

応用複素関数レポート課題2

桂田 祐史

2019年6月10日

- 「課題2Bを用意するかもしれない」と言いましたが、やめました。以下の2Aのみです。
- 必ずしもこの課題2を解かなくても良い(他にも課題を出して、全部で2つの課題のレポートを提出すれば良い)。
- 締め切りは7月13日(土曜)です(Oh-o! Meiji では7/14 0:00としています)。
- 提出方法は Oh-o! Meiji.
もし容量制限に引っかかった場合は、早目にメール(アドレスは katurada あつとまーく meiji.ac.jp)で相談して下さい。
- 使用するプログラミング言語は、自分の MacBook で実行して見せることが可能なものであればなんでも可。
(本課題は、FreeFem++ によるサンプル・プログラムを提供しているので、FreeFem++ を採用するのが簡単と思うけれど。)
- プログラムとその実行結果、実行するための情報を含めること。

課題2A

2次元渦無し非圧縮流の定常流で、流体の占める領域 Ω と、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ での流速の法線成分 $v_n := \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ が分かっている場合に、速度ポテンシャル ϕ 、流れ関数 ψ を計算して、等ポテンシャル線、流線、速度場を可視化せよ。領域 Ω と境界値(流速の法線成分) v_n は、自分で興味のあるもの、自分の都合の良いものを選んで良い(後の注意を読んでおくこと)。

ϕ は、ポテンシャル問題

$$(1) \quad \Delta \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$
$$(2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = v_n \quad (\text{on } \Gamma)$$

の解である。

ポテンシャル問題 (1), (2) を解いて、等ポテンシャル線と速度場 \mathbf{v} を求めるサンプル・プログラム potential2d-v0.edp を公開してある。

ターミナルで次のようにして入手する

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
```

大筋は、 Ω と v_n を自分が決めたものにするようにプログラムを書き換えれば良い。(弱形式は変更する必要がない。)

流線の書き方には色々なやり方がある(一つくらいノーヒントの問を入れておくことにする)。選んだ問題によっては、分かりやすい図が描けるように調整が必要な場合もある。

注意

- (1) $v_n := \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ は $\int_{\Gamma} v_n d\sigma = 0$ を満たしている必要がある。実際、Gauss の発散定理と非圧縮性の仮定から

$$\int_{\Gamma} v_n d\sigma = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 d\mathbf{x} = 0.$$

サンプルプログラムでは、円盤領域 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, 一様流 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であったので、

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y$$

としてある。 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから、当然 $\int_{\Gamma} v_n d\sigma = 0$ も成り立つ。

- (2) 湧き出しや吸い込み、点渦など、特異点が Ω 内にあるような問題は、この方法では解くことが出来ない。

potential2d-v0.edp¹

```
1 // potential2d-v0.edp
2 // http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
3 // 2次元非圧縮ポテンシャル流
4 // 速度ポテンシャル, 速度を求め、等ポテンシャル線, 速度場を描く
5
6 border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
7 int m=40;
8 mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
9 plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
10
11 fespace Vh(Th,P1);
12 Vh phi, v, v1, v2;
13 func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で, V=(1,2) のとき V・n=x+2y
14
15 // 速度ポテンシャルφを求め、その等高線(等ポテンシャル線)を描く
16 solve Laplace(phi,v) =
17   int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v))
18   -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
19 plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
20
21 // ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く (ちょっと雑なやり方)
22 v1=dx(phi);
23 v2=dy(phi);
24 plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);
25
26 // 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
27 plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

- 6行目で領域 Ω の境界 Γ を指定している。
- 8行目で、 Γ を m 分割して、 Γ の囲む範囲を三角形分割して、それを `mesh` 型の変数 `Th` に代入している。
- 11行目、有限要素空間 V_h を区分的1次関数の空間と定義している。この辺についてはこの講義では説明を省略する(知りたい人は有限要素法のテキストを読んで下さい)。
- 12行目、 ϕ と試験関数 v , 流速ベクトル場 \mathbf{v} の成分 v_1, v_2 を、 V_h の要素とする。
- 16~18行目、弱形式の定義。ここを修正する必要性は低い。