

応用複素関数 第3回

～ Riemann 球面と 1 次分数変換 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020 年 5 月 27 日

- S2 もオンライン授業になり、対面形式の期末試験は実施しないことが決定した。成績評価の方法を変更する。5月31日までに「シラバスの補足」に記述する。
- 複素関数論の基本的なツールである 1 次分数変換を紹介する。そのために、それ自身重要な無限遠点 ∞ , Riemann 球面も紹介する。(この話は次回に続く。)

2 Riemann 球面, 1 次分数変換

イントロ

最初に問: ∞ は数か? (Cf. 実数で考えるときの $+\infty, -\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

∞ をモノに格上げし、 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考え、距離空間とする。

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ において $f(z)$ が ∞ に収束する、とする。

$\hat{\mathbb{C}}$ はもう体ではない。 ∞ は数ではないが、それに準ずるもの。

$\hat{\mathbb{C}}$ を **Riemann 球面** とよぶ。

$\hat{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\mathbb{C})$ と表す (1次元複素射影空間と呼ばれる)。**Riemann 面** (説明は略) の典型例である。

こうお膳立てすると、 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ という関数は非常に基本的となる。
これを **1 次分数変換** とよぶ。

2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とするとき $\frac{az + b}{cz + d}$ を考える。

① $c \neq 0$ のとき、 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ で連続で

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

② $c = 0$ のとき、 \mathbb{C} で連続で

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \infty.$$

(注: $ad - bc \neq 0$ より $a \neq 0$, $d \neq 0$ である。 $-d/c$ と a/c が ∞ になる、と考えると分かりやすいかも。)

念のため復習 $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{C}$ とする。

- $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Leftrightarrow (\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega: |z - a| < \delta) |f(z)| > R.$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega: |z| > R) |f(z) - A| < \varepsilon.$

(細かい注意: Ω 内の点列 $\{z_n\}$ で $\lim |z_n| = +\infty$ となるものが存在すると仮定しておく。)

2.1 1次分数変換の定義 (2) 定義

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とする。

① $c \neq 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & (z \neq -d/c, \infty) \\ \infty & (z = -d/c) \\ \frac{a}{c} & (z = \infty) \end{cases}$$

② $c = 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{az + b}{d} & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を **1次分数変換** と呼ぶ。

以下、単に $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ と表す。 $\varphi(-d/c) = \infty$, $\varphi(\infty) = a/c$ と約束。

2.2 1次分数変換の性質 (1)

命題

任意の1次分数変換 $\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は連続である。

Proof.

我々はまだ $\hat{\mathbb{C}}$ に位相も距離も導入していない(反則!)。しかし、任意の $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ が成り立つようにする(約束)。その約束が果たされれば連続。□

2.2 1次分数変換の性質 (2) 行列と対応させる

複素数成分の、2次の正則行列の全体 (一般線型群) を $GL(2; \mathbb{C})$ と表す。

$$GL(2; \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{C})$ に対して、1次分数変換 φ_A を次式で定める。

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

次が基本的である。

命題

- ① $A, B \in GL(2; \mathbb{C})$ とするとき $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
- ② $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、 $\varphi_I = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ ($\widehat{\mathbb{C}}$ 上の恒等写像).
- ③ $A \in GL(2; \mathbb{C})$ ならば $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$.

2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明

① $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz + s \neq 0$, $c\varphi_B(z) + d \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} \varphi_A \circ \varphi_B(z) &= \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz + q}{rz + s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d} \\ &= \dots \text{中略} \dots = \frac{(ap + br)z + (aq + bs)}{(cp + dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z). \end{aligned}$$

ゆえに有限個の点を除いて、 $\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は一致する。

$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は $\hat{\mathbb{C}}$ で連続であるから、 $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で一致する。

② $c = 0$ の場合に相当する。定義より $\varphi_I(z) = \begin{cases} z & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$. これは $\hat{\mathbb{C}}$ の恒等写像である。

2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明 (続き)

- ③ $A \in GL(2; \widehat{\mathbb{C}})$ のとき、 A^{-1} が存在して、 $A^{-1} \in GL(2; \mathbb{C})$.
(1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$. ゆえに $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$. □

系

任意の 1 次分数変換は全単射である。

(上の定理の (3) により、逆写像が存在することが分かるから。)

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

- ① 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

- ② 定数倍 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

$a = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) とすると、 $z \mapsto rz$ (拡大または縮小) と $z \mapsto e^{i\theta}z$ (回転) の2つに分解できる。

- ③ 反転

$$R(z) := \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}.$$

以上から、平行移動、定数倍、反転が1次分数変換であることが分かった。

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (2)

命題

任意の 1 次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

(どうやって証明する?)

Proof.

Ⓐ $c \neq 0$ の場合、部分分数分解により

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = -\frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} + \frac{a}{c}.$$

$T_{d/c}$, R , $M_{-\frac{ad-bc}{c^2}}$, $T_{a/c}$ を合成したものである。

Ⓑ $c = 0$ の場合、

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

$M_{a/d}$, $T_{b/d}$ を合成したものである。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通ると考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$(1) \quad az\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + c = 0$$

の形に表せるもの全体である。

気になる人には自分で確かめてもらおう。

問 複素平面内の任意の直線は、ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a\bar{z} + \bar{a}z + \beta = 0$$

と表せる (直線の方程式)。

問 複素平面内の任意の円は、ある $c \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}, \beta \leq |c|^2$ を用いて、

$$z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + \beta = 0$$

と表せる (円の方程式)。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、 $\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

Proof.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。

定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。

反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ でどうなるか調べる。 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円の方程式 (1) に、 $z = R^{-1}(w) = \frac{1}{w}$ を代入すると

$$a \frac{1}{w} \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \beta \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \overline{\beta} \left(\frac{1}{w}\right) + c = 0.$$

これは次式と同値である。

$$a + \beta w + \overline{\beta} \overline{w} + c w \overline{w} = 0$$

$a' := c, \beta' := \overline{\beta}, c' := a$ とおくと

$$a' w \overline{w} + \beta' \overline{w} + \overline{\beta'} w + c' = 0.$$

これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を表している。実際 $|\beta'|^2 - a' c' = |\beta|^2 - ac \geq 0$.

□

2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (1)

補題

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす1次分数変換が一意的に存在する。

証明 (存在) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ (3つとも有限) の場合は

$$(2) \quad \varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}.$$

$\beta = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{z - \gamma}$, $\gamma = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z - \beta}{\alpha - \beta}$, $\alpha = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z - \beta}{z - \gamma}$ とすればよい。

注 (証明の途中だけど) (2) は自分で書けるようにしておくべき公式である。 $(\beta$ が0で赤、 γ が ∞ で青、 α が1となるように調節するオレンジ)

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (2)

(一意性) φ_1, φ_2 が条件を満たすならば、 $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ も 1 次分数変換で

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

$\varphi(\infty) = \infty$ より、ある a, b が存在して $\varphi(z) = az + b$.

$\varphi(0) = 0$ より、 $b = 0$.

$\varphi(1) = 1$ より、 $a = 1$.

ゆえに $\varphi(z) = z = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)$. すなわち $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.

φ_1 を右からかけて $\varphi_1 = \varphi_2$.

□

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (3)

命題 (任意の 3 点を任意の 3 点に写せる)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なり、 $\alpha', \beta', \gamma' \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば、ある 1 次分数変換 φ が存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

Proof.

一般に α, β, γ を $1, 0, \infty$ に写す 1 次分数変換を $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma}$ と表すことにすると、

$$\varphi := \varphi_{\alpha', \beta', \gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}$$

とすればよい。



2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (4)

例題 1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す1次分数変換を求めよ。

(解答) 命題の証明を実行する、というイメージの解答である。

1, 2, 3 を 1, 0, ∞ に写す1次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z) = \frac{1-3}{1-2} \cdot \frac{z-2}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}. \quad \text{対応する行列は } \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2, 3, 1 を 1, 0, ∞ に写す1次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z) = \frac{2-1}{2-3} \cdot \frac{z-3}{z-1} = \frac{-z+3}{z-1}. \quad \text{対応する行列は } \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求める1次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ゆえに } \varphi(z) = \frac{5z-13}{3z-7}.$$

□

余談的注意: \mathbb{R} と $\pm\infty$, \mathbb{C} と ∞

実数の世界の ∞ と複素数の世界の ∞ は、(ふつう) 記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは実数世界の ∞ は $+\infty$ と書く。

$I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ とする。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ とは

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) f(x) > R.$$

実数の世界には、 $-\infty$ もあって、これは $+\infty$ とは違うものである。数直線で言うと、 $+\infty$ は右の果て、 $-\infty$ は左の果てである。複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点 ∞ が1個あるだけ。

$$+\infty \neq -\infty = (-1) \cdot (+\infty),$$

$$(-1) \cdot \infty = \infty$$

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を作るように $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を作ることもできる (杉浦 [1])。



杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), MIND から <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843> でアクセス可能である.