2017/6/7
at 310

第7回 応用複素関数

大事なことだけ選び，あまりヒヤクなく話したつもり …しかし内容すごく多い。わかりにくかったかも。

今日は関数論に集中
なるべく

$\boxed{仮}$ 2次元，渦なし（$\mathrm{rot}\, v := v_x - u_y = 0$），非圧縮（$\mathrm{div}\, v = u_x + v_y = 0$）

⇓（単連結領域では）

$\boxed{結}$ ∃正則関数 f s.t. $f' = u - iv$

（逆に任意の正則関数は渦なし非圧縮流を定める。）

前回のサイゴ

Prop.

ポテンシャル ϕ （i.e. $\nabla\phi = v$）存在 ⇒ 渦なし

（単連結領域では）

⇓

$\Delta\phi = \mathrm{div}\, v$

Cor. $\boxed{仮}$ ⇒ ∀単連結領域 Ω でポテンシャル ϕ 存在，$\Delta\phi = 0$

（∵ $\mathrm{div}\, v = 0$）

流れ関数（stream function）

2次元の速度場 $v = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して $\begin{cases} \psi_x = -v \\ \psi_y = u \end{cases}$ を満たす ψ を流れ関数と呼ぶ。

Prop. 流れ関数 ψ 存在 $\xRightarrow{(1)}$ 非圧縮

(2)（単連結領域では）

(3) ⇓

$\Delta\psi = -\mathrm{rot}\, v$

Cor. $\boxed{仮}$ ⇒ ∀単連結領域 Ω で流れ関数 ψ 存在，$\Delta\psi = 0$

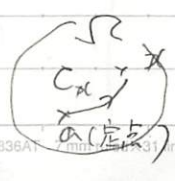
（∵ $\mathrm{rot}\, v = 0$）

証明

(1) $\mathrm{div}\, v = u_x + v_y = (\psi_y)_x + (-\psi_x)_y = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0$

(2) $\mathrm{rot}\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = u_x - (-v)_y = u_x + v_y = 0$ より

$\psi(x) := \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot dr$



とおくと，C_xの取り方によらずに $\psi(x)$ 定まり

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

(3) $\Delta\psi = (\psi_x)_x + (\psi_y)_y = (-v)_x + u_y = -\mathrm{rot}\, v$ //

Def. 速度場の積分曲線を流線(stream line)と呼ぶ。
(i.e. 接線ベクトル // 速度 であるような曲線)

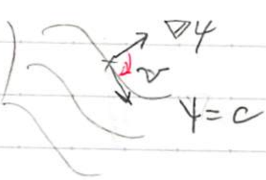
問 速度場 v が与えられたとき，任意の点を通る流線は一意に定まることを示せ。(ビブン方程式の問題)

☆ 定常な速度場(vがtに依らない)では，流線は流体粒子の軌跡

☆ 流れ関数の等高線は流線である。 → cf. 速度ポテンシャルの等高線を等ポテンシャル線とヨブ。

∵ ψの等高線($\psi(x,y)=$定数)の法線ベクトル $\nabla\psi = \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}$
これは $v = \begin{pmatrix} -\psi_y \\ \psi_x \end{pmatrix}$ と直交している。
ゆえに ψの等高線の接線ベクトル // v //

$$\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \nabla\psi = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}$$



vは$\nabla\psi$を $-\frac{\pi}{2}$ 回転したもの

(注) 流線は3次元流れでも用いるが，流れ関数は2次元オンリー

Prop. $f(z) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ $\left(\begin{matrix} z = x+iy \\ x,y \in \mathbb{R} \end{matrix} \right)$
とおくと f は正則，$f' = u - iv$

∵ $\phi_x = u = \psi_y$, $\phi_y = v = -\psi_x$
Cauchy-Riemannの方程式が成り立つので fは正則
また $f' = \phi_x + i\psi_x = u - iv$ //

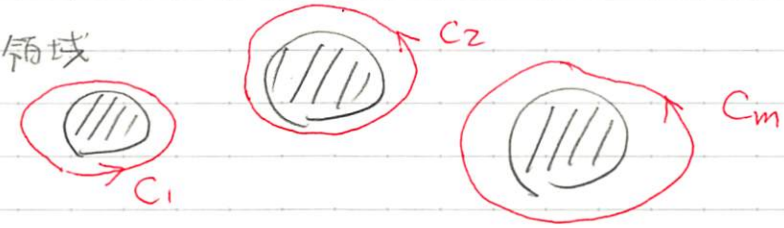
fをvの複素速度ポテンシャルと呼ぶ。

これは時間の埋め草

注 単連結でなかったら？

$n+1$ 重連結領域 ≒ 閉曲線の外せない n 個の穴がある。

$n=3$
4重連結領域



$$k_j := \int_{C_j} v \cdot dr$$

任意の閉曲線 C は

$$C \sim p_1 C_1 + p_2 C_2 + \cdots + p_n C_n$$

$$\int_C v \cdot dr = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \cdots + p_n k_n$$

C のまわりの循環は 0 にはならないが、良く分かる。

このような場合も、多価関数のポテンシャル ϕ は存在する。多価関数に慣れれば使いこなせる。

ϕ は多価でも $\nabla\phi$ は1価である。

cf. $f(z) = \frac{1}{z}$ の原始関数は 2重連結領域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ では 1価関数として存在しない。

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

$\log z$ は多価，$(\log z)' = \frac{1}{z}$

逆に 正則関数 f に対して

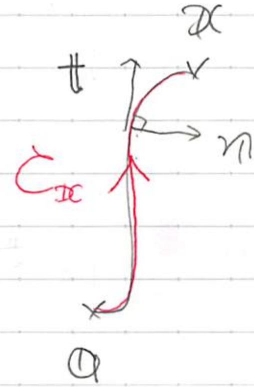
$$\phi := \mathrm{Re} f,\quad \psi := \mathrm{Im} f$$

$$u := \mathrm{Re} f',\quad v := -\mathrm{Im} f',\quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とおくと、ϕ は $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル、ψ は $\boldsymbol{v}$ の流れ関数

トーゼン 渦なし、非圧縮

問 確認せよ。



流れ関数の意味

$$\psi(x) = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$$

s: 弧長パラメーター

$$= \int_{C_x} \left(u \frac{dy}{ds} + v \left(-\frac{dx}{ds} \right) \right) ds$$

$$= \int_{C_x} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, ds$$

$\left(\boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{t} \right.$

$\boldsymbol{n}$ は接線ベクトルを $-\frac{\pi}{2}$ 回転したもの…法線ベクトル)

これは C_x を横切り、$\boldsymbol{n}$ の側に単位時間に流れる流体の量(体積と言いたいところだけど面積かな)。

(2011/6/29)

簡単な関数の表す流れ

① 一様流

$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) := cz$ のとき

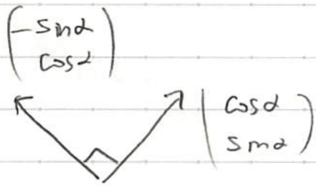
$c = Ue^{-i\alpha}$ $(U > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$ とすると

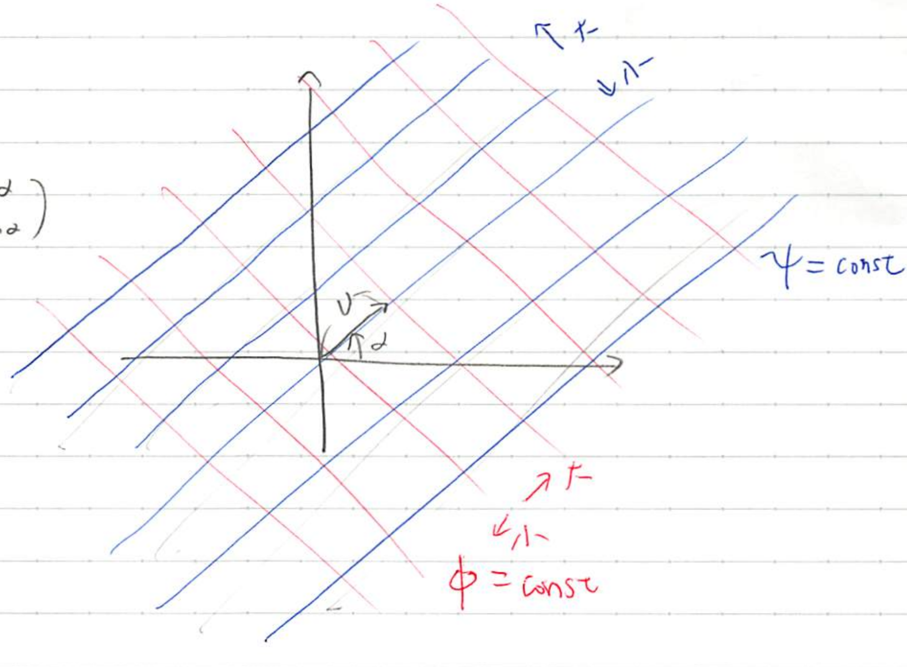
$$u - iv = f'(z) = c = Ue^{-i\alpha}$$

$$\therefore \begin{cases} u = U\cos\alpha \\ v = U\sin\alpha \end{cases} \qquad \therefore \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} U\cos\alpha \\ U\sin\alpha \end{pmatrix}$$ 定数ベクトル

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \mathrm{Re}\left(f(x+iy)\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(U(\cos\alpha - i\sin\alpha)(x+iy)\right) \\ &= U(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \mathrm{Im}\left(f(x+iy)\right) \\ &= U(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) \end{aligned}$$





No.

Date

② 湧き出し，吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $\quad f(z) = m\log z \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$

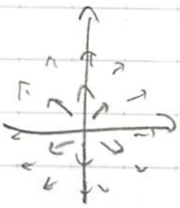
(ちょっと気持ち悪い… しばらく我慢
$\sqrt{z}$ などと違い，微分すると一価)

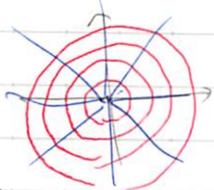
$z = re^{i\theta}$ とすると

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$v = \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta\end{pmatrix}$$

方向は z と同じ
$m>0$ 向きも同じ 原点から離れる
$m<0$ 向きは逆 原点に向かう
大きさは遠いほど小





$\phi(x,y) = \mathrm{Re}\big(m(\log r + i\theta)\big) = m\log r$ 1価

$\psi(x,y) = \mathrm{Im}\big(\qquad\big) = m\theta$ 多価

→ ϕ = 定数は原点中心同心円，ψ = 定数は原点を始点とする半直線

原点のまわりを一周する任意の閉曲線 C に対して
C から外に出る流量は

$$\int_C v\cdot n\,ds = \int_C d\psi = \mathrm{Im}\int_C f'(z)\,dz = \mathrm{Im}(2\pi i) =$$

↑ 問 チェックせよ。

$$= \mathrm{Im}\int_C \frac{m}{z}\,dz = 2\pi m$$

$m>0 \iff$ 外に流れ出す　原点から湧き出す
$m<0 \iff$ 中に流れ込む　〃 に吸い込まれる。

No.
Date

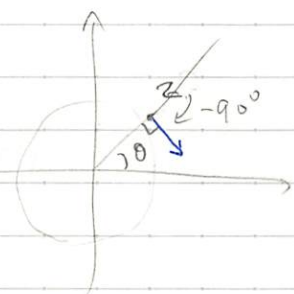
③ 渦糸

$K\in\mathbb{R}$, $\quad f(z) = iK\log z \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$

$z = re^{i\theta}$ とすると

$$u - iv = f'(z) = \frac{iK}{z} = \frac{iK}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{K}{r}(\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{K}{r}\sin\theta\\ -\frac{K}{r}\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{K}{r}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}}_{-\frac{\pi}{2}\text{の回転}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

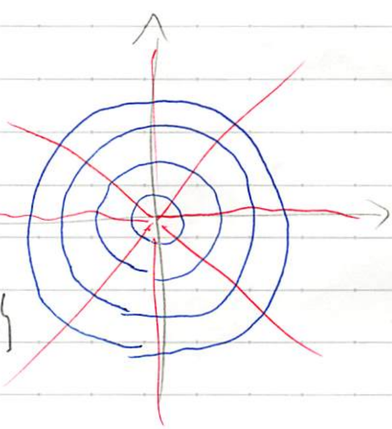


原点のまわりを時計まわりにまわっている。

$$\begin{cases}\phi(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\left(iK(\log r + i\theta)\right) = -K\theta \\ \psi(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z) = \mathrm{Im}\left(iK(\log r + i\theta)\right) = K\log r\end{cases}$$

ϕ = 定数は 原点を始点とする半直線群

ψ = 定数は 原点中心の同心円



この流れを原点におかれた
渦糸 (vortex string) と呼ぶ。

注 $\omega = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

原点でない点では、
流体粒子は自転しない。

No.

Date

http://malab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/

uniformflow.nb

これを自分で導き出し，吟味せよ