# 応用複素関数レポート課題2

桂田 祐史

2018年6月18日

- 締め切りは7月7日(土曜)です。
- 提出方法は Oh-o! Meiji.
  もし容量制限に引っかかった場合は、早目にメール(アドレスは `katurada` あっとまーく `meiji.ac.jp`)で相談して下さい。
- 使用するプログラミング言語の選択は原則自由としたいところですが、自分の MacBook で実行して見せることが可能なものにして下さい。(本課題は、FreeFem++ によるサンプル・プログラムを提供しているので、FreeFem++ を採用するのが簡単であろうが、それ以外のものを用いても良い。)
- (特に理由がない限り) プログラムとその実行結果、実行するための情報を含めること。

## 課題2 (もしかすると二つ出して、選択問題にするかも)

2次元渦無し非圧縮流の定常流で、流体の占める領域 $\Omega$ と、その境界 $\Gamma=\partial\Omega$ での流速の法線成分 $v_n := \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ が分かっている場合に、速度ポテンシャル $\phi$、流れ関数 $\psi$ を計算して、等ポテンシャル線、流線、速度場を可視化せよ。領域 $\Omega$ と境界値(流速の法線成分) $v_n$ は、自分で興味のあるもの、自分の都合の良いものを選んで良い(後の注意を読んでおくこと)。

$\phi$ は、ポテンシャル問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} = v_n \quad (\text{on } \Gamma) \tag{2}$$

の解である。

ポテンシャル問題 (1), (2) を解いて、等ポテンシャル線と速度場 $\boldsymbol{v}$ を求めるサンプル・プログラム `potential2d-v0.edp` を公開してある。

ターミナルで次のようにして入手する

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
```

大筋は、$\Omega$ と $v_n$ を自分が決めたものにするようにプログラムを書き換えれば良い。(弱形式は変更する必要がない。)

流線の書き方には色々なやり方がある(一つくらいノーヒントの問を入れておくことにする)。選んだ問題によっては、分かりやすい図が描けるように調整が必要な場合もある。

## 注意

(1) $v_n := \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ は $\displaystyle\int_\Gamma v_n\,d\sigma = 0$ を満たしている必要がある。実際、Gauss の発散定理と非圧縮性の仮定から

$$\int_\Gamma v_n\,d\sigma = \int_\Gamma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega 0\,d\boldsymbol{x} = 0.$$

サンプルプログラムでは、円盤領域 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$, 一様流 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ であったので、

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x+2y$$

としてある。$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ であるから、当然 $\displaystyle\int_\Gamma v_n\,d\sigma = 0$ も成り立つ。

(2) 湧き出しや吸い込み、点渦などの特異点が $\Omega$ 内にあるような問題は、この方法では解くことが出来ない。

potential2d-v0.edp[1]

```
 1 // potential2d-v0.edp
 2 //   http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
 3 //   ２次元非圧縮ポテンシャル流
 4 //      速度ポテンシャル，速度を求め、等ポテンシャル線，速度場を描く
 5
 6 border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
 7 int m=40;
 8 mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
 9 plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
10
11 fespace Vh(Th,P1);
12 Vh phi, v, v1, v2;
13 func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で，V=(1,2) のとき V・n=x+2y
14
15 // 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
16 solve Laplace(phi,v) =
17   int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v))
18   -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
19 plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
20
21 // ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く (ちょっと雑なやり方)
22 v1=dx(phi);
23 v2=dy(phi);
24 plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);
25
26 // 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
27 plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

- 6 行目で領域 $\Omega$ の境界 $\Gamma$ を指定している。
- 8 行目で、$\Gamma$ を $m$ 分割して、$\Gamma$ の囲む範囲を三角形分割して、それを Th に代入している。
- 11 行目、有限要素空間 $V_h$ を区分的 1 次関数の空間と定義している。この辺についてはこの講義では説明を省略する (知りたい人は有限要素法のテキストを読んで下さい)。
- 12 行目、$\phi$ と対応する試験関数 $v$ を Vh の要素とする。
- 16〜18 行目、弱形式の定義。ここを修正する必要が生じる可能性は低い。