応用複素関数 第 3 回

～ Riemann 球面と 1 次分数変換 ～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2020 年 5 月 27 日

連絡事項&本日の内容

- S2 もオンライン授業になり、対面形式の期末試験は実施しないことが決定した。成績評価の方法を変更する。5 月 31 日までに「シラバスの補足」に記述する。

連絡事項&本日の内容

- S2 もオンライン授業になり、対面形式の期末試験は実施しないことが決定した。成績評価の方法を変更する。5 月 31 日までに「シラバスの補足」に記述する。
- 複素関数論の基本的なツールである 1 次分数変換を紹介する。そのために、それ自身重要な無限遠点 ∞, Riemann 球面も紹介する。(この話は次回に続く。)

最初に問: ∞ は数か？　(Cf. 実数で考えるときの $+\infty$, $-\infty$)

最初に問: ∞ は数か？　(Cf. 実数で考えるときの $+\infty$, $-\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。

最初に問: ∞ は数か？　(Cf. 実数で考えるときの $+\infty$, $-\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

∞ をモノに格上げし、$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考え、距離空間とする。

$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ において $f(z)$ が ∞ に収束する、とする。

最初に問: ∞ は数か？　(Cf. 実数で考えるときの $+\infty$, $-\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

∞ をモノに格上げし、$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考え、距離空間とする。

$\lim_{z \to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ において $f(z)$ が ∞ に収束する、とする。

$\widehat{\mathbb{C}}$ はもう体ではない。∞ は数ではないが、それに準ずるもの。

最初に問: ∞ は数か？　(Cf. 実数で考えるときの $+\infty$, $-\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

∞ をモノに格上げし、$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考え、距離空間とする。

$\displaystyle\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ において $f(z)$ が ∞ に収束する、とする。

$\widehat{\mathbb{C}}$ はもう体ではない。∞ は数ではないが、それに準ずるもの。

$\widehat{\mathbb{C}}$ を **Riemann 球面**とよぶ。
$\widehat{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ とも表す (1 次元複素射影空間と呼ばれる)。**Riemann 面** (説明は略) の典型例である。

最初に問: ∞ は数か？　(Cf. 実数で考えるときの $+\infty$, $-\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

∞ をモノに格上げし、$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考え、距離空間とする。

$\displaystyle\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ において $f(z)$ が ∞ に収束する、とする。

$\widehat{\mathbb{C}}$ はもう体ではない。∞ は数ではないが、それに準ずるもの。

$\widehat{\mathbb{C}}$ を **Riemann 球面**とよぶ。
$\widehat{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ とも表す (1 次元複素射影空間と呼ばれる)。**Riemann 面** (説明は略) の典型例である。

こうお膳立てすると、$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ という関数は非常に基本的となる。これを **1 次分数変換**とよぶ。

2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とするとき $\dfrac{az+b}{cz+d}$ を考える。

2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とするとき $\dfrac{az+b}{cz+d}$ を考える。

(i) $c \neq 0$ のとき、$\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ で連続で

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

(ii) $c = 0$ のとき、$\mathbb{C}$ で連続で

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とするとき $\dfrac{az+b}{cz+d}$ を考える。

(i) $c \neq 0$ のとき、$\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ で連続で

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

(ii) $c = 0$ のとき、$\mathbb{C}$ で連続で

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

(注: $ad - bc \neq 0$ より $a \neq 0$, $d \neq 0$ である。$-d/c$ と a/c が ∞ になる、と考えると分かりやすいかも。)

2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とするとき $\dfrac{az+b}{cz+d}$ を考える。

(i) $c \neq 0$ のとき、$\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ で連続で

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

(ii) $c = 0$ のとき、$\mathbb{C}$ で連続で

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

(注: $ad - bc \neq 0$ より $a \neq 0$, $d \neq 0$ である。$-d/c$ と a/c が ∞ になる、と考えると分かりやすいかも。)

念のため復習 $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{C}$ とする。

- $\displaystyle\lim_{z \to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow (\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega\colon |z-a| < \delta)\ |f(z)| > R.$
- $\displaystyle\lim_{z \to \infty} f(z) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega\colon |z| > R)\ |f(z) - A| < \varepsilon.$
  (細かい注意: Ω 内の点列 $\{z_n\}$ で $\lim |z_n| = +\infty$ となるものが存在すると仮定しておく。)

2.1 1次分数変換の定義 (2) 定義

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とする。

(i) $c \neq 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq -d/c, \infty) \\ \infty & (z = -d/c) \\ \dfrac{a}{c} & (z = \infty) \end{cases}$$

(ii) $c = 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{d} & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を **1次分数変換**と呼ぶ。

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とする。

- (i) $c \neq 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq -d/c, \infty) \\ \infty & (z = -d/c) \\ \dfrac{a}{c} & (z = \infty) \end{cases}$$

- (ii) $c = 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{d} & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を**1次分数変換**と呼ぶ。

以下、単に $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ と表す。$\varphi(-d/c) = \infty$, $\varphi(\infty) = a/c$ と約束。

2.2 1 次分数変換の性質 (1)

命題

任意の 1 次分数変換 $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は連続である。

2.2 1次分数変換の性質 (1)

命題

任意の 1 次分数変換 $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は連続である。

Proof.

我々はまだ $\widehat{\mathbb{C}}$ に位相も距離も導入していない (反則！)。しかし、任意の $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ が成り立つようにする (約束)。その約束が果たされれば連続。 $\square$

2.2 1次分数変換の性質 (2) 行列と対応させる

複素数成分の、2次の正則行列の全体 (一般線型群) を $GL(2;\mathbb{C})$ と表す。

$$GL(2;\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

2.2 1 次分数変換の性質 (2) 行列と対応させる

複素数成分の、2 次の正則行列の全体 (一般線型群) を $GL(2;\mathbb{C})$ と表す。

$$GL(2;\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{C})$ に対して、1 次分数変換 φ_A を次式で定める。

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

2.2 1次分数変換の性質 (2) 行列と対応させる

複素数成分の、2次の正則行列の全体 (一般線型群) を $GL(2;\mathbb{C})$ と表す。

$$GL(2;\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{C})$ に対して、1次分数変換 φ_A を次式で定める。

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

次が基本的である。

命題

1. $A, B \in GL(2;\mathbb{C})$ とするとき $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
2. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$\varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ ($\widehat{\mathbb{C}}$ 上の恒等写像).
3. $A \in GL(2;\mathbb{C})$ ならば $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$.

2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz + s \neq 0$, $c\varphi_B(z) + d \neq 0$ とすると

$$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d}$$

$$= \cdots \text{中略} \cdots = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z).$$

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz + s \neq 0$, $c\varphi_B(z) + d \neq 0$ とすると

$$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d}$$

$$= \cdots \text{中略} \cdots = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z).$$

ゆえに有限個の点を除いて、$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は一致する。

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz + s \neq 0$, $c\varphi_B(z) + d \neq 0$ とすると

$$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d}$$

$$= \cdots \text{中略} \cdots = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z).$$

ゆえに有限個の点を除いて、$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は一致する。
$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は $\hat{\mathbb{C}}$ で連続であるから、$\hat{\mathbb{C}}$ 全体で一致する。

2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz + s \neq 0$, $c\varphi_B(z) + d \neq 0$ とすると

$$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d}$$

$$= \cdots \text{中略} \cdots = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z).$$

ゆえに有限個の点を除いて、$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は一致する。
$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は $\hat{\mathbb{C}}$ で連続であるから、$\hat{\mathbb{C}}$ 全体で一致する。

2. $c = 0$ の場合に相当する。定義より $\varphi_I(z) = \begin{cases} z & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$. これは $\hat{\mathbb{C}}$ の恒等写像である。

3. $A \in GL(2; \widehat{\mathbb{C}})$ のとき、A^{-1} が存在して、$A^{-1} \in GL(2; \mathbb{C})$.

2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明(続き)

3. $A \in GL(2; \widehat{\mathbb{C}})$ のとき、A^{-1} が存在して、$A^{-1} \in GL(2; \mathbb{C})$.
(1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

3. $A \in GL(2;\widehat{\mathbb{C}})$ のとき、A^{-1} が存在して、$A^{-1} \in GL(2;\mathbb{C})$.
(1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.

3. $A \in GL(2;\widehat{\mathbb{C}})$ のとき、A^{-1} が存在して、$A^{-1} \in GL(2;\mathbb{C})$.
(1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$. ゆえに $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$. □

3. $A \in GL(2;\widehat{\mathbb{C}})$ のとき、A^{-1} が存在して、$A^{-1} \in GL(2;\mathbb{C})$.
(1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$. ゆえに $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$. □

系

任意の 1 次分数変換は全単射である。

(上の定理の (3) により、逆写像が存在することが分かるから。)

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

1. 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

1. 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

2. 定数倍 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

1. 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

2. 定数倍 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

$a = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると、$z \mapsto rz$ (拡大または縮小) と $z \mapsto e^{i\theta}z$ (回転) の 2 つに分解できる。

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

1. 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

2. 定数倍 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

$a = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると、$z \mapsto rz$ (拡大または縮小) と $z \mapsto e^{i\theta} z$ (回転) の 2 つに分解できる。

3. **反転**

$$R(z) := \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}.$$

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

1. 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

2. 定数倍 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

   $a = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると、$z \mapsto rz$ (拡大または縮小) と $z \mapsto e^{i\theta}z$ (回転) の 2 つに分解できる。

3. **反転**

$$R(z) := \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}.$$

以上から、平行移動、定数倍、反転が 1 次分数変換であることが分かった。

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (2)

命題

任意の１次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (2)

命題

任意の 1 次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

(どうやって証明する？)

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (2)

命題

任意の 1 次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

(どうやって証明する？)

Proof.

(a) $c \neq 0$ の場合、部分分数分解により

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = -\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c} + \frac{a}{c}.$$

$T_{d/c}$, R, $M_{-\frac{ad-bc}{c^2}}$, $T_{a/c}$ を合成したものである。

(b) $c = 0$ の場合、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

$M_{a/d}$, $T_{b/d}$ を合成したものである。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通ると考える) の総称である。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通ると考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$azz̄ + \beta\bar{z} + \overline{\beta}z + c = 0 \tag{1}$$

の形に表せるもの全体である。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通ると考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0 \tag{1}$$

の形に表せるもの全体である。

気になる人には自分で確かめてもらおう。

問　複素平面内の任意の直線は、ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a\overline{z} + \overline{a}z + \beta = 0$$

と表せる (直線の方程式)。

問　複素平面内の任意の円は、ある $c \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \leq |c|^2$ を用いて、

$$z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + \beta = 0$$

と表せる (円の方程式)。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

Proof.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

Proof.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。
定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

Proof.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。
定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。
反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ でどうなるか調べる。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

Proof.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。
定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。
反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ でどうなるか調べる。$\widehat{\mathbb{C}}$ の円の方程式 (1) に、$z = R^{-1}(w) = \frac{1}{w}$ を代入すると

$$a\frac{1}{w}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \overline{\beta}\left(\frac{1}{w}\right) + c = 0.$$

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

Proof.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。

定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。

反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ でどうなるか調べる。$\widehat{\mathbb{C}}$ の円の方程式 (1) に、$z=R^{-1}(w)=\frac{1}{w}$ を代入すると

$$a\frac{1}{w}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\overline{\beta}\left(\frac{1}{w}\right)+c=0.$$

これは次式と同値である。

$$a+\beta w+\overline{\beta}\overline{w}+cw\overline{w}=0$$

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

Proof.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。

定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。

反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ でどうなるか調べる。$\widehat{\mathbb{C}}$ の円の方程式 (1) に、$z=R^{-1}(w)=\frac{1}{w}$ を代入すると

$$a\frac{1}{w}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\overline{\beta}\left(\frac{1}{w}\right)+c=0.$$

これは次式と同値である。

$$a+\beta w+\overline{\beta}\overline{w}+cw\overline{w}=0$$

$a':=c$, $\beta':=\overline{\beta}$, $c':=a$ とおくと

$$a'w\overline{w}+\beta'\overline{w}+\overline{\beta'}w+c'=0.$$

これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を表している。実際 $|\beta'|^2-a'c'=|\beta|^2-ac\geq 0$. □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (1)

補題

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす 1 次分数変換が一意的に存在する。

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (1)

補題

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす 1 次分数変換が一意的に存在する。

証明 (存在) α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ (3 つとも有限) の場合は

$$\varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}. \tag{2}$$

$\beta = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{\alpha-\gamma}{z-\gamma}$, $\gamma = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z-\beta}{\alpha-\beta}$, $\alpha = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z-\beta}{z-\gamma}$ とすればよい。

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (1)

補題

$\alpha,\beta,\gamma\in\widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha)=1,\quad \varphi(\beta)=0,\quad \varphi(\gamma)=\infty$$

を満たす 1 次分数変換が一意的に存在する。

証明 (存在) $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{C}$ (3 つとも有限) の場合は

$$\varphi(z):=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}. \tag{2}$$

$\beta=\infty$ の場合は $\varphi(z):=\frac{\alpha-\gamma}{z-\gamma}$, $\gamma=\infty$ の場合は $\varphi(z):=\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}$, $\alpha=\infty$ の場合は $\varphi(z):=\frac{z-\beta}{z-\gamma}$ とすればよい。

注 (証明の途中だけれど) (2) は自分で書けるようにしておくべき公式である。

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (1)

補題

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす 1 次分数変換が一意的に存在する。

証明 (存在) α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ (3 つとも有限) の場合は

$$\varphi(z) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} \cdot \frac{z-\beta}{z-\gamma}. \tag{2}$$

$\beta = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{\alpha-\gamma}{z-\gamma}$, $\gamma = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z-\beta}{\alpha-\beta}$, $\alpha = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z-\beta}{z-\gamma}$ とすればよい。

注 (証明の途中だけれど) (2) は自分で書けるようにしておくべき公式である。(β が 0 で赤、γ が ∞ で青、α が 1 となるように調節するオレンジ)

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (2)

(一意性) φ_1 φ_2 が条件を満たすならば、$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ も 1 次分数変換で

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

$\varphi(\infty) = \infty$ より、ある a, b が存在して $\varphi(z) = az + b$.
$\varphi(0) = 0$ より、$b = 0$.
$\varphi(1) = 1$ より、$a = 1$.
ゆえに $\varphi(z) = z = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)$. すなわち $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.
φ_1 を右からかけて $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (3)

命題 (任意の 3 点を任意の 3 点に写せる)

$\alpha, \beta, \gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ が相異なり、$\alpha', \beta', \gamma' \in \hat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば、ある 1 次分数変換 φ が存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

Proof.

一般に α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ と表すことにすると、

$$\varphi := \varphi_{\alpha',\beta',\gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$$

とすればよい。 □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (4)

例題　1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (4)

例題 1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

(解答) 命題の証明を実行する、というイメージの解答である。

1, 2, 3 を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z) = \frac{1-3}{1-2} \cdot \frac{z-2}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}. \quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2, 3, 1 を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z) = \frac{2-1}{2-3} \cdot \frac{z-3}{z-1} = \frac{-z+3}{z-1}. \quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求める 1 次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $\varphi(z) = \dfrac{5z-13}{3z-7}$. □

余談的注意: $\mathbb{R}$ と $\pm\infty$, $\mathbb{C}$ と ∞

実数の世界の ∞ と複素数の世界の ∞ は、(ふつう) 記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは実数世界の ∞ は $+\infty$ と書く。

$I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ とする。$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ とは

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x-a| < \delta)\ f(x) > R.$$

実数の世界には、$-\infty$ もあって、これは $+\infty$ とは違うものである。
数直線で言うと、$+\infty$ は右の果て、$-\infty$ は左の果てである。
複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点 ∞ が 1 個あるだけ。

$$+\infty \neq -\infty = (-1)\cdot(+\infty),$$

$$(-1)\cdot\infty = \infty$$

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を作るように $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を作ることもできる (杉浦 [1])。

参考文献

杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), MIND からは https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセス可能である.