応用複素関数 第 6 回

〜 流体力学への応用 (2) 〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2020 年 6 月 17 日

本日の内容・連絡事項

- 前回は流体力学の方程式の解説を行った。本日は 2 次元流で、渦なしの場合、非圧縮の場合を論じて、最後に、2 次元渦なし非圧縮流の正体 (複素測度ポテンシャル) が正則関数であることを示す。

  (初めて聴く場合は、それなりに複雑に感じられる話が長く続くが、最後に実を結ぶので、頑張って下さい。)
- 本日の議論で用いる数学は、簡単なベクトル解析である。これについては、この PDF 末尾に用いることをまとめておいた。
- レポートについて。2 種類のレポート課題を出す。それぞれから 2 つ選択して提出すること (例えば、課題 1, 課題 3, 課題 B, 課題 C)。
  - 番号のついた課題。レポート課題 1,2,3, ... コンピューター実習に関係したもの。これはこれから課題を出す。締め切りは課題を出してから 2 週間後。
  - アルファベットのついた課題。レポート課題 A, B, C, ... コンピューターを使わず、紙とペンで処理できるもの。すでに課題候補について言及してきたが、今後は

    `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/reportABC.pdf`

    にまとめておく。締め切りは 7 月 31 日。

3.9 渦度　駆け足の説明

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を**渦度**(うずど) (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の “自転” の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解： 水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = 0$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = 0$ のとき、流れは**渦なし**, **非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である (次のスライドを見よ) という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理 「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = 0$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = 0$ である。」

3.10 ポテンシャル流　渦なし ≒ ポテンシャル流

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi$) を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ ≒ ポテンシャル流

領域 Ω における速度場 $\boldsymbol{v}$ が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \triangle \phi.$$

流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) と仮定すると

$$\triangle \phi = 0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \nabla \phi \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

(青字で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

ゆえに $\boldsymbol{v}$ は、次の **Laplace 方程式の Neumann 境界値問題**の解である。

$$\triangle \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{2}$$

もしも $\boldsymbol{v}$ の $\partial\Omega$ での値が既知ならば、この問題を解いて ϕ が (ゆえに $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \phi$ も) 求まる。この問題はポピュラーで、数値計算のやり方もよりどりみどりである (後でいくつか紹介する)。

$g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{4}$$

の解が存在するためには、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。
(必要性: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}\phi\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \triangle\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0$)

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。実際、$g = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ で、非圧縮 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

解には定数差の自由度が残る (解 + 定数は解、2 つの解の差は定数)。

3 次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで「解ける」ことが分かった。

2 次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(実は、2 次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

3.11 2次元流　2次元流の渦度

速度場 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは2次元的, **2次元流**であるという (このとき、$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}=0$, $\boldsymbol{v}$ の z 成分 $=0$. 逆は必ずしも真ではない。)。

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

そこで、2次元ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,t)=\begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \end{pmatrix}$ に対して、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}:=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

と定め、これを $\boldsymbol{v}$ の**渦度**と呼ぶことがある。この講義でも採用する。

3.12 2次元流　渦なしの流れ

2次元流についても、3次元流とほぼ同じことが成立する。

命題 (2次元流における渦なし流)

2次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 渦なし ($\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。

証明は3次元の場合と同じ。

3.13 2次元流　非圧縮流と流れ関数 (1)

2次元流の速度場 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、ψ を $\boldsymbol{v}$ の**流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

定義 (流線)

曲線が速度場 $\boldsymbol{v}$ の**流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることをいう。

注意　流れ関数の等高線 ($\psi =$ const. で定まる曲線) のことを流線と定義することもあるが、ここでしたように、流線は流れ関数を用いずに定義することもできる。流れ関数が存在する場合は、その等高線が流線になる、と論じることを選んだ。)

命題

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

Proof.

$\nabla\psi \cdot \boldsymbol{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$ であるから $\nabla\psi \perp \boldsymbol{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが $\boldsymbol{v}$ と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることを意味する。 □

より具体的に、$\nabla\psi$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転すると $\boldsymbol{v}$ に等しい。実際

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \nabla\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}.$$

3.13 2次元流　非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。　既視感があるね。とにかく証明するけど。

証明 (1) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$

(2) $\mathrm{rot}\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}(-v) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が well-defined であり、$\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u$. ゆえに ψ は $\boldsymbol{v}$ の流れ関数である。

(3) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -\triangle\psi.$ □

3.14 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 (1)

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

命題 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.14 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

渦なし、非圧縮の両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

そして

$$\triangle\phi = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \triangle\psi = -\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0.$$

このとき

$$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

実は f **は正則関数である**。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、$f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv.$

おまけ: ベクトル解析の復習 (2)

(前回のスライドで、grad, div, rot の定義と Gauss の発散定理を書いた。)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0 \quad (\nabla \times \nabla\phi = 0),\\
&\operatorname{div}\operatorname{grad} = \triangle \quad (\nabla \cdot \nabla\phi = \triangle\phi),\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0 \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = 0),\\
&\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \triangle \quad (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) - \triangle\boldsymbol{f}).
\end{aligned}
$$

方向微分係数の定義と合成関数の微分法から

$$\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial\phi}{\partial n}$$

おまけ: ベクトル解析の復習 (3)

命題 (ポテンシャルの存在定理)

$\mathbb{R}^n$ の単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_i)$ が $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(1 \le i, j \le n)$ を満たすならば、$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方によらず well-defined であり、$\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす。ただし $C_{\boldsymbol{x}}$ は定点から $\boldsymbol{x}$ に至る Ω 内の曲線である。

特に 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = 0$ を満たす場合、2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$ を満たす場合、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。

理解を深めるための注意を 2 つ

- 1 変数関数の場合の $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$ に相当する。
- C^1 級のポテンシャル F が存在する場合、$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ であるから、$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ が成り立つことは明らかである。

授業後の補足: 流れ関数の意味

考えている領域 Ω 内に定点 $\boldsymbol{a}$ を選び、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取ると、$\psi(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が流れ関数である。弧長パラメーター s を用いると、$\boldsymbol{t} := \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds.$$

ただし

$$\boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

($\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{t}$ を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\boldsymbol{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、$C_{\boldsymbol{x}}$ を横切り、$\boldsymbol{n}$ の側に単位時間に流れる流体の量 (面積) である。

複素測度ポテンシャル f が存在する場合は、$\operatorname{Im} \int_{C_{\boldsymbol{x}}} f'(z)\, dz$ に等しい。