応用複素関数レポート課題　part 1

桂田 祐史

2016 年 5 月 18 日

どれか 1 つの課題を選び、レポートせよ。Mathematica を検算目的では使うのは OK.

1. Euler のガンマ定数 γ は、普通 $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$ で定義されるが、この式で γ の値を計算するのは難しい。

   $$(\sharp) \qquad \gamma = -\int_0^1 \log\log\frac{1}{x}\,dx$$

   が成り立つことが知られている。数値積分することで γ の近似値を求めよ。(被積分関数 $f(x) = -\log\log\frac{1}{x}$ がどういう関数か注意すること。) 結果を何らかの方法でチェックすること。($\sharp$) がなぜ成り立つか調べることが望ましい。

2. ガンマ関数 $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ $(x>0)$ を数値積分することにより計算するプログラムを作り、どういう範囲の x に対して、どの程度の精度が得られるか、調べよ。被積分関数 $e^{-t}t^{x-1}$ がどういう関数か、理解した上で取り組むこと。(ベータ関数 $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ についても同様のことが出来るが、そうすると問 4 に近くなる。)

3. $I = \int_a^b f(x)\,dx$ に対する数値積分公式では、f の値のみ用い、f の導関数の値は使わないのが普通であるが、f' の値を使って良いならば、**補正台形公式**と呼ばれる

   $$T_{N,\text{補}} := T_N - \frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right)$$

   がある。台形公式 T_N と比べて、$T_{N,\text{補}}$ では精度がどれくらい改善されるか、適当な被積分関数を選んで実験して調べよ。中点公式 M_N はどう補正すれば良いか。

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を精度よく計算せよ (こちらが紹介した DE 公式のプログラムでは、8 桁程度の精度しかなかった)。— 「桁落ち」等、浮動小数点数について詳しい人向け。

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ に対しては、変数変換 $x = \varphi_2(t)$ を用いた DE 公式が非常に有効なことは、講義で紹介したが、$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ (値は π/e) は、同じやり方では十分な精度が出ない。被積分関数が無限個の零点を持っていることがその原因となるが、そういう場合に有効な方法を大浦拓哉氏が発見した (1989 年)。これについてレポートせよ (論文は比較的簡単に探せる)。(i) どのように計算するか、(ii) どういう被積分関数に対して有効か、(iii) この方法が有効なのはなぜか、以上 3 点を説明し、実際に数値計算して確認せよ。

   参考:　大浦氏自身の作成した DE 公式のプログラムが、`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~oura/index-j.html` で公開されている (`intde2.c`)。「この論文はどうすれば手に入るか？」という質問はいつでも受け付ける (`katurada` あっとまーく `meiji.ac.jp` までメール)。