応用複素関数 第 1 回

〜 ガイダンス, 留数定理の応用 第 1 回 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020 年 5 月 13 日

ガイダンス (1) 講義内容

(複素関数・同演習の履修を前提とするので、自己紹介はカットします。)

- 内容は二本立て。複素関数論の基礎 (「複素関数」の続き) と、応用トピックの紹介
- 複素関数論の基礎的事項 (テキストに載っていること多い)
  - 留数定理の応用 続き (定積分、無限級数の和の計算)
  - 無限遠点 ∞ の導入, リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1 次分数変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$
  - 等角写像, Riemann の写像定理, ポテンシャル問題
  - 解析接続 (時間なくなりそうな予感がする…)

  (試験向きの話もあるが今年度は… 「常識として聴いておけ」というものも)
- 応用トピックの紹介
  - 流体力学への応用 (2 次元ポテンシャル流など)
  - 数値積分公式の誤差解析, 特に台形公式の最適性と二重指数関数型積分公式
  - ポテンシャル問題の数値解法
  - 佐藤超関数

  (コンピューターを使う場面が多い。レポート課題を出す。)
- これらの項目は、完全に独立しているわけでなく、色々関係がある。

ガイダンス (2) どんなふうに授業するか

(正直、オンライン授業は手探りです…慎重にスタートするつもりです。)

- 複素関数論の基礎については、オンデマンド講義で行ける、と考えています。大学側からは、1 回の授業に、10 分程度の動画を 5 本くらい提供するのが目安と言われています (板書必要ないし、割と妥当そうです)。僕は詰め込む性質なので、トータル 60 分強になるかもしれません。100 分との差は、こちらが提示した資料から重要なところを書き抜いたり、用意された練習問題を解くと良いと思います。
- コンピューター実習を伴うところは、対面指導できないけれど、オンデマンド授業+Zoom での対応で出来ないかな、と考えていますが…学生が自分の Mac でどうなっているかを、こちらに Zoom の画面共有を使って見せることが出来るかどうか問題です。受講者数とか、ネットの混み具合とか、不確定要素が多いので、現時点で確実なことは言えません (ちょっと不安…でもやってみる)。

ガイダンス (3) 成績評価、質問

- 現時点で期末試験が通常の形態でできるかどうか分かりません。何かうまいやり方があるかどうか (世界中で考えてるだろうけれど、良いアイディアは聞いたことがない)。多分ペーパーテストという枠を超えて成績評価すべきなのでしょう。結局は安直に「全てレポートで評価」としそうです。
- 例年「気軽に質問にして」と言うことにしてますが…

  試しに授業時間後半 (水曜 18:00〜18:50) に Zoom 会議を開いてみます。質問をするために、ある程度、Zoom に慣れる必要がありますね。(ゼミで使うはずだから大丈夫かな？)

まず軽く留数定理と、極における留数の計算法を復習する。それから、

- 有名な $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ の説明 (「複素関数」で説明しそびれた (る) ので。)
  (積分路上に 1 位の極があるとき、どうなるかは学ぶに価する。)
- 無限和 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ の計算の話も知っておくと良い。
  (登場する $\displaystyle \pi\,\mathrm{cosec}\,\pi z=\frac{\pi}{\sin\pi z}$, $\displaystyle \pi\cot\pi z=\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}$ が意外と人気者)
- 有限区間の積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の計算への、留数定理の応用は、後の数値積分公式の誤差解析や、佐藤超関数に通じるところがある。— これは時間がなければカットするかも (後になってから話しても良いので)。

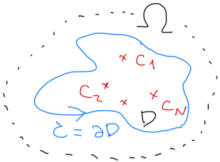
1.1 留数定理と極における留数の計算 (1)

この 1.1 は復習なので、超特急で進めます。使いそうなものを列挙しました。(うろ覚えならば「複素関数」復習してください。)

命題 (留数定理)

D は $\mathbb{C}$ 内の有界領域で、その境界 ∂D は区分的 C^1 級正則単純閉曲線とする (向きはいわゆる正の向きとする)。また $c_1, c_2, \cdots, c_N$ は D 内の相異なる点であり、Ω は $\overline{D} \subset \Omega$ を満たす $\mathbb{C}$ の開集合、
$f\colon \Omega \setminus \{c_1, c_2, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき、

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}\left(f; c_j\right).$$



1.1 留数定理と極における留数の計算 (2)

留数を求める方法はケース・バイ・ケースであるが、極の場合は少し一般的な話ができる (知っておくべき)。

命題 (極の留数)

$k \in \mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f;c) = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

(次の定理は、この定理に含まれているが、念のため書いておく。)

命題 (1 位の極の留数)

c が f の高々 1 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f;c) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z). \tag{1}$$

1.1 留数定理と極における留数の計算 (3)

(lim 求めるより、微分を計算する方が簡単なこともある、ということで次も良く使う。)

命題 (有理関数の分母の 1 位の零点における留数)

$f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、c は $P(z)$ の 1 位の零点 ($P(c) = 0$ かつ $P'(c) \neq 0$ ということ) ならば、c は f の高々 1 位の極で

$$\operatorname{Res}(f; c) = \frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{2}$$

1.1 留数定理と極における留数の計算 (4)

次の命題は「複素関数」ではやや軽めの扱いだった。後の例では

$$\varphi(z) = \log z, \quad \varphi(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z, \quad \varphi(z) = \pi \cot \pi z$$

として利用することが多い。

命題 (1 位の極を持つ関数と正則関数の積の留数)

c は f の 1 位の極であり、φ は c の近傍で正則とする。このとき

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \varphi(c) \operatorname{Res}(f; c).$$

Proof.

(念のため略証だけでも)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f\varphi; c) &= \lim_{z\to c}(z-c)(f(z)\varphi(z)) = \left(\lim_{z\to c}(z-c)f(z)\right)\lim_{z\to c}\varphi(z) \\ &= \operatorname{Res}(f;c)\varphi(c). \end{aligned}$$

□

1.2 定積分計算への留数の応用 (1) 復習

z の複素係数多項式全体を $\mathbb{C}[z]$ で表す。多項式の次数を deg で表す。

命題 (有理関数の実軸上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0} \mathrm{Res}\,(f; c)\,.$$

命題 (有理関数の Fourier 変換)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $a > 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0} \mathrm{Res}\,\left(f(z)e^{iaz}; c\right)\,.$$

1.2 定積分計算への留数の応用 (2) その他

上の定理 (「複素関数」で学んだ) 以外にも色々ある。

簡単のため、f は有理関数とする。次のような定積分についても、留数定理を応用した計算法がある (どちらも対数関数がらみ)。

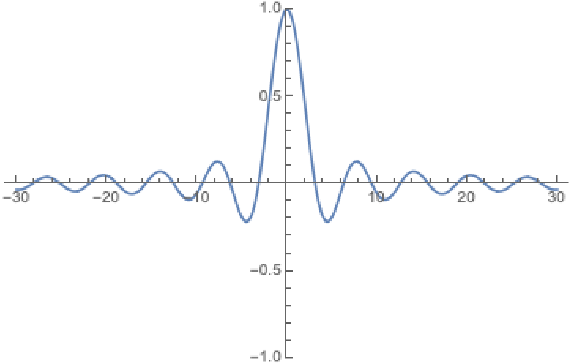
- $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ に対して、$\displaystyle\int_0^\infty f(x)(\log x)^n dx$
- $0 < \alpha < 1$ に対して、$\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$ (Mellin 変換)

次のテキストは、コンパクトだが、面白い例がたくさん載っている。

一松 信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 *(1979)*.

(こういうのが好きな人もいるだろうから、授業で紹介しなかった方法を使う例を詳しく説明しなさい、という課題はあるかな。)

$\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ



$\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ $(x \to \pm\infty$ で減衰していく$)$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ はどうなる？}$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0, R \to +\infty} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \text{ と考えるべき??}$$

1.3 Dirichlet 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (難しさを語る)

とても有名な定積分である。

被積分関数は、Fourier 解析を勉強した人にはおなじみの sinc である。

分母が x であり、積分区間の端で 0 になるので、その意味でも広義積分である。$x \to 0$ のとき $\frac{\sin x}{x} \to 1$ であるので (複素関数論的にも 0 は $\frac{\sin z}{z}$ の除去可能特異点である)、$x = 0$ で連続とみなせる。ゆえに広義積分が収束 (存在) することが分かる。—— これは認めよう (比較的簡単)。

ところが $\frac{\sin z}{z}$ は複素関数としては、絶対値が非常に大きくなることもあり、これを使って積分の値を求めるのは難しい。

「複素関数」でも時々出て来た $\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix}$ という関係を使おう。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{Im}\,\frac{e^{ix}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx.$$

さっき出て来た定理が使える？

そのままでは使えない! $\dfrac{e^{ix}}{x}$ は $x = 0$ でマズい状態 (分母 0, 分子 $\neq 0$)。この広義積分は収束しない。

($P(x) = x$ が、さっきの定理の条件「$(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$」を満たさない。)

1.4 主値積分 (1) 紹介

実軸上の区間 $[a,b]$ で連続な関数 f, $c \in (a,b)$ に対して、広義積分

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}dx = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{f(x)}{x-c}dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{f(x)}{x-c}dx\right)$$

は一般には存在しない ($f(c) \neq 0$ であれば発散する)。

しかし ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ という制限をつけての極限)

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-c}dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c}dx\right)$$

は存在することがある。このとき、この極限値を

$$\mathrm{p.v.}\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}dx$$

と表し、**Cauchy の主値積分** (the Cauchy principal value) と呼ぶ。

一般の場合の定義は書かない。特異点を避ける「穴」を (右と左で同じになるよう) 対称性があるように取るのが要点である。

1.4 主値積分 (2) 例 広義積分は発散、主値積分は存在

Example (広義積分は発散するが、主値積分は存在する)

$a < 0 < b$ とするとき、$I_1 := \int_a^b \frac{dx}{x}$ は発散するが、

$$I_2 := \mathrm{p.v.} \int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{|a|}.$$

実際、

$$\int_a^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x} = [\log|x|]_a^{-\varepsilon_1} + [\log|x|]_{\varepsilon_2}^b$$
$$= \log\varepsilon_1 - \log|a| + \log b - \log\varepsilon_2 = \log\frac{b}{|a|} + \log\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

であるから、$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to +0$ としても収束しないが、$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ として $\varepsilon \to +0$ とすれば $\log\frac{b}{|a|}$ に収束する。ゆえに I_1 は収束せず、$I_2 = \log\frac{b}{|a|}$.

1.4 主値積分 (3) 実軸上に 1 位の極がある場合

定理 (実軸上に 1 位の極がある場合の定積分の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, P は $\mathbb{R}$ 上で高々*1* 位の零点しか持たないとする。

1. $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ のとき

$$\mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}(f; c) + \pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c=0} \mathrm{Res}(f; c).$$

2. $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ のとき、任意の $a > 0$ に対して

$$\mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}; c) + \pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c=0} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

(実軸上の孤立特異点 ($\mathrm{Im}\, c = 0$ を満たす c) の留数は半分だけ加えれば良い。)

1.4 主値積分 (4) 状況の図による説明

これまで: $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$

今回: $P(c) = 0$, $P'(c) \neq 0$, $\mathrm{Im}\, c = 0$ を満たす c が存在しうる

定理1 (1) の証明の概略 (part 1)

f の極のうち、実軸上にあるものを $c_1 < c_2 < \cdots < c_N$ とする。

$\overline{D}(c_j; \varepsilon)$ に c_j 以外の極が含まれないように $\varepsilon > 0$ を十分小さく取る。

R を十分大きく取り、f のすべての極が $|z| < R$ の中にあり、$-R < c_1 - \varepsilon$, $c_N + \varepsilon < R$ を満たすとする。

半円弧 $C_{\varepsilon,j}$ $(j = 1, \cdots, N)$ を

$$-C_{\varepsilon,j} : z = c_j + \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

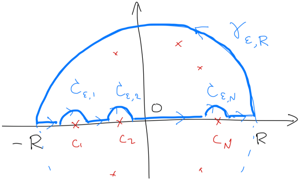
で定め (ふつうと逆向き, 時計回り)、

$$\Gamma_{\varepsilon,R} := [-R, c_1 - \varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} (C_{\varepsilon,j} + [c_j + \varepsilon, c_{j+1} - \varepsilon]) + [c_N + \varepsilon, R],$$

$$C_R : z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\gamma_{\varepsilon,R} := \Gamma_{\varepsilon,R} + C_R$$

により閉曲線 $\gamma_{\varepsilon,R}$ を定める。



定理 1 (1) の証明の概略 (part 2)

留数定理により、

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)\,dx\right) + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \\
&\quad + \int_{C_R} f(z)\,dz \\
&= \left(\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \sum_{j=1}^{N}\int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)dx\right) + \sum_{j=1}^{N}\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{C_R} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

定理 1 (1) の証明の概略 (part 3)　じっくり考えよう

$\varepsilon \to +0$ のとき、右辺第 1 項は

$$\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \to \text{p.v.} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

右辺第 2 項について考える。f の c_j における Laurent 展開の主部は $\dfrac{\mathrm{Res}(f;c_j)}{z-c_j}$ である。

g_j を、$g_j(z) := f(z) - \dfrac{\mathrm{Res}(f;c_j)}{z-c_j}$ で定めると、

$$\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz = \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{\mathrm{Res}(f;c_j)}{z-c_j}\,dz + \int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z)\,dz,$$

$$\int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{\mathrm{Res}(f;c_j)}{z-c_j}\,dz = -\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Res}(f;c_j)}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -\pi i \,\mathrm{Res}(f;c_j).$$

g_j は c_j の十分小さな近傍で正則であるから、$\varepsilon \to +0$ とするとき

$$\int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z)\,dz \to 0.$$

ゆえに $\varepsilon \to +0$ のとき　$\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz \to -\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j).$

定理 1(1) の証明の概略 (part 4)

ゆえに

$$\mathrm{p.v.}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx - \pi i\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;c_j) + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}(f;c)$$

$R \to +\infty$ のとき、左辺第 3 項は 0 に収束する。ゆえに

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}(f;c) + \pi i\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;c_j). \qquad \square$$

(「この証明を細部まできちんと書け」というのは良い課題になるかも。)

1.5 Dirichlet 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ (解決)

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

これは普通の広義積分として収束し、主値積分とも一致する。

$$I=\frac{1}{2}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{Im}\,\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right)$$

定理 1 (2) を用いて主値積分を計算すると

$$I=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z};0\right)\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(z)'}\right|_{z=0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Im}\left(\pi i\cdot e^{i0}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(**注意**　「複素関数」の教科書 (神保 [1]) では、この定積分は主値積分という言葉は使わずに説明してあるが、実際にやっている議論は上と同じである。主値積分は色々なところで顔を出すので、それを紹介するような説明をしてみた。)

本日のまとめ

- この講義科目のガイダンスを行った。
- 1 続 留数定理の応用のイントロ
- 1.1, 1.2 「複素関数」の復習
- 題材として $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ を選択
    - 主値積分の紹介
    - 実軸上に 1 位の極を持つ有理関数 f に対して、(主値) 積分 $\displaystyle \mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\displaystyle \mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx$ を留数で計算する方法の紹介

反省 (授業では説明しないかも)

今回は、以下の命題の証明はスルーしてしまった[1]。自力で解いた人がいたら、レポート受け付けます。

(a) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ が収束する。つまり $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は広義積分可能である。

(b) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散する (広義積分は絶対収束しない、$[0,\infty)$ で $\dfrac{\sin x}{x}$ は Lebesgue 可積分でない)。

(c) $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ は連続で、$c\in(a,b)$, $f(c)\neq 0$ とするとき、

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{f(x)}{x-c}\,dx+\int_{c+\varepsilon_2}^b\frac{f(x)}{x-c}\,dx\right)$$

は収束しない。つまり $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}dx$ は広義積分可能でない。

[1] この科目の目的は、複素関数の性質について述べることである。複素関数論の要素が含まれないものの、収束・発散については、授業中に必ずしも全部証明しようとは考えていない (本来は他の講義でやるべきこと)。

参考文献

- 神保道夫, 複素関数入門, 岩波書店 (2003) — 「複素関数」の教科書.
- 一松信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979).