本日　有名な方程式を紹介 … 問題と記号まで拾って行く。

No.

Date 2017/5/31

αt 310

遅延

# 第6回 応用複素関数

(前回 $p(n) = P^T n$ 質問された。やはりコーギノートに書こう。レポートカゲく)

前回

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$$ (連続の方程式)

応力　応力テンソル

$$p(n) = P^T n = Pn$$ (一般に $P^T = P$)

"等方"流体では

$$P = -pI + 2\mu E, \quad E = (e_{ij}), \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$p = p(x, t)$$

以下 これは 仮定

"Newton流体"では $\mu$ = 定数

$$\mu = \begin{cases} 0.001005\,[\mathrm{Pa\cdot s}] & \text{水 (20°C)} \\ 1.8 \times 10^{-5}\,[\mathrm{Pa\cdot s}] & \text{空気} \end{cases}$$

サラダ油 60〜80倍

$p$について もう少し後

(Pa = N/m²
N = kg·m/s²)

## 運動方程式

$$(*) \quad \frac{Dv}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P$$

一般に成立

ただし

$$\operatorname{div} P = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

行ごとの div

(証明)

任意の領域 $V$ において 運動方程式から

$$\int_V \rho \underbrace{\frac{Dv}{Dt}}_{\text{加速度}} dx \overset{\text{仮定}}{=} \int_{\partial V} P n \, d\sigma = \int_V \operatorname{div} P \, dx$$

成分ごとに発散定理

$V$の任意より $(*)$ が得られる。 //

完全流体では　$P = -p I$ より

$$\mathrm{div}\, P = -\nabla p$$

であるから

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$ （圧力の高い方から低い方に）

すなわち

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$ Euler方程式
完全流体の方程式

問　ベクトル表記をやめると？

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

粘性流体では　$P = -p I + \mu\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ であるから

$$\mathrm{div}\, P = -\nabla p + \mu(\Delta \boldsymbol{v} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})$$

であり、運動方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu(\Delta\boldsymbol{v} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})$$

ただし

$$\nu := \frac{\mu}{\rho}$$ 動粘性率 (kinematic viscosity) と呼ぶ。

特に非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) の場合

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v}$$

これを Navier-Stokes 方程式と呼ぶ。　非圧縮粘性流体の方程式

注 ○ Euler も NS も非線形

○ NS で $\nu = 0$ とすると Euler。$\nu\Delta\boldsymbol{v}$ を粘性項という。
○ 単位質量あたりの外力（たとえば重力 $\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$）があるとき右辺につける

○ NS で非線形項を落とした

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v}$$

を Stokes 方程式とヨブ。「遅い」流れでは良い近似といわれている。

線形方程式？
$\boldsymbol{v} = 0$ における線形化
ということはできる。

方程式は解けるか？

$\rho$ = 定数とする。（$\rho$が未知のときは状態方程式を補う。）

未知　$v, p$ …… 4つ

方程式 { 連続 …… 1つ ／ 運動 …… 3つ }　数はあってる。

$v$について適当な初期、境界を与えて、解の一意存在を示せ。

……未解決！

注　$p$についてはナシ
$p$は一意的には決まらない（定数差ムシしないと）。

---

問　静止している流体の圧力は？　$v = 0$ であるから

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

すなわち

$$p_x = 0,\ p_y = 0,\ p_z = -\rho g$$

$$\therefore\ p(x) = -\rho g z + \text{const.}$$

水面を $z=0$ として const = 大気圧

$$p(x) = p_{大気圧} - \rho g z$$

$z = -1\,\text{m}$ のとき？

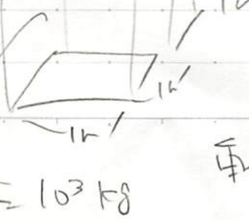
$$p = p_{大気圧} + \rho g \cdot z$$

$p_{大気圧}$ = 1013 hPa ≒ $10^5$ Pa

$$10^3\,\text{kg/m}^3 \times 9.8\,\text{m/s}^2 \times 1\,\text{m}$$
$$= 9.8 \times 10^3\ [\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s}^2)]$$
$$\fallingdotseq 10^4\ [\text{Pa}]$$

$\text{N/m}^2$

これは
実はふとん程度でOK




$m = 10^3$ kg

重力 $mg = 9.8 \times 10^3$ N

## 3. 非圧縮流体の渦なしの流れ

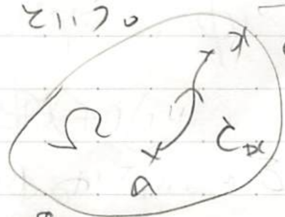
(粘性はあってもOK. 渦なしも実は強い仮定でない)

$v$：流体の速度場 とするとき

$$\omega := \mathrm{rot}\, v = \mathrm{curl}\, v$$

を渦度(vorticity)と呼ぶ。(粒子の回転の角速度の2倍とか)

$\omega = 0$ のとき 渦なし, 非回転, 層状 という。



$$\phi(x) = \int_{C_x} v \cdot dx$$

**Prp** ベクトル場 $f = (f_i)$ が

(*) $$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

を満たせば, 任意の単連結領域で $f$ の ポテンシャル $\phi$ が存在

(3次元では, (*)は $\mathrm{rot}\, f = 0$ ということ。)

Cor. 渦なしならば, 局所的には ポテンシャルが存在する。

$$\nabla \phi = v \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = v, \ \frac{\partial \phi}{\partial z} = w \right)$$

をみたす $\phi$ が存在するとき, $\phi$ を流体の速度ポテンシャルという。
また ポテンシャルが存在するとき 流体の流れは ポテンシャル流と呼ぶ。

(問 ポテンシャル流は一般に渦なし ($\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$)
上の Prp. はその逆をヨワクしたもの)

以下 簡単のため, 全領域 $\Omega$ で ポテンシャルが存在すると仮定.

☆ $\Delta \phi = \mathrm{div}\, v$ 特に非圧縮ならば $\Delta \phi = 0$

($\because$ $\Delta \phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, \phi = \mathrm{div}\, v = 0$)

**Prp.** 非圧縮流体のポテンシャル流では, 速度ポテンシャルは調和関数

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{ポテンシャル流} & \longrightarrow & \text{渦なし} \\ \exists \phi \ \text{s.t.}\ v = \nabla \phi & \longleftarrow & \mathrm{rot}\, v = 0 \end{array}}$$

No.
Date

もしも $\partial\Omega$ で $v$ がわかっていれば

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = v \cdot n \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

$$\left( \because \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} \underset{\uparrow}{=} \nabla\phi \cdot n = v \cdot n \right)$$

覚えよう

$\phi$ は次をみたす

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = v \cdot n & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Laplace 方程式の Neumann 境界値問題。

Prop $\Delta\phi = 0$ in $\Omega$, $\frac{\partial\phi}{\partial n} = g$ on $\partial\Omega$ は, $\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$
が成り立つとき解を持つ。定数差を除き一意。
(∵ 略)

Cor. 上の問題は解を持つ。

$$\left( \because \quad \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{div} v \, dx = \int_{\partial\Omega} 0 \, dx = 0 \right)$$

結局, 非圧縮完全流体の渦なしの流れがあるとき
$\partial\Omega$ で速度 $v$ がわかれば, $\phi$ と $v$ は求まる。

(注) 以上の議論に運動方程式は使ってない。
非圧縮条件を使ったが
ポテンシャル流はただ1つのスカラー関数で
定まるから, と考えられる。
$p$ を求めるには運動方程式を使う。
→ Bernoulli の定理
完全流体の場合

## 2次元の場合

注 非圧縮，粘なしの仮定はとる。

流体の流れが2次元的

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{(a)}\ \boldsymbol{v}\ \text{の}\ z\ \text{成分}\ w=0 \\ \text{(b)}\ \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{v}=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

このとき

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

☆ $\omega := v_x - u_y$ とおくと $\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ に対し $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := v_x - u_y$ とおく。

<u>Prop.</u>

(1) $\boldsymbol{v}$ がポテンシャルを持てば $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=0$

(2) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=0$ ならば 任意の単連結領域に対し ポテンシャル存在

↑ 速度ポテンシャル

(3) 速度ポテンシャル $\phi$ が存在するとき $\phi$ は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\Delta\phi$ をみたすので 非圧縮ならば $\Delta\phi=0$

No.

Date

## 流れ関数

2次元の速度場 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ に対し

$$\psi_x=-v,\quad \psi_y=u$$

を満たす $\psi$ を, $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 (stream function)

Prop.

(1) $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在するならば非圧縮

(2) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ ならば任意の単連結領域で流れ関数存在

(3) 流れ関数 $\psi$ が存在するとき $-\Delta\psi=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$

をみたすので, 渦なしならば $\Delta\psi=0$

(証)

(1) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=u_x+v_y=\psi_{yx}+(-\psi_x)_y=0$

(2) $\mathrm{rot}\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}=u_x-(-v)_y=u_x+v_y=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$

であるから

$$\psi(\boldsymbol{x})=\int_{C_x}\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}\cdot d\boldsymbol{r}$$

とおくと $\psi$ は $C_x$ の取り方によらず定まり

$$\begin{cases}\psi_x=-v\\ \psi_y=u\end{cases}$$

(3) $-\Delta\psi=(-\psi_x)_x-(\psi_y)_y$

$=v_x-u_y=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ //

流れ関数が存在 $\Longrightarrow$ 非圧縮

$\exists\psi$ s.t. $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-\psi_y\\ \psi_x\end{pmatrix}$ $\Longleftarrow$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$

2次元で単連結，渦なし，非圧縮 とする。

$\phi, \psi$ 存在 $\left( \begin{array}{ll} \nabla \phi = \boldsymbol{v} & \Delta \phi = \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \\ \begin{pmatrix} -\psi_y \\ \psi_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} & \Delta \psi = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = 0 \end{array} \right)$

このとき

$f(z) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ $\left( \begin{array}{l} z = x + iy \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right)$

とおくと $f$は正則

$\left( \begin{array}{l} ① \quad \phi_x = u = \psi_y \\ \phi_y = v = -\psi_x \\ \text{Cauchy-Riemann 成り立つので，} f \text{は正則} \end{array} \right)$

$f$を複素速度ポテンシャルと呼ぶ

$$f' = u - iv$$

$\left( \because \quad f' = \phi_x + i\psi_x = u - iv \right)$