2015 年度 応用複素関数 期末試験問題

2015 年 7 月 29 日 (水曜)4 限 14:30〜15:30 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

次の問題から 4 問選択して解答せよ。

1. Ω は $\mathbb{C}$ の領域とするとき、以下の問に答えよ。(1) $\mathbb{C}$ の領域 Ω が凸、星形、単連結とは、それぞれどういう意味か答えよ。(2) $\mathbb{C}$ の領域のうち、凸でないが星形であるもの、星形でないが単連結であるものの例をあげよ (式で書いて証明も与えるのが望ましいが、図で答えても半分の得点を与える)。(3) 講義に出て来た命題で、単連結という言葉を含むものを一つ書け。

2. $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 内の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に収束するというのはどういうことか説明せよ。

3. $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$, $N = (0, 0, 1)$ として、任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、直線 NP と平面 $x_3 = 0$ との交点を $(x, y, 0)$ として、$\varphi(x_1, x_2, x_3) := x + iy$ により $\varphi\colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ を定める。このとき、φ^{-1} を求めよ。

4. ∞ が複素関数 f の孤立特異点であるとはどういうことか。また、そのとき f の ∞ のまわりの Laurent 展開とは何か、f の ∞ における留数とは何か。

5. a, b, c, d は互いに相異なる複素数であり、また 0 でないとする。

$$f(z) := \frac{abcd}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)} \cdot \frac{1}{z}$$

に対して、$\mathrm{Res}(f; a)$, $\mathrm{Res}(f; b)$, $\mathrm{Res}(f; c)$, $\mathrm{Res}(f; d)$, $\mathrm{Res}(f; 0)$, $\mathrm{Res}(f; \infty)$ を求め、それから

$$\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} + 1 = 0$$

を示せ。

6. 1, 2, 3 をそれぞれ 2, 3, 1 にうつす 1 次分数変換を求めよ。また、以下の Mathematica プログラムで検算が出来ることを説明せよ。

```
cr[z_, z1_, z2_, z3_] := (z - z2)/(z - z3) (z1 - z3)/(z1 - z2)
Solve[cr[z, 1, 2, 3] == cr[w, 2, 3, 1], w]
```

7. $\zeta(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ は、$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 1\}$ で正則な関数 ζ を定めることを示せ。

8. (1) $\pi^2/\sin^2 \pi z$ の部分分数展開は $\displaystyle\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ であるが、$\pi \cot \pi z$ の部分分数展開は $\pi \cot \pi z = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ ではなく、

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

としてある。$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ でなく、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ を使ってあるのはなぜか？　(2) $\pi \cot \pi z$ の部分分数展開から、$\pi^2/\sin^2 \pi z$ の部分分数展開を導け。

9. 講義に出て来た定理を 1 つ選び、定理とその証明を書け。

解説

領域というのは、普通は連結開集合のことなのだけど、開集合でない集合を領域と呼ぶ人が多い。

1.

(1) $a, b \in \mathbb{C}$ に対して、$[a,b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$ と定義する。Ω が凸であるとは、

$$(\forall a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a,b] \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

Ω が星型であるとは、

$$(\exists a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a,b] \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

Ω が単連結であるとは、Ω 内の任意の閉曲線が定数曲線に連続的に変形可能なことをいう。

(2) $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ は凸ではないが、星型である。

凸でないこと $a = -1+i$, $b = -1-i$ とすると、$a, b \in \Omega_1$ であるが、$[a,b] \not\subset \Omega_1$ ($\because -1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \in [a,b]$ であるが、$-1 \not\in \Omega_1$) であるから、Ω_1 は凸ではない。

星型であること $a = 1$ とすると、任意の $z \in \Omega_1$ に対して、$[a,z] \subset \Omega_1$. ($\because \operatorname{Re} z > 0$ であれば、$[a,z] \setminus \{a\}$ に属する点の実部は正、$\operatorname{Re} z < 0$ であれば、$[a,z] \setminus \{a\}$ に属する点の実部は負となる。$\operatorname{Re} z = 0$ であれば、$z > 0$ であるから、$[a,z] \subset (0,\infty) \subset \Omega_1$.)

$\Omega_2 := \mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0] \cup \overline{D(0;1)})$ は星型でないが、単連結である。

(3) 「Ω は $\mathbb{C}$ の領域で単連結とする。$f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、C は Ω 内の閉曲線で区分的に C^1 級であるならば、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$.」

Ω の例として、開集合でないものを書く人がちらほらいましたが、領域は開集合なので、本当はまずい。

2. a で場合分けする。(i) $a \in \mathbb{C}$ の場合、$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq N)$ $|z_n - a| < \varepsilon$ が成り立つこと。 (ii) $a = \infty$ の場合、$(\forall U \in \mathbb{R})$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq N)$ $|z_n| > U$ が成り立つこと。 ■

3. この問題は難しくはないけれど、計算が面倒で、短時間のテストで出題するものではないような気がしますが、山張っている人用に出題しました。結果のみ

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$$

であり、

$$\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \overline{z}}{i\left(|z|^2 + 1\right)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

ちなみに

$$\varphi^{-1}(x + iy) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2} \right). \blacksquare$$

4. ∞ が複素関数 f の孤立特異点であるとは、$(\exists R\in\mathbb{R})$ f は $\Omega_R := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|>R\}$ で定義され、Ω_R で正則なことをいう。

f が Ω_R で正則なとき、$(\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}\quad(z\in\Omega_R)$$

が成り立つが、この式を f の ∞ のまわりの Laurent 展開という。$-a_{-1}$ を f の ∞ における留数という。■

5. $a, b, c, d, 0$ は、いずれも分母の 1 位の零点であり、f の 1 位の極である。例えば

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;a)&=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{abcd}{(z-b)(z-c)(z-d)}\cdot\frac{1}{z}=\frac{abcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}\cdot\frac{1}{a}\\&=\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}.\end{aligned}$$

同様にして

$$\operatorname{Res}(f;b)=\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)},\quad \operatorname{Res}(f;c)=\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)},$$
$$\operatorname{Res}(f;d)=\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

さらに

$$\operatorname{Res}(f;0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{abcd}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}=\frac{abcd}{(-a)(-b)(-c)(-d)}=1.$$

$f(z)$ は z の 5 次多項式の逆数であるから、$\displaystyle\lim_{z\to\infty}z^4f(z)=0$. 特に

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty}zf(z)=0.$$

一般に、有理関数 f の $\mathbb{C}$ 内の極を $c_1, \ldots, c_N$ とするとき、

$$\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}(f;c_j)+\operatorname{Res}(f;\infty)=0$$

であるから、

$$\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}+1+0=0.$$

移項すると

$$\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}=-1.$$■

6. $\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 a, b, c をそれぞれ $1, 0, \infty$ に移す 1 次分数変換は一意的に存在する。それを φ_{abc} とすると、a, b, c が有限な場合は

$$\varphi_{abc}(z)=\frac{a-c}{a-b}\cdot\frac{z-b}{z-c}.$$

求める写像 φ は、$\varphi=\varphi_{w_0,w_1,w_2}^{-1}\circ\varphi_{z_0,z_1,z_2}$. $w=\varphi(z)$ の関係があるとき、$\varphi_{w_0,w_1,w_2}(w)=\varphi_{z_0,z_1,z_2}(z)$. これを w について解くと、$w=\varphi(z)$ が得られる。実行すると、

$$\varphi_{123}(z)=\frac{1-3}{1-2}\cdot\frac{z-2}{z-3}=\frac{2z-4}{z-3},\quad \varphi_{231}(z)=\frac{2-1}{2-3}\cdot\frac{z-3}{z-1}=\frac{-z+3}{z-1},$$

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\text{“}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&-4\\1&-3\end{pmatrix}\text{ に対応する 1 次分数変換”}\\&=\text{“}\begin{pmatrix}-1&-3\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\1&-3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}5&-13\\3&-7\end{pmatrix}\text{ に対応する 1 次分数変換”}=\frac{5z-13}{3z-7}.\end{aligned}$$

$\varphi_{w_0,w_1,w_2}(w) = \varphi_{z_0,z_1,z_2}(z)$ は、Mathematica では

```
cr[w,w0,w1,w2]==cr[z,z0,z1,z2]
```

という方程式で表される。これを w について解けば、φ が得られる。■

逆行列の計算を間違えた人が多い。一瞬、新課程のせいかと思ったけれど、2,3 年生だからそれはない。一体なぜ？一方で、検算をしないということでもある。それもけしからん。

7.

$$n^z = \exp(z \operatorname{Log} n)$$

であるから、

$$|n^z| = \exp \operatorname{Re}(z \log n) = \exp(x \log n) = n^x = n^{\operatorname{Re} z}.$$

α を $\alpha > 1$ を満たす任意の実数とするとき、$\Omega_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$ とおく。$z \in \Omega_\alpha$ であれば、

$$|n^z| \geq n^\alpha.$$

ゆえに

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ は収束するので、Weierstrass の M-test により、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ は Ω_α で一様収束する。ゆえに ζ は Ω_α で正則である。α は何でも良いので、ζ は $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ で正則である。■

8. (1) そもそも $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{z-n}$ は収束しない。すなわち

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{z-n}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{z-(-n)}$$

は収束しない。その理由は大雑把に言うと、z を固定して、$n \to \infty$ とするとき、$\dfrac{1}{z-n} \sim -\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{z-(-n)} \sim \dfrac{1}{n}$ であり、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ は発散するから。その一方で

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-n} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{z-n} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{z+n}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{2z}{z^2-n^2}\right)$$

は、z を固定して、$n \to \infty$ とするとき、$\dfrac{2z}{z^2-n^2} \sim -\dfrac{2z}{n^2}$ であるから、収束する (実は広義一様収束する)。

同様に z を固定して、$n \to \infty$ とするとき、$\dfrac{1}{(z-n)^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ であるから、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(z-n)^2}$ は収束する (実は広義一様収束する)。

(2) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で広義一様に

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

が成り立つので、項別微分が出来て、

$$\pi \cdot \frac{\sin \pi z \cdot (-\pi \sin \pi z) - \pi \cos \pi z \cdot \cos \pi z}{\sin^2 \pi z} = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{-1}{(z-n)^2} + \frac{-1}{(z+n)^2}\right).$$

整理して

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(z-n)^2}.■$$