応用複素関数 第2回

〜 留数定理の応用 第2回 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年5月20日

1.6 級数の和
1.6.1 イントロ

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。

1.6 級数の和
1.6.1 イントロ

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、a_n がある正則関数 f に対して、$a_n = f(n)$ となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を } 1 \text{ 位の極に持ち、} \mathrm{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、$f \cdot s$ についての線積分を考える、というのが基本的なアイディアである ($\mathrm{Res}(f s; n) = f(n) \, \mathrm{Res}(s; n) = f(n)$ に注意)。

1.6 級数の和
1.6.1 イントロ

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、a_n がある正則関数 f に対して、$a_n = f(n)$ となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を 1 位の極に持ち、} \mathrm{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、$f \cdot s$ についての線積分を考える、というのが基本的なアイディアである ($\mathrm{Res}(f\,s; n) = f(n)\,\mathrm{Res}(s; n) = f(n)$ に注意)。
具体的には、s として次の関数を採用する:

$$s_2(z) := \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad (\cot \text{ 知らなくても後で説明します}).$$

1.6 級数の和

1.6.1 イントロ

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、a_n がある正則関数 f に対して、$a_n = f(n)$ となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を 1 位の極に持ち、} \mathrm{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、$f \cdot s$ についての線積分を考える、というのが基本的なアイディアである ($\mathrm{Res}(f\,s; n) = f(n)\,\mathrm{Res}(s; n) = f(n)$ に注意)。

具体的には、s として次の関数を採用する:

$$s_2(z) := \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad (\cot \text{ 知らなくても後で説明します}).$$

実はこの s_2 は色々な場面で利用される。(「応用複素関数」の中で、最低一つはそういう話を見せておきたいので、ここでやってみた。)

1.6.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この 1.6 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} \right).$$

1.6.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この 1.6 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} \right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。

1.6.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この 1.6 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1}\right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n ($n \in \mathbb{Z}$) で、位数は 1. 実際

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = n.$$

さらに $\frac{d}{dz}(\sin \pi z)\Big|_{z=n} = \pi\cos(n\pi) = (-1)^n\pi \neq 0.$

1.6.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この 1.6 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi\,\mathrm{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n ($n \in \mathbb{Z}$) で、位数は 1. 実際

  $$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = n.$$

  さらに $\left.\frac{d}{dz}(\sin \pi z)\right|_{z=n} = \pi\cos(n\pi) = (-1)^n\pi \neq 0.$
- s_1, s_2, s_3 の極は n ($n \in \mathbb{Z}$) で、その位数は 1. 留数は

  $$\mathrm{Res}\,(s_1; n) = \left.\frac{\pi}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = (-1)^n,$$

  $$\mathrm{Res}\,(s_3; n) = \mathrm{Res}\,(s_2; n) = \left.\frac{\pi\cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = 1.$$

以下の積分路 Γ_N $(N \in \mathbb{N})$ をしばしば用いる。

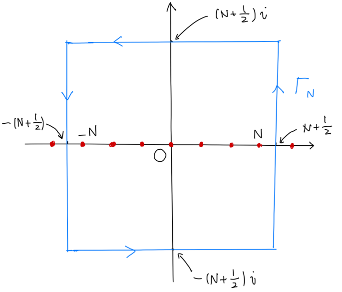


Figure: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

1.6.2 s_1, s_2, s_3 の性質 (続き)

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

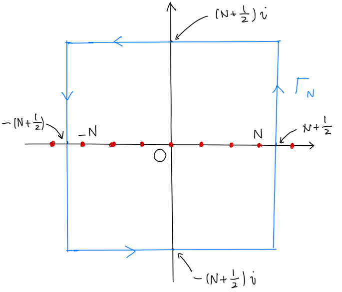


Figure: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$.

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

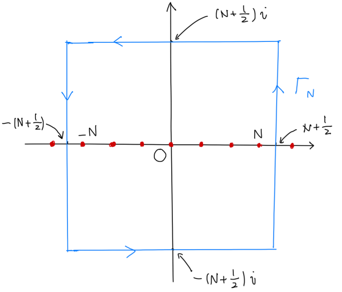


Figure: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$.
- $|s_j(z)| \le 2\pi$ ($j = 1, 2;\ z \in \Gamma_N^*$).
  (この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1]§1.3 には書いてある。)

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では sin, cos, tan の露出度が高いが、
$\overset{\text{セカント}}{\sec}$, $\overset{\text{コセカント}}{\mathrm{cosec}}$, $\overset{\text{コタンジェント}}{\cot}$ というのもある:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では sin, cos, tan の露出度が高いが、sec（セカント）, cosec（コセカント）, cot（コタンジェント）というのもある:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},\quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の Trigonometric tables 等参照)、sin, tan, sec の値が載っていた。

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では sin, cos, tan の露出度が高いが、sec (セカント), cosec (コセカント), cot (コタンジェント) というのもある:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の Trigonometric tables 等参照)、sin, tan, sec の値が載っていた。

cos(ine), cot(angent), cosec(ant) はそれぞれ余角の sin, tan, sec である:

$$\mathrm{co}\,\text{某}\,\theta = \text{某}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{(ゆえに数表はほとんど不要).}$$

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では sin, cos, tan の露出度が高いが、$\overset{\text{セカント}}{\text{sec}}$, $\overset{\text{コセカント}}{\text{cosec}}$, $\overset{\text{コタンジェント}}{\text{cot}}$ というのもある:

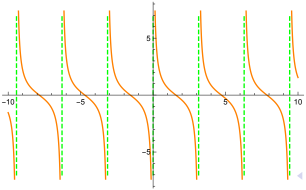
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の Trigonometric tables 等参照)、sin, tan, sec の値が載っていた。

cos(ine), cot(angent), cosec(ant) はそれぞれ余角の sin, tan, sec である:

$$\mathrm{co}\,\text{某}\,\theta = \text{某}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{(ゆえに数表はほとんど不要).}$$

$y = \cot x$ のグラフは、$\cot x = \tan(\pi/2 - x)$ に気づくとすぐ分かる。



1.6.3 和の公式とその証明

定理

$P(z),\ Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n) \neq 0$, $f = \dfrac{Q}{P}$ とするとき

$$(1)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_2; c\right),$$

$$(2)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_1; c\right),$$

$$(3)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{in\theta} = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_3(z)e^{iz\theta}; c\right) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

((3) の左辺は Fourier 級数の形をしていることに注意。)

公式 (1), (2) の証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

公式 (1), (2) の証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R\in\mathbb{R})(\exists C\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\ge R)\quad P(z)\ne 0\wedge|f(z)|\le\frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N\in\mathbb{N}$ は $N\ge R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0;R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

公式 (1), (2) の証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N \in \mathbb{N}$ は $N \geq R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0;R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z) s_j(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{Res}\,(f s_j; k) + 2\pi i \sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}\,(f s_j; c)\,.$$

公式 (1), (2) の証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R\in\mathbb{R})(\exists C\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\geq R)\quad P(z)\neq 0\wedge|f(z)|\leq\frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N\in\mathbb{N}$ は $N\geq R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0;R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=-N}^{N}\operatorname{Res}\left(fs_j;k\right)+2\pi i\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}\left(fs_j;c\right).$$

k は s_j の 1 位の極であり、f は k のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(fs_j;k)=f(k)\operatorname{Res}\left(s_j;k\right)=\begin{cases}(-1)^k f(k) & (j=1)\\ f(k) & (j=2).\end{cases}$$

公式 (1), (2) の証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \land |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N \in \mathbb{N}$ は $N \geq R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0; R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。
留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^{N} \operatorname{Res}(fs_j; k) + 2\pi i \sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_j; c).$$

k は s_j の 1 位の極であり、f は k のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(fs_j; k) = f(k) \operatorname{Res}(s_j; k) = \begin{cases} (-1)^k f(k) & (j = 1) \\ f(k) & (j = 2). \end{cases}$$

後は $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 0$ を示せば良い。$|f(z)| \leq \dfrac{C}{N^2}$ $(z \in \Gamma_N)$ であるから

$$\left|\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz\right| \leq \int_{\Gamma_N} |f(z)|\,|s_j(z)|\,|dz| \leq \frac{C}{N^2} \cdot 2\pi \int_{\Gamma_N} |dz|$$
$$= \frac{2\pi C}{N^2} \cdot 4(2N+1) \to 0 \quad (N \to \infty). \quad \square$$

1.6.4 級数の和の公式の例

$a > 0$ とするとき $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

1.6.4 級数の和の公式の例

$a > 0$ とするとき $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z) := \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ は定理の仮定の条件を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \mathrm{Res}\left(fs_2; c\right).$$

1.6.4 級数の和の公式の例

$a > 0$ とするとき $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z) := \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ は定理の仮定の条件を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(fs_2; c\right).$$

f の極 c は $c = \pm ia$ で位数は 1 であるから

$$\operatorname{Res}\left(fs_2; \pm ia\right) = s_2(\pm ia) \operatorname{Res}\left(f; \pm ia\right) = \pi(-i \coth(\pm \pi a)) \cdot \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm ia}$$
$$= -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a).$$

(ただし $\cot(iz) = -i \coth z$ を用いた。これについては次ページで説明する。)

1.6.4 級数の和の公式の例

$a > 0$ とするとき $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z) := \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ は定理の仮定の条件を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(fs_2; c\right).$$

f の極 c は $c = \pm ia$ で位数は 1 であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(fs_2; \pm ia\right) &= s_2(\pm ia) \operatorname{Res}\left(f; \pm ia\right) = \pi(-i \coth(\pm\pi a)) \cdot \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm ia} \\ &= -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a).\end{aligned}$$

(ただし $\cot(iz) = -i \coth z$ を用いた。これについては次ページで説明する。)
ゆえに

$$2S + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a} \coth\left(\pi a\right). \quad \therefore \quad S = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth(\pi a) - \frac{1}{a^2}\right). \quad \square$$

メモ: 三角関数、双曲線関数の iz での値

(必要になったとき自分で導くものだろうけれど、書いてあると安心。)
よく知られた

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}.$$

メモ: 三角関数、双曲線関数の iz での値

(必要になったとき自分で導くものだろうけれど、書いてあると安心。)
よく知られた

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}.$$

から容易に次が導ける。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z, \quad \tanh(iz) = i \tan z,$$
$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i \sinh z, \quad \tan(iz) = i \tanh z,$$
$$\coth(iz) = -i \cot z, \quad \cot(iz) = -i \coth z.$$

1.6.5 Basel問題 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

1.6.5 Basel 問題 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 $(\forall n\in\mathbb{Z})\ P(n)\neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge P(n)\neq 0} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(fs_2; c\right).$$

1.6.5 Basel 問題 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 $(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n) \neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \land P(n) \neq 0} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}(f s_2; c).$$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \land n^2 \neq 0} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}(f s_2; c) = -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}; 0\right).$$

定理の仮定 $(\forall n\in\mathbb{Z})\ P(n)\neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge P(n)\neq 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2;c).$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge n^2\neq 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2;c) = -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2};0\right).$$

ところで

$$\cot z = \frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}+\cdots \quad (0<|z|<\pi)$$

1.6.5 Basel 問題 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 $(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n) \neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \wedge P(n) \neq 0} f(n) = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \mathrm{Res}\,(f s_2; c)\,.$$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \wedge n^2 \neq 0} f(n) = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \mathrm{Res}\,(f s_2; c) = -\mathrm{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}; 0\right).$$

ところで

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots \quad (0 < |z| < \pi)$$

であるから

$$\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{z} - \frac{\pi^4}{45} z + \cdots \quad (0 < |z| < 1).$$

ゆえに $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}; 0\right) = -\dfrac{\pi^2}{3}$. ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

余談: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開

(今年度は授業時間が不足しそうなので、ここで紹介)

上で見たように、$\pi\cot(\pi z)$ の極は $n \in \mathbb{Z}$ であり、その位数は 1, 留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z-n}$ である。

余談: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開

(今年度は授業時間が不足しそうなので、ここで紹介)

上で見たように、$\pi\cot(\pi z)$ の極は $n\in\mathbb{Z}$ であり、その位数は 1, 留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z-n}$ である。

和 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-n}$ は無限和なので収束が問題になるが、もし収束するならば、$\displaystyle\pi\cot(\pi z)-\sum_{n}\frac{1}{z-n}$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則になるはずである。

余談: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開

(今年度は授業時間が不足しそうなので、ここで紹介)

上で見たように、$\pi\cot(\pi z)$ の極は $n\in\mathbb{Z}$ であり、その位数は 1, 留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z-n}$ である。

和 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-n}$ は無限和なので収束が問題になるが、もし収束するならば、$\displaystyle\pi\cot(\pi z)-\sum_{n}\frac{1}{z-n}$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則になるはずである。

$$\text{実は (ある意味で) }\pi\cot(\pi z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-n}.$$

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-n}=\lim_{N_1,N_2\to\infty}\sum_{n=-N_1}^{N_2}\frac{1}{z-n}$ は収束しないが、$N_1=N_2\to\infty$ とすると、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様収束する。

余談: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$\pi\cot(\pi z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} \quad (\text{in } \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}). \tag{4}$$

余談: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$\text{(4)} \qquad \pi\cot(\pi z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} \quad (\text{in } \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

$n\in\mathbb{Z}$ を 1 位の極に持ち、留数が 1 という関数として、(4) の右辺は考えうる最も簡単な関数であろうが、それが三角関数 $\pi\cot(\pi z)$ とぴったり一致するというのは、私にはとても不思議に感じられる。

余談: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$(4)\qquad \pi\cot(\pi z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad (\text{in } \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

$n\in\mathbb{Z}$ を 1 位の極に持ち、留数が 1 という関数として、(4) の右辺は考えうる最も簡単な関数であろうが、それが三角関数 $\pi\cot(\pi z)$ とぴったり一致するというのは、私にはとても不思議に感じられる。

細かい注意: $\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z-(-n)}=\frac{2z}{z^2-n^2}$ である。$\frac{1}{z-n}\sim-\frac{1}{n}$, $\frac{2z}{z^2-n^2}\sim-\frac{2z}{n^2}$ となり、後者は $n\to\pm\infty$ のとき速く減衰する。そのことから、(4) の右辺は、**広義一様収束**という良い性質を持つことが導ける。

余談: $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$(4)\qquad \pi\cot(\pi z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad (\text{in } \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

$n\in\mathbb{Z}$ を 1 位の極に持ち、留数が 1 という関数として、(4) の右辺は考えうる最も簡単な関数であろうが、それが三角関数 $\pi\cot(\pi z)$ とぴったり一致するというのは、私にはとても不思議に感じられる。

細かい注意: $\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z-(-n)}=\frac{2z}{z^2-n^2}$ である。$\frac{1}{z-n}\sim-\frac{1}{n}$, $\frac{2z}{z^2-n^2}\sim-\frac{2z}{n^2}$ となり、後者は $n\to\pm\infty$ のとき速く減衰する。そのことから、(4) の右辺は、**広義一様収束**という良い性質を持つことが導ける。例えば項別微分も可能で、次式が導ける。

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right).$$

収束に関する議論は、講義ノート [1] §2.4 に任せる。

余談: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。

余談: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

余談: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

この右辺は $\pi \cot(\pi z)$ に他ならないので

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin \pi z}.$$

余談: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

この右辺は $\pi \cot(\pi z)$ に他ならないので

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin \pi z}.$$

これから $f(z) = \sin \pi z$ を導くことが出来る。ゆえに

余談: Euler による sin の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

この右辺は $\pi \cot(\pi z)$ に他ならないので

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin \pi z}.$$

これから $f(z) = \sin \pi z$ を導くことが出来る。ゆえに

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

これは $\sin \pi z$ の因数分解のような式である。発見したのは Euler である。
(これも詳しくは講義ノート [1] §2.5 を見よ。)

参考文献

- 桂田 祐史, 応用複素関数, 「応用複素関数」の講義ノート (2015〜), http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/zoku-complex-function.pdf
- 一松信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979).

レポート課題A (もしかすると)

この講義は、例年ペーパーテスト向きの問題を期末試験に出題し、コンピューターを用いる実験はレポート課題 (レポート課題 1, 2, ⋯) としてきた。後者については今年度もそうするつもりであるが、前者については期末試験が実施されるかどうか現時点では分からない。

そこでもしも期末試験が実施されない場合は、その分レポート課題を追加することを検討している (実施されないと発表された場合に、締め切りや提出方法をアナウンスする)。

1「続 留数定理の応用」の範囲からは次を候補問題としておく。

レポート課題 A (候補) 次のいずれかについてレポートせよ。

(a) 本日の定理の (3) の公式の証明をせよ。s_3 の評価も含めて詳しく書くこと (講義ノートや、一松 [2] が参考になるが、細部までは書かれていない)。

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \log(\sin\theta)d\theta$ の値を複素積分を利用して求めよ。

(b) は講義の話とは直接関係ないが、関数論のテキストでしばしば解説される有名な問題である。