応用複素関数 第 8 回

～ ポテンシャル問題 (1) ～

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2020 年 7 月 1 日

目次

本日の内容・連絡事項

- ポテンシャル問題 (Laplace 方程式の境界値問題) を解説する。Riemann の写像定理を紹介し、特に Jordan 領域の場合は、ポテンシャル問題に帰着できることを説明する。歴史的にも有名な Dirichlet の原理を説明する (途中で弱形式が顔を出す)。数値計算法として、有限要素法の説明を始める。FreeFem++ を紹介し、ポテンシャル流のサンプル・プログラムを説明する。
  — 盛り沢山のようだけれど、手を動かせるので、敷居は低い (んじゃないかな)。
- FreeFem++ はこの機会にぜひ体験してもらいたいと考えています (単位を習得するために必須ではないけれど)。インストールやサンプル・プログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。7 月 1 日, 7 月 8 日は少し時間を延長して、17:30〜18:50 に Zoom 質問ミーティングを行います。
- レポート課題 2(案) を発表します。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report2.pdf`

  細部は次回までに決めますが (締め切りは 7 月 22 日にします)、今のうちから準備ができると思います。

4. ポテンシャル問題

4.1 はじめに

まず復習から。2 次元非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす。

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{2}$$

まず復習から。2 次元非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす。

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{2}$$

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ が分かれば、(1), (2) は Laplace 方程式の境界値問題とみなせる。(かなり一般的な条件下で) 定数差を除いて一意的に解が存在する。

ϕ が求まれば、$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ により $\boldsymbol{v}$ が得られ、流れが決定される。

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ さえ分かれば、(1), (2) を解いて流れが求まる。

まず復習から。2 次元非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす。

$$\triangle\phi = 0 \qquad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \qquad (\text{on } \partial\Omega). \tag{2}$$

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ が分かれば、(1), (2) は Laplace 方程式の境界値問題とみなせる。(かなり一般的な条件下で) 定数差を除いて一意的に解が存在する。

ϕ が求まれば、$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ により $\boldsymbol{v}$ が得られ、流れが決定される。

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ さえ分かれば、(1), (2) を解いて流れが求まる。

既知の正則関数を組み合わせることで色々な流れを表す、という手法を紹介済みで、円柱周りの一様流の問題などが解けることが分かっている。扱える問題の範囲が異なり、どちらが優れているとも言えないが、こちらの方法の有効性を想像するのは難しくないであろう。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題

(1), (2) を少し一般化する。
Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ の領域、$\Gamma := \partial\Omega$ は

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

と分割されていて、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられたとする。このとき $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ で、次の方程式を満たすものを求めることを考える。

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega) \tag{3}$$

$$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1) \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \tag{5}$$

(3) は有名な **Poisson方程式**(ポアソン)である。

(4), (5) はそれぞれDirichlet(ディリクレ)境界条件, Neumann(ノイマン)境界条件と呼ばれる。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題

Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場	f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー
静電場	f は電荷密度, ϕ は電位
熱平衡	f が発生する熱量, ϕ は温度

4.2 Poisson 方程式の境界値問題

Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場	f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー
静電場	f は電荷密度, ϕ は電位
熱平衡	f が発生する熱量, ϕ は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

その中でも $f = 0$ (Laplace 方程式) の場合がとりわけ重要であり、**ポテンシャル問題**と呼ばれる。これは関数論においても基本的な定理を得るための基礎となる。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題

Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場	f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー
静電場	f は電荷密度, ϕ は電位
熱平衡	f が発生する熱量, ϕ は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

その中でも $f=0$ (Laplace 方程式) の場合がとりわけ重要であり、**ポテンシャル問題**と呼ばれる。これは関数論においても基本的な定理を得るための基礎となる。

差分法 (FDM, finite difference method)、**有限要素法** (FEM, finite element method) をはじめとする多くの数値計算法が適用できる。特に Laplace 方程式の場合は、**基本解の方法**が有力である。

4.3 Riemann の写像定理

知るだけでも価値がある。証明は難しいが、意味は分かるであろう。

4.3 Riemann の写像定理

知るだけでも価値がある。証明は難しいが、意味は分かるであろう。

定義 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が双正則であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

定理 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

この定理の証明は省略する (やや高級で、長い準備が必要になるから)。

4.3 Riemann の写像定理

知るだけでも価値がある。証明は難しいが、意味は分かるであろう。

定義 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が双正則であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

定理 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

この定理の証明は省略する (やや高級で、長い準備が必要になるから)。

φ のことを、**領域 Ω の等角写像**、あるいは**領域 Ω の写像関数**と呼ぶ。

4.3 Riemann の写像定理

知るだけでも価値がある。証明は難しいが、意味は分かるであろう。

定義 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が双正則であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

定理 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

この定理の証明は省略する (やや高級で、長い準備が必要になるから)。

φ のことを、**領域 Ω の等角写像**、あるいは**領域 Ω の写像関数**と呼ぶ。

数学では、しばしば同型, 同型写像という概念が登場する。双正則は関数論としての同型写像と言える。

系

$\mathbb{C}$ 内の単連結領域で $\mathbb{C}$ とは異なるものは互いに同相 (位相同型) である。

証明　Ω_1, Ω_2 が $\mathbb{C}$ とは異なる $\mathbb{C}$ の単連結領域とすると、双正則写像 $\varphi_1\colon \Omega_1 \to D(0;1)$, $\varphi_2\colon \Omega_2 \to D(0;1)$ が存在する。このとき $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ は双正則である。特に同相写像であるので、Ω_1 と Ω_2 は同相である。 □

系

$\mathbb{C}$ 内の単連結領域で $\mathbb{C}$ とは異なるものは互いに同相 (位相同型) である。

証明　Ω_1, Ω_2 が $\mathbb{C}$ とは異なる $\mathbb{C}$ の単連結領域とすると、双正則写像 $\varphi_1\colon \Omega_1 \to D(0;1)$, $\varphi_2\colon \Omega_2 \to D(0;1)$ が存在する。このとき $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ は双正則である。特に同相写像であるので、Ω_1 と Ω_2 は同相である。 □

命題 (一意的に決定する条件)

　Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ とする。このとき、双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0 \tag{6}$$

を満たすものは一意的である。

(6) を**正規化条件**と呼ぶ。(証明は、円盤の話に持ち込んで、1 次分数変換の議論をする。)

4.4 Jordan 領域の写像関数　Jordan 曲線定理

Riemann 自身は、領域の境界の対応も込めて考えたという。その場合は、以下のようにポテンシャル問題に帰着して解くことが出来る。(境界の対応を考えないやり方については、関数論の教科書、例えば Ahlfors [1] を見て下さい。)

平面内の単連結領域の重要な例として、Jordan 領域がある。

4.4 Jordan 領域の写像関数　Jordan 曲線定理

Riemann 自身は、領域の境界の対応も込めて考えたという。その場合は、以下のようにポテンシャル問題に帰着して解くことが出来る。(境界の対応を考えないやり方については、関数論の教科書、例えば Ahlfors [1] を見て下さい。)

平面内の単連結領域の重要な例として、Jordan 領域がある。

定理 (Jordan 曲線定理)

平面内の任意の単純閉曲線 C に対して、ある領域 U_1, U_2 が存在して、U_1 は有界、U_2 は非有界、さらに

$$\mathbb{C} = U_1 \cup C^* \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \cap C^* = \emptyset, \quad U_2 \cap C^* = \emptyset.$$

ただし、C^* は C の像とする。さらに C^* は U_1, U_2 の共通の境界である。

(単純とは、自分自身と交わらないことを意味する。)

単純閉曲線のことを **Jordan 曲線**と呼ぶ。Jordan 曲線 C に対して、定理で存在を保証される U_1 を、C の囲む **Jordan 領域**と呼ぶ。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 (Jordan 領域の写像関数)

u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{7}$$

$$u(x,y) = -\log|z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega). \tag{8}$$

の解、v を u の共役調和関数 v で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0)\exp\left(u(z) + iv(z)\right)$$

は、Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 (Jordan 領域の写像関数)

u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{7}$$

$$u(x,y) = -\log|z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega). \tag{8}$$

の解、v を u の共役調和関数 v で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0)\exp\left(u(z) + iv(z)\right)$$

は、Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

v の求め方: $z \in \Omega$ を終点、z_0 を始点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (-u_y\, dx + u_x\, dy) \quad (\Omega \text{ は単連結であるから確定する}).$$

φ は $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張できる (後述の Carathéodory の定理による)。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は除去可能特異点で、$\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ は Ω で正則に拡張できる。

φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$. ゆえに $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\neq 0$ $(z\in\Omega)$.

Ω は単連結であるから、$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の一価正則な分枝が定まる。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

φ は $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張できる (後述の Carathéodory の定理による)。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は除去可能特異点で、$\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ は Ω で正則に拡張できる。

φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$. ゆえに $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\neq 0$ $(z\in\Omega)$.

Ω は単連結であるから、$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を u, v とする。

$$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=u(z)+iv(z). \tag{9}$$

u は調和関数であり、v は u の共役調和関数である。

φ は $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張できる (後述の Carathéodory の定理による)。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は除去可能特異点で、$\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ は Ω で正則に拡張できる。

φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$. ゆえに $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\neq 0$ $(z\in\Omega)$.

Ω は単連結であるから、$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を u, v とする。

$$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=u(z)+iv(z). \tag{9}$$

u は調和関数であり、v は u の共役調和関数である。

$z\in\partial\Omega$ のとき $|\varphi(z)|=1$ であるから

$$u(z)=\log\left|\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\right|=-\log|z-z_0|\quad(z\in\partial\Omega).$$

ゆえに u は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題 (7), (8) の解として確定する。

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。(9) から

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$$

であるから $\varphi(z_0) = 0$.

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

ゆえに u は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題 (7), (8) の解として確定する。

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。(9) から

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$$

であるから $\varphi(z_0) = 0$. また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z))\exp\left(u(z) + iv(z)\right),$$
$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

ゆえに u は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題 (7), (8) の解として確定する。

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。(9) から

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$$

であるから $\varphi(z_0) = 0$. また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z))\exp\left(u(z) + iv(z)\right),$$
$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

これから、$\varphi'(z_0) > 0 \Leftrightarrow v(z_0) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ が分かる。ゆえに $(\exists k \in \mathbb{Z})\ v(z_0) = 2k\pi$ であるが、どの k を選んでも φ は変わらないので、$v(z_0) = 0$ で v を定めれば良い。 $\square$

定理 (Carathéodory の定理)

C を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 曲線、Ω を C の囲む Jordan 領域、$\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ を双正則とするとき、φ は同相写像 $\widetilde{\varphi}\colon \overline{\Omega} \to \overline{D}(0;1)$ に拡張できる。

私自身はチェックしていないが、Wikipedia Link に情報がある (手持ちのテキストで載っているものを探したのだけれど…有名な Ahlfors [1] も give up している)。

4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{10}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{11}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

(10) $$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

(11) $$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。
境界条件 (11) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\}.$$

$$J[u] := \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

(10) $$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

(11) $$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。
境界条件 (11) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\}.$$

$$J[u] := \iint_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (10), (11) の解である。

4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{10}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{11}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (11) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\}.$$

$$J[u] := \iint_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2 \right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (10), (11) の解である。

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

4.5 Dirichlet の原理

証明　$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。

4.5 Dirichlet の原理

証明　$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega \left(u_x v_x + u_y v_y\right) dx\, dy = 0. \tag{12}$$

4.5 Dirichlet の原理

証明 $v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega \left(u_x v_x + u_y v_y\right) dx\, dy = 0. \tag{12}$$

Green の公式 $\left(\iint_\Omega \triangle u v\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx\, dy\right)$ より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\, dx\, dy = 0.$$

4.5 Dirichlet の原理

証明　$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

(12) $$\iint_\Omega \left(u_x v_x + u_y v_y\right) dx\, dy = 0.$$

Green の公式 $\left(\iint_\Omega \triangle u v\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx\, dy\right)$ より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\, dx\, dy = 0.$$

これが任意の v について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \square$$

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

4.5 Dirichlet の原理
反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (ツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

4.5 Dirichlet の原理

反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (ツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

4.5 Dirichlet の原理
反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (ツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在についても、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

4.5 Dirichlet の原理
反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (ツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在についても、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。
差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。
実は Dirichlet 原理の証明中に現れた (12) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱形式である。(弱形式については、次回解説を行う。)

今回は「百聞は一見にしかず」で、 まずはプログラムを紹介する。スライド 1 枚、2 行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。

```
// potential2d-v0.edp ---  2次元非圧縮ポテンシャル流
//  速度ポテンシャル，速度を求め、等ポテンシャル線，速度場を描く
border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で，V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
// ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く（ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

1. **FreeFem++ の WWW サイト** ▸ Link
2. `FreeFem++-4.6-full-MacOS_10.11.pkg` ▸ Link
   (フランスは遠いので、2020/6/30 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 ▸ Link
   (最新版ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 ▸ Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 ▸ Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

1. **FreeFem++ の WWW サイト** ▶ Link
2. `FreeFem++-4.6-full-MacOS_10.11.pkg` ▶ Link
   (フランスは遠いので、2020/6/30 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 ▶ Link
   (最新版ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 ▶ Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 ▶ Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

　とりあえず本家 (1) にご挨拶して、ソフトの入手は (1) でも良いですが、(2) にしたらいかがでしょう。

FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

1. **FreeFem++ の WWW サイト** Link
2. `FreeFem++-4.6-full-MacOS_10.11.pkg` Link
   (フランスは遠いので、2020/6/30 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 Link
   (最新版ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

とりあえず本家 (1) にご挨拶して、ソフトの入手は (1) でも良いですが、(2) にしたらいかがでしょう。インストール作業は動画を見てもらっても良いですが、(3) も参考になるかもしれません。

FreeFem++ を体験しよう　入手とインストール

1. **FreeFem++ の WWW サイト** ▸ Link
2. `FreeFem++-4.6-full-MacOS_10.11.pkg` ▸ Link
   (フランスは遠いので、2020/6/30 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 ▸ Link
   (最新版ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 ▸ Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 ▸ Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

とりあえず本家 (1) にご挨拶して、ソフトの入手は (1) でも良いですが、(2) にしたらいかがでしょう。インストール作業は動画を見てもらっても良いですが、(3) も参考になるかもしれません。FreeFem++ については、最近は、WWW 上でも日本語の解説が増えて来て、多くは信頼できます (ノイズが少ない)。手短な説明として (4) を用意しておきます。

FreeFem++ を体験しよう　サンプル・プログラム

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを開いて以下の 4 つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp

curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp
```

FreeFem++ では、`plot()` 実行後に停止させることがあります (グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。前者は使用する Mac で Zoom 質問ミーティングに参加して (空いています)、画面共有で状況を見せてくれるとスムーズに相談できると思います。

ベクトル解析の復習 (5)

Green の積分公式

$$\int_\Omega \triangle u\, v\; dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\; d\sigma - \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\; dx.$$

参考文献

L. V. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw Hill (1953).
L. V. アールフォルス 著, 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).