レポート課題　part 1 ヒント

桂田 祐史

2016 年 5 月 25 日, 2016 年 7 月 31 日

- ほとんどの課題で、1 からプログラムを書く必要はない (もちろん、自分で全部書きたければそうしても良い)。こちらが用意したサンプル・プログラムをたたき台にして解けるものが多い。役に立ちそうなサンプル・プログラムを読んで、何をしているか解読すると良い。
- 特に凝る気がなければ、番号の若い問題 1,2,3 をすると良い。
- 1 は、$\int_0^1$ で、$\int_{-1}^1$ ではないが、それは適当な変数変換をして、$\int_{-1}^1$ の問題に帰着して、それから講義で習った公式を使えば良い。端点に特異性があることに注意する。
  → これについては、以下に解説を書きます。
- 2 は、x が大きいとき、x が小さいとき (0 に近いとき)、それ以外に分けて考えてみる。Mac には、UNIX の数学関数ライブラリィが入っているので、C 言語のプログラムでガンマ関数 (やその対数 — lgamma() が使える) を計算するのは簡単である。
- 3 について。台形公式を少し良くする程度なので、中点公式、台形公式、シンプソン公式が比較対象となる。5 月 11 日の数値例が参考になる (グラフ描いてね)。理論的なことは、Euler-Maclaurin 展開がヒントになる。
- 4 について。こういうことが気になる人には、挑戦的な課題だと思う。皆がこういう問題に興味を持つ必要はないけれど、興味を持つ人はバックアップします。
- 5 について。これは少し仕事量が多いので、これを解いたら、高い点をつけます。今はネットが便利なので、調べるのは簡単です (適当なキーワードで検索すれば色々ヒットします)。大浦氏は日本人なので、日本語の情報が多いというのも、手頃な課題と考えた理由です。本当は英語でも同じようにバリバリ出来てほしいけれど。

1　レポート書くためのヒント — $\int_a^b f(x)\,dx$ に対する DE 公式

有限区間 (a,b) 上の積分に対する DE 公式は、$(a,b)=(-1,1)$ の場合、すなわち

$$I=\int_{-1}^1 f(x)\,dx \tag{1}$$

に説明した。

簡潔に説明するため、むやみに一般の場合の式を書かず、何か標準的な区間 (今の場合 $(-1,1)$) を決めて、その場合に説明をすることは良くある (例: 区間における熱伝導方程式は、区間を $[0,L]$ や $[0,1]$ で話をする)。

それは一般の区間を与えられた場合でも、簡単な変数変換で $(-1,1)$ や $[0,1]$ などの「標準的な」区間の場合に帰着出来るからである。必要になった人が自分でやってくれると考えている。

今回は、初めての人もいるだろうということで、助け舟を出すことにする。

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ とするとき、

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

の数値積分にどうやって DE 公式を使うか。

二通りの方針 (A), (B) が考えられる。

(A) (毎回半分人力作戦) 問題を自分で $(-1,1)$ 上の積分に直し、その後は $(-1,1)$ における公式をそのまま使うようにプログラムを書く。

$$x = a + \frac{b-a}{2}(u+1),$$

つまり

$$x = pu + q, \quad p := \frac{b-a}{2}, \quad q := \frac{a+b}{2} \tag{3}$$

で変数変換をすると、$u = -1, 1$ にそれぞれ $x = a, b$ が対応し、$dx = p\,du$. ゆえに

$$I = \int_{-1}^{1} f(pu+q) \cdot p\,du. \tag{$\heartsuit$}$$

ここで

$$F(u) := pf\left(pu+q\right)$$

とおくと、

$$I = \int_{-1}^{1} F(u)\,du$$

であり、これは関数の名前が f から F に変わった以外は、(1) と同じである。F を計算する C 言語の関数を作り、プログラム中に入力すれば、前回説明した (1) 用の DE 公式の関数 `double de(ddfunction f, double h, int N)` が使えるだろう。

例えば $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 2$ のとき、$p = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{3}{2}$ であるから、

$$F(u) = pf(pu+q) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}} = \frac{1}{u+3}.$$

(つまり $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{u+3}$ ということだ。) そこで

```
double F(double u)
{
  return 1.0 / (u + 3.0);
}
```

と書いて、`de(F, h, N)` を呼べば良い。

(B) (一般区間の DE 公式の関数を作成する) ($\heartsuit$) に $u = \varphi_1(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ を施すと、

$$I = p \int_{-\infty}^{\infty} f\left(p\varphi_1(t) + q\right) \varphi_1'(t)\,dt.$$

これに台形公式を適用して ($\int_{-\infty}^{\infty} dt$ を $h \sum_{n=-N}^{N}$ に, t を nh に置き変える)

$$I_{h,N} = ph \sum_{n=-N}^{N} f\left(p\varphi_1(nh) + q\right) \varphi_1'(nh).$$

f, a, b, h, N が与えられたとき、この $I_{h,N}$ を計算する関数 de2() を書いてみよう。

```
double de2(ddfunction f, double a, double b, double h, int N)
{
  // 元からある de() を参考に書いてみよう
}
```