

# 応用複素関数 第5回

## ～ 流体力学への応用 (1) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2020年6月10日

- 今回から、しばらく (3回?) 流体力学への応用の話をする。
- 今日は、流体力学で出て来る諸概念と、有名な方程式 (連続の方程式、非圧縮条件、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式、Stokes 方程式) の紹介をする (駆け足)。
- 次回以降、以下のものを使う可能性があるので、準備しよう。
  - Mathematica  
Mac で動くかチェックすること。ライセンスが切れて動かないことが時々ある。その場合は、池田先生か桂田に相談すること。
  - FreeFem++  
これについてはインストール方法を紹介する資料・動画を準備する。それからが良い。
  - C コンパイラ、GLSC  
GLSC を使うプログラムがコンパイル・実行できるかチェックすること。何か問題があれば (解決できるか分からないけれど) 桂田に質問して下さい。Zoom で画面共有して見せてくれればアドバイス出来るそうと考えています。

# 3 流体力学への複素関数の応用

## 3.1 はじめに

**流体 (fluid)** とは、液体、気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, …)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

次のことが言える。

2次元の非圧縮流体の渦なしの流れ = 正則関数

この意味を理解して、その場合に应用できるようになることが、応用複素関数の(1つの)目標である。

## 3.1 はじめに (続き)

流体力学の定番本として、今井 [1], 巽 [3] をあげておく。複素関数の応用については、今井 [2] がある。

必要な数学として、関数論、ベクトル解析、偏微分方程式の基本的な知識をあげておく。

## 3.2 流体の運動の表現 何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし  $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  は位置,  $t$  は時刻を表す。

- 速度 (velocity)  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

( $\mathbf{u}$  という字を使うことも多い。)

- 圧力 (pressure)  $p(\mathbf{x}, t)$
- 密度 (density)  $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 (temperature) 今回は考えない。

**問** 水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

## 3.2 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

**証明** (あらすじ) 流体内の任意の領域  $V$  にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし  $\mathbf{n}$  は  $\partial V$  の点における外向き単位法線ベクトルで、 $d\sigma$  は面積要素、 $\partial V$  は  $V$  の境界である。

左辺に積分記号下の微分、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

$V$  は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad \square$$

### 3.3 物質微分 (1) 定義

積の微分法から  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$  が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

**物質微分** (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素  $\frac{D}{Dt}$  を次式で定義する:

$$(3) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

これを使うと (2) は次のように表せる。

$$(4) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

### 3.3 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子の位置を  $\mathbf{x}(t)$  とする。すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数  $f(\mathbf{x}, t)$  に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)x_j'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)v_j(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}\end{aligned}$$

が成り立つ。

**注意** 流体粒子の速度は、位置  $\mathbf{x}$  と時刻  $t$  が分かれば  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  で与えられるが、その加速度は  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  でなく、 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  である。よく考えてみよう。

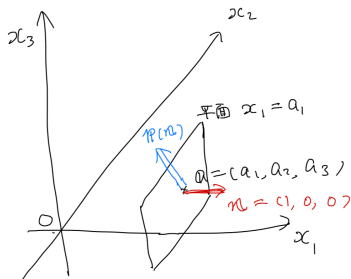
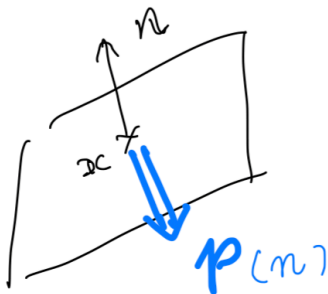


## 3.4 応力 (1) Cauchy の応力原理, 応力の定義

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置  $x$ , 時刻  $t$ , 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル  $n$  で指定する) で定まる (Cauchy の応力原理)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。



## 3.4 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ ,  $t = \tau$  と固定し、応力  $\mathbf{p}$  を  $\mathbf{n}$  の関数と考える:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{n}).$$

点  $\mathbf{a}$  を通る平面  $x_i = a_i$  を通して、正の側が負の側におよびす力を  $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$  とおく。これは  $\mathbf{p}(\mathbf{e}_i)$  である。

$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$  を **応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- $P$  は対称である:  $P^T = P$  つまり  $p_{ij} = p_{ji}$ .
- $\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P^T \mathbf{n}$ .

次式は覚えておくこと。

$$(5) \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}.$$

### 3.4 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、 $E = 0$  のとき  $P = -pI$  等々)。それから

$$P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで  $I$  は単位テンソル、 $E$  は

$$(6) \quad E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor)、変形速度テンソルと呼ばれる。

さらに **Newton 流体の仮定** ( $P$  は  $E$  の 1 次式) をおくと、

$$(7) \quad P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) I + 2\mu E$$

を得る (岡本・中村 [4])。ここで  $\lambda, \mu$  は非負定数、 $p = p(x, t)$  はスカラー関数である。

## 3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

$\mu$  は**粘性率 (粘性係数, 粘度, viscosity)** と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$  である流体を**完全流体 (perfect fluid)**, あるいは**非粘性流体 (inviscid fluid)** と呼ぶ。
- $\mu > 0$  である流体を**粘性流体 (viscous fluid)** と呼ぶ。

一方、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  を満たす流体を**非圧縮流体** と呼ぶ。連続の方程式  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

$$(8) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{非圧縮条件の方程式})$$

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす。

$$(9) \quad P = -pI + 2\mu E.$$

## 3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ( $\mathbf{v} = 0$ ) や、完全流体 ( $\mu = 0$ ) においては ( $\mu E = 0$  であるので)

$$P = -pI = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n} = -p\mathbf{n}.$$

応力は面に垂直 ( $\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$ )、押される向きで (外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と逆向き)、大きさは  $p = p(\mathbf{x}, t)$  で  $\mathbf{n}$  にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

## 3.6 流体の運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、一般に次の方程式が成立する。

$$(10) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

$$(11) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

**証明** 流体内の仮想的な領域  $V$  で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma.$$

右辺のベクトルの第  $i$  成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i d\mathbf{x}.$$

$$\text{ゆえに } \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_V \operatorname{div} P d\mathbf{x}. \quad V \text{ は任意なので } \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} P. \quad \square$$

## 3.6 流体の運動方程式 (2) $\operatorname{div} P$ を計算する

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき  $\operatorname{div} P$  を計算すると

$$(12) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

ただし

$$\Delta \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{念のため}).$$

特に非圧縮流体では ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  であるから)

$$(13) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}.$$

これで準備はできた!

## 3.6 流体の運動方程式 (3) Navier-Stokes, Euler 方程式

非圧縮流体の運動方程式は次の形になる。

$$(14) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な<sup>ナヴィエ・ストークス</sup>**Navier-Stokes方程式**である。

ただし

$$(15) \quad \nu := \frac{\mu}{\rho}$$

とおいた。 $\nu$  を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

特に完全流体の場合は ( $\mu = 0$  であるから)

$$(16) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な<sup>オイラー</sup>**Euler方程式**である。



## 3.6 流体の運動方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ( $|\mathbf{v}|$ ) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  を無視して ( $\mathbf{v} = 0$  で線形化する、とも言える)

$$(17) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

を得る。これを **Stokes 方程式** と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

この他にも線形化したもの、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

**問** 水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

**答** 水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。 $\mu$  については確かにそうだが、 $\nu$  については逆転している (水の  $\rho$  が 3 桁大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ~ 80 倍程度であるという。

温度が上がると  $\mu$  は小さくなる。

気体の場合は、 $\mu$  は圧力にはほとんどよらない。

## 3.6 流体の運動方程式 (5) 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。

- (12) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。
- Navier-Stokes 方程式ベクトル表記でなく、成分表記せよ ( $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  はどういうものか、一度は計算してみよう)。
- Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。

## 3.7 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

数学として解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

粘性流体では、固体の壁では

$$(18) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{wall}} \quad (\text{固体の壁において})$$

を満たすことが知られている ( $\mathbf{v}_{\text{wall}}$  は壁の速度)。特に固定壁では

$$(19) \quad \mathbf{v} = 0 \quad (\text{固体の壁において})$$

を満たす。これを**粘着境界条件**と呼ぶ。

数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

## 3.7 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$(20) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n} \quad (\text{領域の境界において})$$

を**すべり境界条件**と呼ぶ。速度の垂直成分が0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n}$  は、3次元では

$$P\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$$

と表せる。また2次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを  $\mathbf{t}$  として、次式で表せる。

$$P\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

**注意** 非粘性流体では、流体のしめる領域内で  $P\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}$  が成り立つ。  
 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  が滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

これ以外に、応力を指定する**応力境界条件**というものもあるが、それは必要になったときに説明する。

本日の話はここまで。以下のスライドはおまけです。

## 3.8 静水圧の話 $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$  という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。  $\mathbf{v} = 0$  であるから  $0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$ . 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を  $z = 0$  として、  $z = 0$  において、  $p = p_0 = \text{大気圧}$  とすると

$$p(\mathbf{x}) = -\rho gz + p_0.$$

1 m 深く潜った ( $z$  を 1 減らした) ときの、圧力の増加分  $\Delta p$  は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m} = 9.8 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

大気圧  $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  であるから、  $\Delta p$  は大気圧  $p_0$  の 10% くらいである。10 m 潜ったとき、  $\Delta p \doteq p_0$  となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、大げさな解き方のように思えるが、我々は導出した方程式を下に考えようとしているので、無駄なことではない。

## 3.8 静水圧の話 アルキメデスの浮力の原理

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体  $\Omega$  を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その“合力”を求めよう。

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} P \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \rho g \int_{\Omega} d\mathbf{x} \mathbf{e}_3 = \rho |\Omega| g \mathbf{e}_3.$$

ただし

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| = \Omega \text{ の体積.}$$

$\rho |\Omega|$  は「物体が押しのける水の質量」で、 $\rho |\Omega| g$  はその重さ (重力) である。つまり向きが上向き ( $\mathbf{e}_3$ ) で、大きさが「物体が押しのける水の重さ」である力となる。これが**浮力**である。



## おまけ: ベクトル解析の記号の復習

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{curl} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (\text{Gauss の発散定理}).$$

**問** 水と空気のおおよその密度は？

**解答** 1 ml で 1 g とすれば、 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 l であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、 $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$  となる。

-  今井 功, 流体力学 前編, 裳華房 (1973). (後編は書かれなかった。)
-  今井 功, 複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981, 1989).
-  たつみ ともまさ 巽 友正, 流体力学, 培風館 (1982).
-  岡本 久, 中村 周, 関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10).