2016 年度 応用複素関数 期末試験問題

2016 年 7 月 27 日 (水曜)5 限 16:00〜17:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1 は必修問題であり、必ず解答すること。それ以外の **2**〜**8** (配点はどれも同じ) から 2 問選択して解答せよ。

1.　数値積分の DE 公式について説明せよ (目的、公式、公式がどのように導かれたか、他の数値積分公式との比較、特徴、プログラムの書き方などを書くこと)。

2.　$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $P(x) \neq 0$ $(x \in [0,\infty))$ とするとき、$I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ を留数を用いて計算する公式を求めよ (単に公式を書くだけでなく、証明すること)。

3.　$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $P(n) \neq 0$ $(n \in \mathbb{Z})$, $s(z) = \dfrac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s(z); c\right)$ が成り立つことを示せ。ただし、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$z \in \mathbb{C}$ が $|\operatorname{Im} z| = N + 1/2$ または $|\operatorname{Re} z| = N + 1/2$ を満たすならば $|s(z)| \leq 2\pi$ であることは証明せずに用いて良い。

4.　次のうちいずれか一方を選んで解け。(1) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ を求めよ。　(2) $S = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ。

5.　複素平面内の実軸上の有界閉区間 $[a,b]$ を含む開集合 D で正則な関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ に対し、$[a,b]$ 上の定積分 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を、積分公式 $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k) A_k$ (x_k, A_k については、授業で説明した仮定を満たすとする) で計算する場合の誤差解析について、以下の問に答えよ。

適当な閉曲線 C、適当な関数 Φ と Λ_n に対して、

$$(\sharp)\qquad I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi(z) f(z)\,dz, \quad I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Lambda_n(z) f(z)\,dz$$

が成り立つことを授業で紹介した。C, Φ, Λ_n はどのようなものか書け (関数については、どの領域で正則か述べること)。また $(\sharp)$ が成り立つことを証明せよ。

6.　流体力学における連続の方程式を適当な仮定から導出せよ。

7.　(1) 流体力学における Lagrange 微分 (物質微分) について説明せよ。(2) Euler 方程式, Navier-Stokes 方程式を書け。(3) 静止している池の水圧がどのようになるか、一様な重力場を仮定して、Navier-Stokes 方程式を解いて説明せよ。

8.　(1) 流体力学における次の用語の定義を述べよ。
(a) 非圧縮　(b) 渦なし　(c) 速度ポテンシャル　(d) 流線　(e) (2 次元流体における) 流れ関数
(2) 次のことを示せ。(a) 流体が渦なしならば、単連結領域内で速度ポテンシャルが存在する。(b) 2 次元流体が非圧縮ならば、単連結領域内で流れ関数が存在する。
(3) 複素速度ポテンシャルについて説明し、流線と等ポテンシャル線の関係について述べよ。

1. (1) DE 公式 (double exponential formula) とは、数値積分のための公式である。数値積分とは、定積分の値を数値計算で求めるための方法のことをいう。

もっとも基本的な DE 公式は、定積分 $I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ に対して

$$I_{h,N} := h\sum_{n=-N}^{n=N} f\left(\varphi(nh)\right)\varphi'(nh)$$

を近似値に採用するものである。ここで $h>0$, $N\in\mathbb{N}$, $\varphi(t)=\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)$.

$x=\varphi(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ という変数変換を行うと、$dx=\varphi'(t)dt$, $t\to-\infty$ のとき $x\to-1$, $t\to\infty$ のとき $x\to 1$ であるから、$I=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$ が成り立つ。$F(t):=f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$ とおくと、

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt.$$

一般に $\mathbb{R}$ で滑らかな関数 F の定積分 $I:=\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt$ に対して、台形公式 $I_h=h\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(nh)$ (ここで h は、$h>0$ を満たす定数) はしばしば非常に高精度な近似値となることが知られている。

実際の数値計算では、無限和の計算は難しい場合が多いので、有限項で打ち切った

$$I_{N,h} := h\sum_{n=-N}^{N} F(nh)$$

で近似することになる。

$t\to\pm\infty$ のときの $F(t)$ の減衰が速ければ、$|I_{N,h}-I_h|$ は小さいことが期待できるので、

$$|I-I_{N,h}|\le |I-I_h|+|I_h-I_{N,h}|$$

から、$I_{N,h}$ は I の良い近似になることが期待できる。

実際、DE 公式の誤差は適当な条件下で指数関数的に減少する。また端点において特異性がある場合 (例えば $\alpha,\beta\in(0,1)$ の場合の $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ など) にも適用できることがある。

2. 4 月 13 日に講義した。

命題 0.1 $f(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$, ここで $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg P(z)\ge \deg Q(z)+2$, $(\forall x\in[0,\infty))$ $P(x)\ne 0$ が成り立つとする。このとき

(1)
$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = -\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

ただし log の値は、虚部が $(0,2\pi)$ の範囲にあるように定める。

$$\begin{aligned}
C_1&\colon z=te^{i\delta}\quad(\varepsilon\le t\le R),\\
C_2&\colon z=Re^{i\theta}\quad(\delta\le\theta\le 2\pi-\delta),\\
-C_3&\colon z=te^{i(2\pi-\delta)}\quad(\varepsilon\le t\le R),\\
-C_4&\colon z=\varepsilon e^{i\theta}\quad(\delta\le\theta\le 2\pi-\delta).
\end{aligned}$$

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(x)\log z\,dz = 2\pi i\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1} f(z)\log z\,dz \to \int_\varepsilon^R f(x)\log x\,dx,\\
&\int_{C_3} f(z)\log z\,dz \to -\int_\varepsilon^R f(x)\left(\log x + 2\pi i\right)dx,\\
&\int_{C_2} f(z)\log z\,dz \to \int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right)\left(\log R + i\theta\right)\cdot iRe^{i\theta}d\theta,\\
&\int_{C_4} f(z)\log z\,dz \to -\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)\left(\log \varepsilon + i\theta\right)\cdot i\varepsilon e^{i\theta}d\theta.
\end{aligned}$$

最初の 2 つから、$\delta \to 0$ とするとき

$$\int_{C_1} f(z)\log z\,dz + \int_{C_3} f(z)\log z\,dz \to -2\pi i\int_\varepsilon^R f(x)\,dx.$$

実数 M が存在して、十分大きい任意の R に対して、$\left|f(Re^{i\theta})\right| \le \dfrac{M}{R^2}$ であるから、$R \to \infty$ とするとき、

$$\left|\int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right)\left(\log R + i\theta\right)\cdot iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \frac{M}{R^2}\left(|\log R| + |2\pi i|\right)R\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi M\frac{\log R + 2\pi}{R} \to 0.$$

実数 M' が存在して、十分小さい任意の ε に対して、$\left|f(\varepsilon e^{i\theta})\right| \le M'$ であるから、$\varepsilon \to 0$ とするとき、

$$\left|-\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)\left(\log \varepsilon + i\theta\right)\cdot i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right| \le M'\left(|\log \varepsilon| + |2\pi i|\right)\varepsilon\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi M'\left(|\log\varepsilon| + 2\pi\right)\varepsilon \to 0.$$

まとめると、$\varepsilon \to 0,\ R \to \infty$ とするとき、

$$-2\pi i\int_0^\infty f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

$-2\pi i$ で割り算して、結果を得る。 ■

3. これも授業でやった。

命題 0.2 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z],\ \deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2,$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$) $P(n) \ne 0,\ f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}(f(z)s_2(z); c),\\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) &= -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}(f(z)s_1(z); c).
\end{aligned}$$

ただし $s_1(z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z},\ s_2(z) = \dfrac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}.$

証明 任意の自然数 N に対して、Γ_N を前項の閉曲線とする。f の極 c が Γ_N 上になければ (N が十分大きければこれは成り立つ)、留数定理より、$j = 1, 2$ について

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=-N}^{N} \mathrm{Res}\left(f(z)s_j(z); k\right) + 2\pi i\sum_{\substack{c\ \text{は}\ f\ \text{の極のうち}\\ c\ \text{は}\ \Gamma_N\ \text{の内部}}} \mathrm{Res}\left(f(z)s_j(z); c\right). \tag{2}$$

$N \to \infty$ のとき、左辺の積分は 0 に収束する。実際、ある定数 C が存在して、十分大きい任意の N に対して、$|f(z)| \le \dfrac{C}{N^2}$ $(z \in {\Gamma_N}^*)$ となるので、

$$\left|\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz\right| \le \max_{z\in{\Gamma_N}^*} |f(z)s_j(z)| \cdot (\Gamma_N\ \text{の長さ}) \le \frac{C}{N^2}\cdot 2\pi\cdot 4(2N+1) \to 0.$$

一方、

$$\operatorname{Res}\left(f(z)s_1(z);k\right)=f(k)\operatorname{Res}\left(s_1;k\right)=f(k)\cdot(-1)^k=(-1)^kf(k),$$
$$\operatorname{Res}\left(f(z)s_2(z);k\right)=f(k)\operatorname{Res}\left(s_2;k\right)=f(k)\cdot 1=f(k)$$

が分かるので、

$$\sum_{k=-N}^{N}f(k)=-\sum_{\substack{c\text{ は }f\text{ の極のうち}\\ c\text{ は }\Gamma_N\text{ の内部}}}\operatorname{Res}\left(f(z)s_2(z);c\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}f(z)s_2(z)\,dz,$$
$$\sum_{k=-N}^{N}(-1)^kf(k)=-\sum_{\substack{c\text{ は }f\text{ の極のうち}\\ c\text{ は }\Gamma_N\text{ の内部}}}\operatorname{Res}\left(f(z)s_1(z);c\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}f(z)s_1(z)\,dz.$$

$N\to\infty$ とすると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(f(z)s_2(z);c),$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nf(n)=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(f(z)s_1(z);c).\blacksquare$$

(3) $$s_1(z):=\frac{\pi}{\sin\pi z}\quad(\pi\operatorname{cosec}\pi z\text{ とも書かれる}),$$

(4) $$s_2(z):=\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}\quad(\pi\cot\pi z\text{ とも書かれる})$$

とおく。分母、分子はいずれも $\mathbb{C}$ 全体で正則である。分母 $\sin\pi z$ の零点は $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ であり、その位数は 1 である。ゆえに、これらは $s_1(z)$, $s_2(z)$ の 1 位の極であり、留数は

$$\operatorname{Res}(s_1;n)=\left.\frac{\pi}{(\sin\pi z)'}\right|_{z=n}=(-1)^n,\quad\operatorname{Res}(s_2;n)=\left.\frac{\pi\cos\pi z}{(\sin\pi z)'}\right|_{z=n}=1\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

s_1, s_2 を指数関数を用いて表すと

$$s_1(z)=\frac{2\pi i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}},\quad s_2(z)=\pi\frac{2i\left(e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}\right)}{2\left(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}\right)}=i\pi\frac{1+e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}}.$$

これから、$x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$ とするとき、次の評価が得られる (すぐ後の積分の評価で必要になる)。

(5) $$|y|=N+1/2\quad\Rightarrow\quad|s_1(z)|\le 2\pi e^{-\pi N},\quad|s_2(z)|\le 2\pi,$$

(6) $$|x|=N+1/2\quad\Rightarrow\quad|s_1(z)|\le\frac{\pi}{\cosh\pi y}\le\pi,\quad|s_2(z)|\le\pi\left|\tanh\pi y\right|\le\pi.$$

特に、任意の自然数 N に対して、$R:=N+1/2$ として、$\pm R\pm iR$ を 4 頂点とする正方形の周を正の向きに一周する曲線を Γ_N とすると、

(7) $$z\in\Gamma_N\quad\Rightarrow\quad|s_1(z)|\le 2\pi,\quad|s_2(z)|\le 2\pi.$$

4. (1) $f(z):=\dfrac{1}{z^2+1}$ は、命題 0.2 の条件を満たす。また f は偶関数であるから、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}f(-n)+f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=S+\frac{1}{1}+S=2S+1.$$

f の極は $\pm i$ で、分母の 1 位の零点であるから、

$$\mathrm{Res}(f;i) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}, \quad \mathrm{Res}(f;-i) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}.$$

命題 0.2 より

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= -\left(\mathrm{Res}\left(fs_2;i\right) + \mathrm{Res}\left(fs_2;-i\right)\right)\\ &= -\left(\mathrm{Res}\left(f;i\right)s_2(i) + \mathrm{Res}\left(f;-i\right)s_2(-i)\right)\\ &= -\left[-\frac{i}{2}\cdot\pi\cot(i\pi) + \frac{i}{2}\cdot\pi\cot(-i\pi)\right]\\ &= \pi i\cot\left(i\pi\right) = \pi i\cdot(-i)\coth\left(\pi\right) = \pi\coth\pi.\end{aligned}$$

ゆえに

$$S = \frac{1}{2}\left(\pi\coth\pi - 1\right).\blacksquare$$

(2)

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$$

$z^3+1=0$ の根は $z=e^{\pi i/3}, e^{\pi i}, e^{5\pi i/3}$ であるから、

$$I = -\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right) = -\sum_{c=e^{\pi i/3},e^{\pi i},e^{5\pi i/3}} \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right).$$

$c=e^{\pi i/3}, e^{\pi i}, e^{5\pi i/3}$ のとき、$c^3=-1$ であるから、

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right) = \left.\frac{\log z}{(z^3+1)'}\right|_{z=c} = \left.\frac{\log z}{3z^2}\right|_{z=c} = -\left.\frac{z\log z}{3}\right|_{z=c}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3}\left(\left.z\log z\right|_{z=e^{\pi i/3}} + \left.z\log z\right|_{z=e^{\pi i}} + \left.z\log z\right|_{z=e^{5\pi i/3}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{\pi}{3}i + (-1)\cdot\pi i + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{5}{3}\pi i\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.\blacksquare\end{aligned}$$

5. C は D 内の区分的に滑らかな単純閉曲線で、C が囲む領域内 Ω では f は正則で、$[a,b]\subset\Omega$ とする。任意の $x\in[a,b]$ に対して、Cauchy の積分公式から

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

ゆえに

$$I = \int_a^b \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz\right)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\int_a^b \frac{dx}{z-x}\right)f(z)\,dz.$$

(積分は、実軸上の閉区間の直積上の連続関数の積分であるから、積分順序の交換が出来る。) ゆえに

$$\Phi(z) := \int_a^b \frac{dx}{z-x}$$

とすれば、$I = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \Phi(z)f(z)\,dz$ が成り立つ。Log を対数関数の主値として、

$$\Phi(z) = \mathrm{Log}\,\frac{z-a}{z-b}.$$

これは $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ で正則である。
　一方、

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-x_k}\right)A_k=\frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-x_k}f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$\Lambda_n(z):=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-x_k}$$

とすれば、$I_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\Lambda_n(z)f(z)\,dz$. この Λ_n は $\mathbb{C}\setminus\{x_k\mid k=1,\dots,N\}$ で正則である。■

6.　流体の速度を $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, 密度を $\rho(\boldsymbol{x},t)$ とするとき

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{8}$$

が成り立つ。これを**連続の方程式**という。
証明　流体の質量が保存されるので、任意の領域 V 内の流体の質量の変化は、V の境界から出入りする質量に等しい。

$$\frac{d}{dt}\int_V\rho\,dx=-\int_{\partial V}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma. \tag{9}$$

左辺に微分と積分の順序交換、右辺に Gauss の発散定理[1]を用いて

$$\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx=-\int_V\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\,dx.$$

これが任意の V について成り立つことから、(8) を得る。■

7.

(1) 流体の速度場を $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ とするとき、

$$\frac{D}{Dt}:=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla$$

で定義される微分作用素 $\frac{D}{Dt}$ を Lagrange 微分 (物質微分) と呼ぶ。流体の流れに沿って運動する粒子の、時刻 t での位置を $\boldsymbol{x}(t)$ とするとき、任意の関数 $f(\boldsymbol{x},t)$ に対して

$$\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}(t),t)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_j}\dot{x}_j(t)+\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{x}}(t)\cdot\nabla f=\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f=\frac{Df}{Dt}.$$

つまり、$\frac{Df}{Dt}$ は、流体粒子の流れに沿って移動したときの、f の時間変化率を表す。

(2) Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\,\triangle\,\boldsymbol{v}.$$

Euler 方程式は、粘性項を無視したもので、

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p.$$

[1] 細かい仮定は省略する。$\displaystyle\int_{\partial V}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\int_V\operatorname{div}\boldsymbol{f}\,dx.$

(3) g を重力加速度として、$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$ となる。静止しているということは $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\equiv 0$ ということであるから、Navier-Stokes 方程式は、

$$\mathbf{0}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{f},$$

すなわち

$$0=-\frac{p_x}{\rho},\quad 0=-\frac{p_y}{\rho},\quad 0=-\frac{p_z}{\rho}-g.$$

これから $p(x,y,z)=-gz+F(t)$. 水面を $z=0$ として、$F(t)$ を大気圧 $p_{\text{大気}}$ にすると、

$$p(x,y,z)=p_{\text{大気}}-gz.\blacksquare$$

8.

(1) (a) つねに $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ が成り立つとき、非圧縮であるという。(b) つねに $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ が成り立つとき、渦なしであるという。(c) $\operatorname{grad}\phi=\boldsymbol{v}$ を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を速度ポテンシャルという。(d) 曲線 $\varphi\colon I\to\Omega$ で、その接線ベクトルが、その点の速度と平行である $\varphi'(t)\parallel\boldsymbol{v}(\varphi(t),t)$ であるものを流線という。(e) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=(u(x,y,t),v(x,y,t))$ とする。$\psi(x,y,t)$ が流れ関数であるとは、$\psi_x=-v$, $\psi_y=u$ を満たすことをいう。

(2) ベクトル解析で次の定理を学んだ。

> 単連結領域 Ω 内のベクトル場 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_n)^T$ が、$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ を満たし、$a\in\Omega$ とする。Ω 内の任意の点 $\boldsymbol{x}$ に対して、始点が $\boldsymbol{a}$, 終点が $\boldsymbol{x}$ である Ω 内の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取ると、$\displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方に依らずに定まり、$F(\boldsymbol{x}):=\displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ は $\operatorname{grad}F=\boldsymbol{v}$ を満たす。

(a) 3 次元の流体の速度場 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ に対して、

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

であるから、$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ であれば、上の定理の仮定が成り立つ。

$$\phi(\boldsymbol{x},t):=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{v}(\cdot,t)\cdot d\boldsymbol{r}$$

は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方に依らずに定まり、$\operatorname{grad}\phi=\boldsymbol{v}(\cdot,t)$ を満たす。すなわち ϕ が $\boldsymbol{v}$ の速度ポテンシャルである。

(b) 2 次元の流体の速度場 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,y,t)=\begin{pmatrix}u(x,y,t)\\v(x,y,t)\end{pmatrix}$ に対して、

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

である。そこで $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)^T:=(-v,u)^T$ とおくと、

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial f_1}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

ゆえに $\boldsymbol{f}$ に対して、上の定理の仮定が成り立つ。

$$\psi(\boldsymbol{x},t) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}(\cdot,t)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} f_1\ dx_1 + f_2\ dx_2 = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} (-v\ dx + u\ dy)$$

は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方によらずに定まり、とおくと、

$$\psi_x = -v, \quad \psi_y = u.$$

(3) 2 次元の非圧縮渦なしの流れ $\boldsymbol{v} = (u,v)^T$ があるとき、速度ポテンシャル ϕ と、流れ関数 ψ が存在する。

$$\phi_x = u, \quad \phi_y = v, \quad \psi_x = -v, \quad \psi_y = u$$

であるから、

$$\phi_x = \psi_y, \quad \phi_y = -\psi_x.$$

これは Cauchy-Riemann 方程式であるから、$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ で定めた f は正則な関数である。この f を $\boldsymbol{v}$ の複素速度ポテンシャルという。$f' = f_x = \phi_x + ipsi_x = u - iv$ が成り立つ。■