応用複素関数 第 7 回
～ 流体力学への応用 (3) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020 年 6 月 24 日

本日の内容・連絡事項

- 前回は、

  定常 2 次元非圧縮ポテンシャル流が正則関数である

  ことを説明した (定常とは $\boldsymbol{v}$, p が時刻で変化しない)。今回、簡単な正則関数に対応する流れ、それらの重ね合せを調べる。
  流体に関わらない複素関数の話としても重要である。
- 昨年度の講義ノート

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/intro-fluid.pdf`

  も公開している。
- ベクトル解析の復習の追加をまとめておく。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/vector_analysis.pdf`
- レポート課題 1 を出します。締め切りは 7 月 8 日 (23:59)。提出は Oh-o! Meiji を用いる。課題文や注意事項などは次を見ること。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report1/`

前回の補足 (説明を忘れた$\cdots$) 流れ関数の意味

考えている領域 Ω 内に定点 $\boldsymbol{a}$ を選び、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取ると、$\psi(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメーター s を用いると、$\boldsymbol{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds.$$

ただし

$$\boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

($\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{t}$ を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\boldsymbol{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、$C_{\boldsymbol{x}}$ を横切り、$\boldsymbol{n}$ の側に単位時間に流れる流体の量 (面積) である。

授業中にタブレットで図を描いた。

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/AC07_figure.pdf

前回の補足 (説明を忘れた…) 流れ関数の意味 (続き)

複素測度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \operatorname{Im}\int_C f'(z)\,dz.$$

実際、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = -v\,dx + u\,dy = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z)\,dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i\,dy) \\ &= (\phi_x dx - \psi_x dy) + i(\psi_x dx + \phi_x dy) \\ &= (\phi_x dx + \phi_y dy) + i(\psi_x dx + \psi_y dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \operatorname{Im} f'(z)\,dz.$$

流体の話を離れて

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

任意の正則関数 f について

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y v_x = 0$$

であるから、実部 u, 虚部 v の等高線は互いに直交している。

有名な複素関数の有名なテキストである Ahlfors [1] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに説明してある。

(小さな文字で流体の話に戻すと　等ポテンシャル線と流線は直交する、ということ。)

3.15 簡単な関数の表す流れ (1) 一様流

$f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x+yi) = (p-iq)(x+yi) = px + qy + i(-qx+py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流**であると呼ばれる。

1 次関数は一様流の速度ポテンシャルである。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) = px + qy, \quad \psi(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) = -qx + py.$$

等ポテンシャル線 ($\phi = \text{const.}$) も、流線 ($\psi = \text{const.}$) も平行直線群であり、それらは互いに直交する。

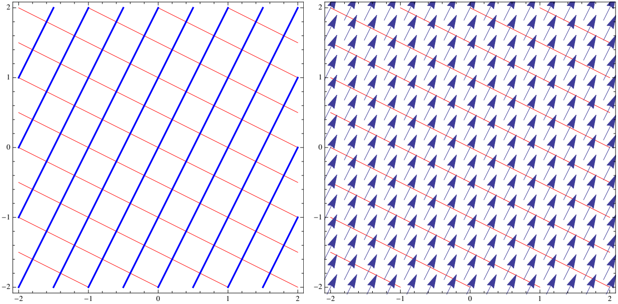


Figure: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル

3.15 簡単な関数の表す流れ (2) 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = m(\log r + i\theta) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と同じ。$m > 0$ ならば向きも同じ、$m < 0$ ならば向きは逆。大きさは $\frac{|m|}{r}$ で、原点からの距離に反比例している。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

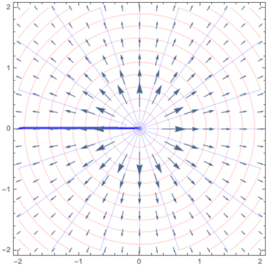
3.15 簡単な関数の表す流れ (2) 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ($\phi =$ 定数) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi =$ 定数) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線 C に対し、C から外に湧き出る流量は

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \mathrm{Im} \int_C f'(z)\, dz = \mathrm{Im} \int_C \frac{m}{z}\, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、$m > 0$ ならば原点においた**湧き出し** (source), $m < 0$ ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。



3.15 簡単な関数の表す流れ (3) 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa\left(\log r + i\theta\right) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = \frac{\kappa}{r}\left(\sin\theta + i\cos\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した方向である。$\kappa > 0$ ならば向きも同じ (時計回り)、$\kappa < 0$ ならば向きは逆 (反時計回り)。大きさは $\frac{|\kappa|}{r}$ で、原点からの距離に反比例する。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \kappa \log r.$$

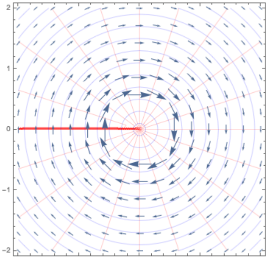
3.15 簡単な関数の表す流れ (3) 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 (ϕ の等高線) は原点を始点とする半直線で、流線 (ψ の等高線) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた**渦糸**(うずいと) (vortex filament, vortex string) または**点渦**(てんうず) (point vortex) と呼ばれる。

渦度は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 全体で 0. (渦度が原点に集中していて他は渦なし、と考えるべきかもしれない。)

問 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$ を確かめよ (f は一価正則でなく、前回の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。



Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピペできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/fluid_mathematica/`

3.16 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があるとき、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり 2 次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_2 = 0$$

であれば

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\ &\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\ &(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = (u_1 - i v_1) + (u_2 - i v_2) \\ &\qquad\qquad\quad = (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2). \end{aligned}$$

流れを合成するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い

以下、本日の最後まで 3.16 が続く。

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos\theta + m \log r + i\left(Ur \sin\theta + m\theta\right). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin\theta + m\theta.$$

$\theta = 0$ とすると $\psi = 0$, また $\theta = \pi$ とすると $\psi = m\pi$ であるから、これらは ψ の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$ とすると

$$(1) \quad \psi = m\pi \Leftrightarrow Ur \sin\theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m\left(\pi - \theta\right)}{U \sin\theta} \Leftrightarrow r = \frac{m}{U} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

ただし $\varphi := \pi - \theta$.

$\theta \in (0, \pi)$ $(\varphi \in (0, \pi))$ と $\theta \in (\pi, 2\pi)$ $(\varphi \in (-\pi, 0))$ で分けて考える。

これは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である [1]。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響は受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

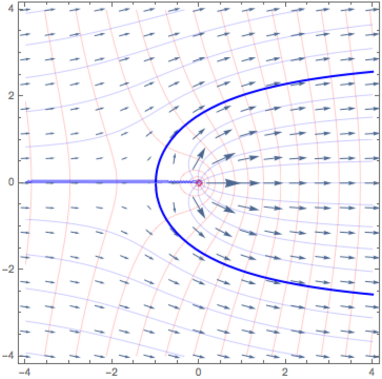


Figure: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は $\psi = \pm m\pi$)

同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z=a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z=-a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m\log(z-a) - m\log(z+a) = m\log\frac{z-a}{z+a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C}\setminus[-a,a]$ で一価正則である！)

分子, 分母の z を、それぞれ $z=a+r_1e^{i\theta_1}$, $z=-a+r_2e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m\left(\log r_1 + i\theta_1 - (\log r_2 + i\theta_2)\right) = m\log\frac{r_1}{r_2} + im\left(\theta_1-\theta_2\right).$$

等ポテンシャル線の方程式は $\dfrac{r_1}{r_2}=$ 定数. アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は $\Theta := \theta_1-\theta_2=$ 定数. Θ は a, $-a$ から点 z を見込む角であるので、2 点 $\pm a$ を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

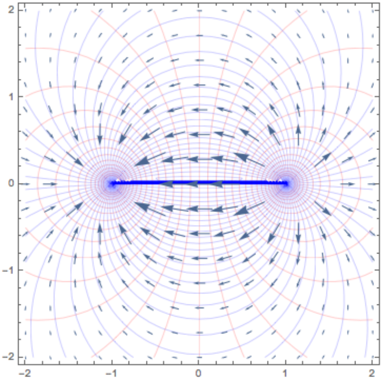


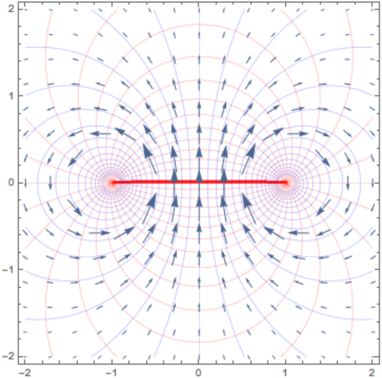
Figure: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を $z=a,-a$ に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z-a}{z+a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ $\theta_1-\theta_2=$ 定数, $\frac{r_1}{r_2}=$ 定数で、どちらも円を表す。



ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$, $-a$ に置いた湧き出し $f_2(z) = m\log(z+a)$, a に置いた吸い込み $f_3(z) = -m\log(z-a)$ を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m\log(z+a) - m\log(z-a) = Uz + m\log\frac{z+a}{z-a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

実軸 $y = 0$ では、$\psi = 0$ であるから、実軸は 1 つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U}\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine bpdy) と呼ぶ。

ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

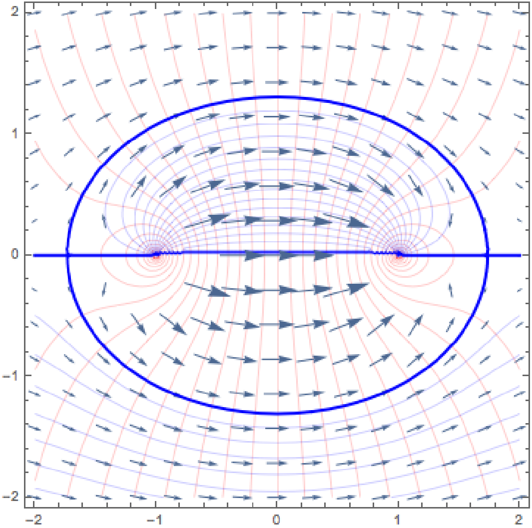


Figure: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

2 重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m\log(z-a) - m\log(z+a) = -\mu\frac{\log(z+a)-\log(z-a)}{2a} \\ &\to F(z) := -\mu\frac{d}{dz}\log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2+y^2} + i\frac{\mu y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

F を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。

2 重湧き出し (doublet) (続き)

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$ の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

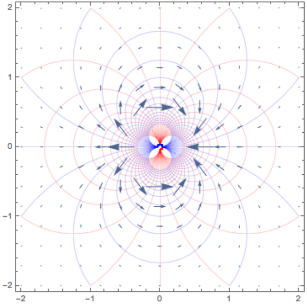


Figure: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U(r\cos\theta + i\sin\theta + \frac{R^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

であるから、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta.$$

特に円周 $r = R$ 上で $\psi = 0$ であるから、$r = R$ は流線である。

円柱を過ぎる一様流 (続き)

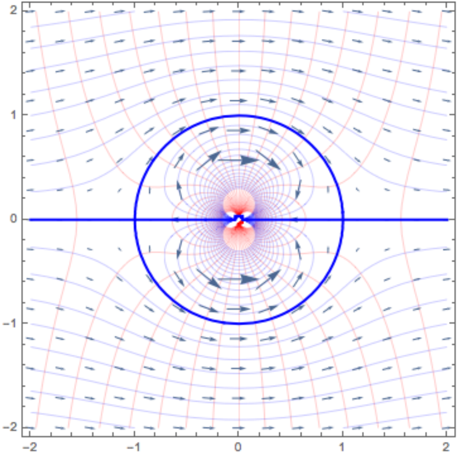


Figure: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

レポート課題1

コンピューター実習を伴う課題の1番。「1,2,3から2つ提出せよ」としてあるが、今回のは比較的簡単なはずなので、提出するのがオススメ。課題文は以下にある (Oh-o! Meiji からもリンクが張られている)。

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report1/

- 締め切りは7月8日 (23:59). 提出は Oh-o! Meiji を用いる。
- 原則として、レポート本文はA4サイズのPDF形式とする。A4レポート用紙に手書きしたものをスキャンしても良い。
- プログラムとその実行結果、実行するための情報 (入力パラメーターは何かとか) もレポートに含めること。

ベクトル解析の復習 (4)

grad は法線ベクトル　関数 $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ について、方程式 $F(x) = c$ の定める曲線 (曲面) を等高線 (等値面) と呼ぶ。grad F はそれらの法線ベクトルとなる。

流束積分　単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である曲面 S (曲線 C) について

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma \quad \left(\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds\right)$$

を**流束積分**, flux integral と呼ぶ (「速」でなくて「束」)。
　物理的には、単位時間に S (C) を通り抜ける流体の体積 (面積) を表す。ただし、 $\boldsymbol{n}$ の向いている側に出る量を正とする (S が領域 Ω の境界の場合は、Ω の外に流出する量ということになる)。

　ベクトル解析の復習は、次にまとめることにした。

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/vector_analysis.pdf`

K. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw Hill (1953). 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).