2017 年度 応用複素関数 期末試験問題

2017 年 7 月 26 日 (水曜)4 限 15:00〜16:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1〜9 (配点はどれも同じ) から 4 問選択して解答せよ。

1. (1) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $P(x) \neq 0$ $(x \in [0,\infty))$ とするとき、定積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ の値を求めるために使える次の公式を講義で紹介した。

$$(\sharp) \qquad \int_0^\infty f(x)\,dx = -\sum_{c \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

ただし、log の値は虚部が $(0, 2\pi)$ の範囲にあるように定める。これについて、次の (a), (b) のいずれかに解答せよ。(a) 公式 $(\sharp)$ を証明せよ。 (b) 公式 $(\sharp)$ の実例を計算せよ。ただし関数 $f(\neq 0)$ は計算しやすいものを選んで良い。

2. (1) $s(z) := \pi \cot \pi z$ のすべての孤立特異点と留数を求めよ。 (2) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $P(n) \neq 0$ $(n \in \mathbb{Z})$ とするとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ の和を求めるために使える次の公式を講義で紹介した。

$$(\flat) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s(z); c\right)$$

次の (a), (b) のいずれかに解答せよ。(a) $(\flat)$ を証明せよ。 (b) $(\flat)$ の実例を 1 つ示せ。関数 $f(\neq 0)$ は計算しやすいものを選んで良い。

3. $\zeta(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ は、$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ で正則な関数 ζ を定めることを証明せよ (ただし $n^z = \exp(z \operatorname{Log} n)$ とする)。また $\zeta'(z)$ を求めよ (級数の形で表せば良い)。

4. (1) (一般の) 無限積の収束の定義を述べよ。(2) 無限積 $\pi z \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ は、任意の正の実数 R に対して、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ で一様収束することを示し、その極限を求めよ。ただし、$\pi \cot \pi z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ であることは用いて良い。

5. 流体の流れについて以下の問いに答えよ。

(1) 次の各用語を説明せよ。(a) 物質微分 (Lagrange 微分)　(b) 応力　(c) 応力テンソル

(2) 流体の運動方程式が $\rho \dfrac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \operatorname{div} P$ の形であることを講義で紹介した。ρ, $\boldsymbol{v}$, P が何であるか説明し、適当な仮定のもとでこの方程式を導出せよ。

6. 底なし沼にはまっている人をどうやって助け出すか考察せよ。(ロープ等も持っていないし、手近な場所に長い木の枝などは落ちていないとする)。

7. 2 次元非圧縮渦なしの流れがあり、流体内のある単連結領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上で、流速 $\boldsymbol{v}$ が分かっているとする。

(1) 領域の境界上の点における外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$, 境界曲線の線要素を $d\sigma$ とするとき、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0$ が成り立つことを示し、その物理的意味を説明せよ。

(2) $\boldsymbol{v}$ の速度ポテンシャルは、あるポテンシャル問題の解となる。それを説明せよ。

(3) 流れ関数とは何か、定義を述べよ。それはどのようにして求められるか説明せよ。

8. (1) Poisson 方程式の境界値問題 (記号は講義で説明したもの)

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega), \qquad u = g_1 \quad (\text{on } \mathit{\Gamma}_1), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \mathit{\Gamma}_2)$$

に対する弱形式を求めよ。(式を書くだけでなく、導出すること。)　(2) Dirichlet の原理について説明せよ。

9. $\mathbb{C}$ 内の実軸上の有界閉区間 $[a,b]$ を含む開集合 D で正則な任意の関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ に対し、定積分 $I(f) := \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を、積分公式 $I_n(f) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k) A_k$ $(x_k \in [a,b],\ A_k \in \mathbb{C})$ で近似計算する場合について考える。

$[a,b]$ を正の向きに一周する、D 内の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、

$$(\sharp) \qquad I(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Psi(z) f(z)\,dz, \quad I_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Psi_n(z) f(z)\,dz$$

が成り立つような正則関数 Ψ, Ψ_n を求めよ。

(書きかけでごめんなさい。)

1. ここの log は Log ではない。

$$I=-\sum_{c=e^{\pi i/3},e^{\pi i},e^{5\pi i/3}}\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right).$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right)=\left.\frac{\log z}{(z^3+1)'}\right|_{z=c}=-\left.\frac{z\log z}{3}\right|_{z=c}.$$

$$I=\frac{1}{3}\left(\left.z\operatorname{Log}z\right|_{z=e^{\pi i/3}}+\left.z\operatorname{Log}z\right|_{z=e^{\pi i}}+\left.z\operatorname{Log}z\right|_{z=e^{5\pi i/3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

$$\log\left(e^{5\pi i/3}\right)=\log\left|e^{5\pi i/3}\right|+i\frac{3\pi}{5}$$

とか、ちゃんと説明できるのかな？

2. (1) が解けない人が多くて、ちょっとメゲタ。

(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ のときの $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}&=-\left(\operatorname{Res}(f;i)\,s(i)+\operatorname{Res}(f;-i)s(-i)\right)=-\left(-\frac{i}{2}\cdot\pi\cot(i\pi)+\frac{i}{2}\cdot\pi\cot(-i\pi)\right)\\&=\pi i\cot(i\pi)=\pi\coth\pi.\end{aligned}$$

$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ ならば、$S=\frac{1}{2}(\coth\pi-1)$.

3. Weierstrass の M-test なんだけど、正確に出来た人はいなかった。ニアミス解答は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^z}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\infty$$

というもので、

$$\left|\frac{1}{n^z}\right|\le\frac{1}{n^\alpha},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\infty$$

と分けないといけない。それから微分は項別微分できるということだけど、n^z というのはベキ関数でなくて、指数関数だからね。

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{n^z}=\frac{-(n^z)'}{(n^z)^2}=-\frac{n^z\operatorname{Log}n}{(n^z)^2}=-\frac{\operatorname{Log}n}{n^z}.$$

5. (1)(a) $\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+v\nabla$ と書く人が多かったけれど、$\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ と書いて欲しい。成分を使うと

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}v_j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

ということ。

(2) を連続の方程式 ($\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0$) と勘違いした人が多い。こちらは運動方程式なんだけど…

7. (1) Gauss の発散定理と、非圧縮性の仮定 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$) によって

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\int_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\int_{\Omega}0\,d\boldsymbol{x}=0.$$

$\partial\Omega$ をよぎって Ω 内に流入・流出する流体の体積の総和が 0 ということを意味する (質量保存の話ではない。非常に近いけれど。ρ は出て来ない。)。