ゴールに向かって (工事中)

桂田 祐史

2016 年 7 月 6 日, 2016 年 7 月 20 日

1 期末試験準備

- 期末試験は、1 問必修、他 2 問を中から選択、という形式にする。
- 証明問題 (積分計算する公式など), 説明問題が多い。数値積分については複素関数を使うものが主。
- こちらが用意した問題以外でも、自分が勉強してきた問題を 1 つ選んで解答できることにする (採点はその内容次第)。
- 積分や級数の計算問題も入れておくが、あまり勧めない (計算が面倒で、ミスをする可能性が高いような問題しか出せないので)。

2 複素関数を用いるところ

(1), (2), (3) は 4/13, 4/20 の講義でやった ([1] を見よ)。(4), (5), (6) は 5/21 (多分) の講義でやった ([2] を見よ)。

(1) $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}\in\mathbb{C}[z]$ の分母の次数 $\geq$ 分子の次数 $+2$, $P(x)\neq 0$ $(x\in[0,\infty))$ のとき

$$I=\int_0^\infty f(x)\,dx=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{Res}\left(f(z)\log z;c\right)\quad(\text{ただし }\log\text{ は}\cdots).$$

(2) $0<\alpha<1$, $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}\in\mathbb{C}[z]$ の分母の次数 $\geq$ 分子の次数 $+2$, $P(x)\neq 0$ $(x\in[0,\infty))$ のとき

$$I=\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{Res}\left(z^\alpha f(z);c\right)\quad(\text{ただし }\log\text{ は}\cdots).$$

(3) $f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}\in\mathbb{C}[z]$ の分母の次数 $\geq$ 分子の次数 $+1$, $(\forall n\in\mathbb{Z})$ $P(n)\neq 0$ とするとき、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の零点}}\operatorname{Res}\left(f(z)s_2(z);c\right),\qquad\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の零点}}\operatorname{Res}\left(f(z)s_1(z);c\right).$$

ただし $s_1(z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$, $s_2(z)=\dfrac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}$.

(c の範囲をきちんと書いていませんでした。(2016/7/20))

(4) $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}\in\mathbb{C}[z]$ の分母の次数 $\geq$ 分子の次数 $+1$, $P(x)\neq 0$ $(x\in[a,b])$ のとき

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=-\sum_{c\text{ は }P\text{ の零点}}\operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b};c\right)\quad(\text{ただし Log は主値}).$$

(うっかりコピペして c の範囲を間違えていました。(2016/7/20))

(5) f は $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[a,b]$ の $\mathbb{C}$ 内の近傍で正則のとき、$I=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, $I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{w_k}{z-x_k}$ に対して、

$$I-I_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \Psi_n(z)f(z)\,dz,\quad \Psi_n(z):=\mathrm{Log}\,\frac{z-a}{z-b}-\sum_{k=1}^n\frac{w_k}{z-x_k}.$$

(f が分母の次数 $\geq$ 分子の次数 $+1$ を満たす有理関数の場合、$I-I_n$ は留数計算で求まる。) $d>0$, $h>0$, $f\colon\{z\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Im}\,z|<d\}\to\mathbb{C}$ は正則で、f は $\mathbb{R}$ で可積分、$0\leq\varepsilon<d$ を満たす任意の ε に対して

$$\int_{-\infty}^\infty (|f(x+i\varepsilon)|+|f(x-i\varepsilon)|)\,dx<\infty.$$

また $0\leq\varepsilon<d$ を満たす任意の ε に対して

$$\lim_{x\to\pm\infty}\int_{-\varepsilon}^\varepsilon f(x+iy)\,dy=0$$

が成り立つとき、

$$I=\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx,\quad I_n=h\sum_{n=-\infty}^\infty f(nh)$$

とおくと、

$$I-I_h=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\Psi_h(z)f(z)\,dz,\quad \Psi_h(z)=\Phi(z)-\pi\cot\frac{\pi z}{h},\quad \Phi(z):=\begin{cases}-\pi i & (\mathrm{Im}\,z>0)\\ +\pi i & (\mathrm{Im}\,z<0).\end{cases}$$

(Φ の定義、やはり i が必要でした。2016/7/7) 仮定も不足していて追加しました。2016/7/13

Γ_ε は $\mathrm{Im}\,z=-\varepsilon$ を左から右に進む直線と、$\mathrm{Im}\,z=\varepsilon$ を右から左に進む直線の和とする。

3 流体力学から

複素関数の話題と言えないもの (ベクトル解析) もあるが、二三出題する予定。

- grad, div, rot, ポテンシャルについて説明せよ。$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}=\triangle$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}=\mathbf{0}$ を示し、ポテンシャルの存在条件について述べよ。
- 連続の方程式を適当な仮定から導出せよ。
- Lagrange 微分 (物質微分) $\frac{D}{Dt}$ について説明し、流体の速度場 $\boldsymbol{v}$ の Lagrange 微分 $\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$ が流体粒子の加速度であることを説明せよ。
- Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式を書け。
- 静止流体 ($\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$) では、Navier-Stokes 方程式 (Euler 方程式も) は簡単に解ける。水の流れのないプールや池では、水面を $z=0$ として

$$p(\boldsymbol{x})=-\rho g z+\text{定数}$$

  となることを Navier-Stokes 方程式から導け。(重力がある場合は、方程式の右辺 ($-\frac{1}{\rho}\nabla p$ のある方) に $\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$ という項を加えれば良い。)
- 流体の速度ポテンシャル、等ポテンシャル面 (線)、流線、流れ関数、複素速度ポテンシャルの定義を述べよ (後の 2 つは 2 次元の流れに特有のものである)。

- 流体の流れが渦なしならば、単連結領域内で速度ポテンシャルが存在することを示せ。2 次元流体の流れが非圧縮ならば、単連結領域内で流れ関数が存在することを示せ。(これはベクトル解析におけるポテンシャルの存在条件を分かっていれば簡単、ベクトル解析を未修の人はスルーして良い。)
- 2 次元流体の流れが非圧縮かつ渦なしであれば、単連結領域内で正則な複素速度ポテンシャル f が存在し、$f' = u - iv$ が成り立つことを示せ。ただし速度場を $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とする。

参考文献

[1] 桂田祐史, 応用複素関数 講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/ouyou.pdf

[2] 桂田祐史, 数値積分 講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/numerical-integration.pdf