応用複素関数 第 4 回

～ Riemann 球面と 1 次分数変換 (2) ～

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2020 年 6 月 3 日

連絡事項

- 成績評価の方法を次のように変更する。

  【成績評価の方法】

  3 つのレポート課題（*50*％）と期末レポート（*50*％）による。点数から成績への換算は大学の基準に従う（合格は *60*％以上の得点を取ることが条件）
- 今週は大学から「オンライン授業に関する学生アンケート」を行うよう指示があった。回答期限は 6 月 10 日 (水) 18:50 である。
- 次回からはしばらく流体力学への応用の話をする。Mathematica の準備をしておくこと。

前回のやり残し　∞ と四則

$\widehat{\mathbb{C}}$ において、lim と「合う」ように次のように定めることもある。

$$(\forall a \in \mathbb{C}) \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$$

$$(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \frac{a}{0} = \infty.$$

$$(\forall b \in \mathbb{C}) \quad \frac{b}{\infty} = 0.$$

前回のやり残し　∞ と四則

$\widehat{\mathbb{C}}$ において、lim と「合う」ように次のように定めることもある。

$$(\forall a \in \mathbb{C}) \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$$

$$(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \frac{a}{0} = \infty.$$

$$(\forall b \in \mathbb{C}) \quad \frac{b}{\infty} = 0.$$

しかし、$\infty + \infty$ や $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

前回のやり残し　∞ と四則

$\hat{\mathbb{C}}$ において、lim と「合う」ように次のように定めることもある。

$$(\forall a \in \mathbb{C}) \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$$

$$(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \frac{a}{0} = \infty.$$

$$(\forall b \in \mathbb{C}) \quad \frac{b}{\infty} = 0.$$

しかし、$\infty + \infty$ や $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ Riemann 球面と呼ぶか。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ Riemann 球面と呼ぶか。　$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ Riemann 球面と呼ぶか。　$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

なぜ Riemann 球面と呼ぶか。　$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

$\forall P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi\colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影 (stereographic projection)** と呼ぶ。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ Riemann 球面と呼ぶか。　$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また $x_1 x_2$ 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + i x_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

$\forall P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi \colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影 (stereographic projection)** と呼ぶ。

注　以下で、$\varphi(N) = \infty$ と定めることで、φ を S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像に拡張する。それも**立体射影**と呼ばれる。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (2) 立体射影の式

問 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = (x, y, 0)$ とするとき、次式を示せ。

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{すなわち} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

(ヒント: 2 点 N, P を通る直線と、平面 $x_3 = 0$ との交点を求める。)

問 $\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ は次のように解けることを示せ。

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}.$$

(ヒント: $|z|^2 = \dfrac{1 + x_3}{1 - x_3}$ を導出した後、x_3, x_1, x_2 の順に求める。)

(逆写像が存在するので)

立体射影 $\varphi \colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ **は全単射である。**

$\displaystyle\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (3) S と $\hat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\lim_{P \to N} \varphi(P) = \infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\hat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & ((x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\}) \\ \infty & ((x_1, x_2, x_3) = N = (0, 0, 1)). \end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、$\hat{\mathbb{C}}$ は φ に $\hat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\hat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (3) S と $\hat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\displaystyle\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\hat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3} & ((x_1,x_2,x_3)\in S\setminus\{N\})\\ \infty & ((x_1,x_2,x_3)=N=(0,0,1)).\end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、$\hat{\mathbb{C}}$ は φ に $\hat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\hat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

問　次のことを確かめよ (幾何学的考察および計算の両方で)。

$$\varphi(\text{北半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>1\},\quad \varphi(\text{南半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\},$$
$$\varphi(\text{赤道})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\},$$
$$\varphi(\text{北極})=\infty,\quad \varphi(\text{南極})=0.$$

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1　一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\right\| \quad (\| \ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1　一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\right\| \quad (\| \ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき

$$d(z_1, z_2) = \frac{2\left|z_1 - z_2\right|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}.$$

図形イメージは鮮明だけれど、式はちょっと面倒 (個人の感想です)。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 (一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 (一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

2.7 Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

$\hat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 (一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

$\mathbb{C}$ においては、$a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a; r) \mid r > 0\}, \quad U(a; r) := D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

$\hat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 (一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

$\mathbb{C}$ においては、$a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a;r) \mid r > 0\}, \quad U(a;r) := D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

新たに $\mathcal{B}(\infty)$ を定めて、$\mathcal{B}(a)$ ($a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、$\hat{\mathbb{C}}$ の位相が定義できる。

$$\mathcal{B}(\infty) := \{U(\infty;R) \mid R \in (0,+\infty)\}, \quad U(\infty;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$

2.8 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に 1 次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も 1 次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z\to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z\to a}\varphi(z)=\varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi \colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\displaystyle\lim_{z\to a}\varphi(z)=\varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi\colon X\to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

2.8 1次分数変換は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

　既に1次分数変換 φ は、$\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a\in\hat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z\to a}\varphi(z)=\varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

　$\hat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

　一般に写像 $\varphi\colon X\to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。
　分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1次分数変換は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

実は、$\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への同相写像は一次分数変換に限る。

(このことの証明も、期末レポート課題の候補問題とする。)

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(ここは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体** (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(ここは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体** (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(ここは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体** (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(ここは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体** (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a;r) = D(a;r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty;R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(ここは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体** (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a;r) = D(a;r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty;R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

この座標変換 $w = 1/z$ により、$z = \infty$ においても、関数の微分可能性や留数を考えたりできる。($F(w) = f(1/w)$ が $w = 0$ で微分できるとき、f は ∞ で微分可能という等。) これは実はよく使われる。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は1次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

(a) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\hat{\mathbb{C}}$ の円は1次分数変換で $\hat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 (円に関して鏡像の位置)

C は $\hat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \hat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは, 次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

- (a) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。
- (b) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

命題 (1次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある2点、f は1次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ　色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z) = z + d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ　色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z) = z + d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ のときは、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

ヒント　z, z' が c から発する一本の半直線上にあり、かつ $|z-c||z'-c'| = r^2$ を満たすためには、$(z-c)(\overline{z'}-\overline{c}) = r^2$ を満たすことが必要十分である。

以下各自に任せる。

領域の等角写像という概念を紹介する。これについては後で詳しく説明するが、有名かつ重要な話を 3 つ “先行上映” する。

(i) Riemann の写像定理
(ii) 単位円盤の等角写像
(iii) 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が 1 次分数変換となることが、1 次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1 次分数変換は基本的ツールとして使われる。

2.11 1 次分数変換で与えられる領域の等角写像

例 1

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、**双正則**という。

$\hat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、$\varphi\colon \Omega \to D_1$ が双正則であるとき、φ を **Ω の等角写像**あるいは **Ω の写像関数**とよぶ。

定理 (Riemann の写像定理)

$\hat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω が単連結で、$\Omega \neq \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ ならば、Ω の等角写像が存在する。

Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $z_0 \in \Omega$ とするとき、Ω の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0.$$

"簡単な" 領域の等角写像が 1 次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が 1 次分数変換そのものでなくても、その構成に 1 次分数変換が使われるものはとても多い)。

次は非常に有名な定理である。

定理 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

(1) $$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)
$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

次は非常に有名な定理である。

定理 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi \colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{1}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)
$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題候補にする。(1) の φ が条件を満たすこと、条件を満たす 1 次分数変換が (1) に限られることは初等的に導ける。
双正則という仮定から、φ が 1 次分数変換に限られる、というところに **Schwarz の補題**という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

2.11 1次分数変換で与えられる領域の等角写像

例 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

は H の等角写像である。φ は **Cayley 変換**とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

例 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

は H の等角写像である。φ は **Cayley 変換**とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

Hilbert 空間における unitary 変換と自己共役作用素が Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の非調和比 (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

(証明) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi\circ f$ は α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi\circ f(z) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), g(\gamma)) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}). \qquad \square$$

落穂拾い (2)

上半平面を単位円板に写す 1 次分数変換は

$$w = \alpha \frac{z - \beta}{z - \overline{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \mathrm{Im}\,\beta > 0.$$

$\beta = i$, $\alpha = 1$ のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身に写す 1 次分数変換は？