$$
しかも $\left\| \operatorname{grad} u - \operatorname{grad} u^{(N)} \right\|$ も指数関数的に減少する。

4.8 基本解の方法　近似解の特徴

1. ある ρ $(0 < \rho < 1)$, C が存在して
$$\left\| u - u^{(N)} \right\| \leq C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$
が成り立つ (**誤差の指数関数的減少**)。これは多くの場合、**高精度の解が非常に少ない計算量で得られる**ことを意味する。
Cf. 差分法, 有限要素法では $\left\| u - u^{(N)} \right\| \leq \frac{C}{N^2}$.
2. $u^{(N)}$ は調和関数である。$\mathrm{grad}\, u^{(N)}$ の計算が簡単:
$$\mathrm{grad}\, u^{(N)}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} Q_k \frac{x - y_k}{|x - y_k|^2} \quad (2\text{ 次元の場合}).$$
しかも $\left\| \mathrm{grad}\, u - \mathrm{grad}\, u^{(N)} \right\|$ も指数関数的に減少する。
3. 理論的な基礎づけは、差分法、有限要素法と比べてまだ不十分である (テキストはない)。

4.8 基本解の方法　近似解の特徴

1. ある ρ $(0<\rho<1)$, C が存在して
$$\left\|u-u^{(N)}\right\| \le C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$
が成り立つ (**誤差の指数関数的減少**)。これは多くの場合、**高精度の解が非常に少ない計算量で得られる**ことを意味する。
Cf. 差分法, 有限要素法では $\left\|u-u^{(N)}\right\| \le \frac{C}{N^2}$.
2. $u^{(N)}$ は調和関数である。$\operatorname{grad} u^{(N)}$ の計算が簡単:
$$\operatorname{grad} u^{(N)}(x) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N} Q_k \frac{x-y_k}{|x-y_k|^2} \quad (2 \text{ 次元の場合}).$$
しかも $\left\|\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} u^{(N)}\right\|$ も指数関数的に減少する。
3. 理論的な基礎づけは、差分法、有限要素法と比べてまだ不十分である (テキストはない)。

同次方程式にしか適用できない、具体的な基本解が必要であることから、特殊な方法であると言わざるを得ないが、差分法・有限要素法に性能で勝る場合が多い。

4.8 基本解の方法　応用上の長所

4.8 基本解の方法　応用上の長所

- 渦なし流 (ポテンシャル流) の問題に適用した場合、速度ポテンシャル ϕ を微分して速度場 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ を得る際に高精度に計算出来て便利である。

4.8 基本解の方法　応用上の長所

- 渦なし流 (ポテンシャル流) の問題に適用した場合、速度ポテンシャル ϕ を微分して速度場 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ を得る際に高精度に計算出来て便利である。
- Jordan 領域の等角写像 ($\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$ の形) を近似的に求める場合、$u^{(N)}$ が $\log|\cdot - y_k|$ の線型結合で得られるので、その共役調和関数 $v^{(N)}$ が簡単に得られる。線積分をする必要はない ($u = \log|\cdot|$ の共役調和関数は $v = \arg$, $u + iv = \log$)。…とてもうまい話。

- 渦なし流 (ポテンシャル流) の問題に適用した場合、速度ポテンシャル ϕ を微分して速度場 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ を得る際に高精度に計算出来て便利である。
- Jordan 領域の等角写像 ($\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$ の形) を近似的に求める場合、$u^{(N)}$ が $\log|\cdot - y_k|$ の線型結合で得られるので、その共役調和関数 $v^{(N)}$ が簡単に得られる。線積分をする必要はない ($u = \log|\cdot|$ の共役調和関数は $v = \arg$, $u + iv = \log$)。…とてもうまい話。

… ということを実例を見せながら説明する予定であったが、今年度は通常の授業期間に行える講義回数が少ないので、カットする。

Jordan 領域の等角写像の数値計算については、講義ノート「ポテンシャル問題の数値解法」Link の §6.3, 6.4 に簡単な解説を載せてある。

参考文献

- 大塚 厚二, 高石 武史, 有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++ 数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014).
- 菊地 文雄, 有限要素法概説, サイエンス社 (1980, 新訂版 1999).