応用複素関数レポート課題3

桂田 祐史

2018年7月2日

- 締め切りは7月21日 (土曜) です。
  この課題は容量制限にはひっかからないと思うけれど、もしそうなったら、早目にメール (`katurada` あっとまーく `meiji.ac.jp`) で相談して下さい。
- 使用するプログラミング言語の選択は自由。
- (特に理由がない限り) プログラムとその実行結果、実行するための情報を含めること。
- 実行結果は、数表・グラフを適切に選択して分かりやすく提示すること。
  - 誤差などは固定小数点形式 (C 言語の `%f`) よりは指数形式 (C 言語の `%e`) を使う、むやみに多くの桁を表示しない、あるいは表よりはグラフ (対数目盛りが適当な場合が多い) を使う。
    グラフに Excel を使う人が多いけれど、可能ならば gnuplot を使って下さい。
  - 反対に必要があれば (意味があるならば) 多くの桁数を表示させる (%$m.n$f などを使う)。

課題3

次の (1)〜(5) からいずれか1つ選んでレポートせよ。

(1) 計算が困難であると予想される定積分を自分で選び、数値積分で値を求める。

(2) Euler のガンマ定数 γ は、普通 $\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$ で定義されるが、この式で γ の値を計算するのは難しい。

$$\gamma = -\int_0^1 \log\log\frac{1}{x}\,dx \tag{1}$$

が成り立つことが知られている。この右辺を数値積分することで γ の近似値を求めよ。(被積分関数 $f(x) = -\log\log\frac{1}{x}$ がどういう関数か調べて、注意して計算すること。) 結果を何らかの方法でチェックすること。(1) がなぜ成り立つか調べることが望ましい。

(3) ガンマ関数 $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ $(x > 0)$ を数値積分することにより計算するプログラムを作り、どういう範囲の x に対して、どの程度の精度が得られるか、調べよ。被積分関数 $e^{-t}t^{x-1}$ がどのような関数か、理解した上で取り組むこと。

(注) よく知られている関数等式 $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ を利用すると、どこか都合の良い幅1の区間に属する x に対して数値積分で $\Gamma(x)$ を求めれば良いことになる。

(4) $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ に対する数値積分公式では、f の値のみ用い、f の導関数の値は使わないのが普通であるが、f' の値を使って良いならば、**補正台形公式**と呼ばれる

$$T_{N,\,\text{補}} := T_N - \frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right)$$

がある。台形公式 T_N と比べて、$T_{N,\,\text{補}}$ では精度がどれくらい改善されるか、適当な被積分関数を選んで実験して調べよ。中点公式 M_N はどう補正すれば良いか。

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ に対しては、変数変換 $x = \varphi_2(t) := \sinh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)$ を用いた DE 公式が非常に有効である (講義で紹介するつもり)。ところが、$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ (値は π/e) は、同じやり方では十分な精度が出ない。被積分関数が無限個の零点を持っていることがその原因となるが、そういう場合に有効な方法を大浦拓哉氏が発見した (1989 年)。これについてレポートせよ (論文は比較的簡単に探せる)。(i) どのように計算するか、(ii) どういう被積分関数に対して有効か、(iii) この方法が有効なのはなぜか、以上 3 点を説明し、実際に数値計算して確認せよ。

参考: 大浦氏自身の作成した DE 公式のプログラムが、`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/index-j.html` で公開されている (`intde2.c`)。「この論文はどうすれば手に入るか？」という質問はいつでも受け付ける (メール下さい)。

おまけ

過去の授業では、次のような問題も出していた。現在は配布しているサンプル・プログラムの中に含めてある (`example6kai.c`)。

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を精度よく計算せよ (素朴に DE 公式のプログラムを書くと、8 桁程度の精度しかなかった)。