

複素関数と流体力学

桂田 祐史

2015年6月17日, 2017年2月25日

目次

1	はじめに	2
2	流体力学の方程式	3
2.1	連続の方程式 (質量保存), 非圧縮条件	3
2.2	応力テンソルと圧力	4
2.3	運動方程式 (運動量の保存)	6
2.4	数学的チャレンジ: Euler 方程式、Navier-Stokes 方程式は解けるか?	8
2.5	状態方程式	8
3	非圧縮流体の渦なしの流れ	9
3.1	渦度と渦なしの流れ	9
3.2	非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (3次元の場合)	9
3.3	非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (2次元の場合)	11
3.4	流線と等ポテンシャル線	14
A	ベクトル解析駆け足の復習	17
B	Poisson 方程式・Laplace 方程式に対する数値計算法	18
B.1	はじめに	18
B.2	差分法	19
B.3	有限要素法	22
B.4	基本解の利用	23
B.4.1	基本解とは	23
B.4.2	Poisson 方程式の特解	24
B.4.3	Green の積分公式 (続き)	24
B.4.4	基本解の方法	25

C 等角写像の数値計算	26
C.1 単連結領域の場合の等角写像の正規化条件	26
C.2 多重連結領域の場合	27
C.3 Jordan 領域の場合の等角写像	27

1 はじめに

流体 (fluid) とは大まかに言って、気体や液体のように“流れるもの”である。圧縮性と粘性という2つの性質の有無によって大きく分類される。

流体の運動を決定せよ、というのは、古くからある問題であるが、非線形の微分方程式が現れる場合もあり、現在でも完全には解決されていない。この講義では、簡単な状況下では、複素関数論を使って取り扱うことが出来る、ということを示す。解決出来る問題は限定的であるが、流体力学に現れる諸概念の紹介が出来るのは良いことだと考えている。

何か一つだけ覚えるとすると、次の1行になるだろう。

2次元の縮まない(非圧縮)流体の渦なしの流れ = 正則関数

複素関数論を用いて流体力学の問題を取り扱うことも可能であるし、その逆に複素関数の問題を流体力学のイメージで考えることも出来る。

複素関数と流体力学がオーバーラップするところを学ぶ際の参考書としては、まずは今井 [1] をあげておく (実はあまり読みやすくはない…)。著者の今井功先生 (1914–2004) は、流体力学の権威で、著書の [2] は流体力学の基本的な文献であるとされている。航空機の飛行に関する流体力学の研究で著名であり、「物理学の散歩道」を書いたロゲルギストのメンバーでもある。佐藤の超関数の流体力学的解釈を述べた [3] も非常に興味深い著作である。

流体力学のテキストとしては、[2] 以外に、巽 [4] をあげておく。話題が豊富であることに加え、基本的な部分の説明は特に良く行き届いている。

なお、古典とも言えるラム [5] は、数学的にしっかりしているが、複素関数とのからみについても詳しい (現在翻訳本の入手は難しいが、原著の入手は容易である)。

非圧縮流体の方程式の数学的取り扱いについては、岡本 [6] を見よ。

今回の講義の準備では、最近の研究を背景として書かれた新井 [7] も参考になった。

複素関数以外に、ベクトル解析と偏微分方程式を用いる。

ベクトル解析については、簡単な復習を付録 A に用意しておいた。ベクトル解析は、歴史的には電磁気学や流体力学を記述するために発達したもので、現在でもそれらへの応用を意識しつつ学ぶことは有益である。

偏微分方程式については、体験的入門というノリで進める。コンピューターで解く方法をいくつか (FreeFem++ 等) 紹介するので、興味のある人は試してみたい。

テンソルという言葉は初耳という人が多いかもしれない。応力テンソルについては、流体力学や弾性力学の本の解説を読むのが一番と思われる。噛んで含めるような感じで書かれているフライシュ [8] はユニークな本であるが、詳しく取り上げている例が、剛体力学の慣性テンソル、電磁場のテンソル、リーマン曲率テンソルであり、応力テンソルについては触れられていない (それでも面白い本なので、機会があればめくってみることを勧める)。

2 流体力学の方程式

いきなり連立偏微分方程式の話になる (解け、というわけでないので、あまり怖がらないこと)。

流体の状態は、ふつう次の3つ (2つ? 4つ?) のものを求めて定まる。

- 速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$
- 圧力 $p(\mathbf{x}, t)$
- 密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 ... 今回は考えない。

問 1. 水、空気のおおよその密度 (SI 単位系) を求めよ。密度の比はどれくらいか。(結果は、 10^3 kg/m^3 , 1.3 kg/m^3 , 770)

2.1 連続の方程式 (質量保存), 非圧縮条件

連続の方程式と呼ばれる次式がつねに成り立つ。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

証明 質量保存が成り立つので、任意の領域 V 内の流体の質量の変化は、 V の境界 ∂V から出入りする質量に等しい。

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dx = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

左辺に微分と積分の順序交換、右辺に Gauss の発散定理¹を用いて

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx.$$

これが任意の V について成り立つことから、(1) を得る。■

(念のため: (2) の右辺の面積分が、単位時間に ∂V をよぎって V 内に流れ込む流体の質量であることは、ベクトル解析では常識的なことであるが、説明を読みたければ、例えば桂田 [9] の例 3.3.2 を見よ。任意の領域 V での積分が等しいことから、被積分関数が等しいことを導くには、例えば $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(a; \varepsilon)|} \int_{B(a; \varepsilon)} f(x) \, dx = f(a)$ を用いれば良い。これについては、桂田 [10] の例 B.3.1 を見よ。)

¹細かい仮定は省略する。 $\int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx.$

問 2. (1) div の定義を述べよ。(2) (積の微分法) $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho \text{div} \mathbf{v}$ を確かめよ。

(1) は次のようにも書ける。

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0.$$

$$(4) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

で定義される **Lagrange 微分** (物質微分) を用いると、(1) は次のようにも書ける。

$$(5) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0.$$

物質微分について

流体の流れに沿って運動する粒子の、時刻 t での位置を $\mathbf{x}(t)$ とするとき、

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} \dot{x}_j(t) + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{Df}{Dt}.$$

問 3. 時刻 t で \mathbf{x} にある 流体粒子の加速度は $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ でなく、 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ であることを説明せよ。

密度の Lagrange 微分が 0 であること、すなわち条件

$$(6) \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

が成り立つとき、流体は非圧縮である (縮まない) という。これは

$$(7) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

と同値である。(実際、(1) (\Leftrightarrow (5)) がつねに成り立つので、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \mathbf{v} = 0$.)

普通は、(7) を非圧縮条件と呼ぶ。

ρ が定数ならば非圧縮であるが、逆は必ずしも成り立たない。時々、 ρ が定数になることを非圧縮条件と考えている人もいるが、定義は上のようになるそうである。場所ごとに濃度の異なる食塩水の流れを考えると、食塩水は縮まないが、 ρ は定数にはならない。非圧縮かつ (ある瞬間に) 空間的に一様であれば、密度は定数となる (この非圧縮性の説明は、今井 [2] による)。

2.2 応力テンソルと圧力

この項の内容には、物理学のテキストからの受け売りが多い。詳しい説明が読みたい場合は、例えば巽 [4] を見よ。

“方程式の紹介” のつもりである。

重力のような力は体積に比例するため、体積力と呼ばれるが、流体が接触することによって及びす力などは、接触面の面積に比例するため、面積力と呼ばれる。面積力の場合は単位面積当たりの力を応力 (stress) と呼ぶ。

応力は、もちろん場所に依存するが、それだけでなく面の方向と向きに依存する。しばらく場所 \mathbf{a} は固定しておいて、 \mathbf{a} における流体の応力が、面の方向と向きにどのように依存するか考察しよう。外向き単位法線ベクトルが \mathbf{n} である面についての応力を $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ と書くことにする。

(点 \mathbf{a} において) 座標平面に平行な平面 $x_i = a_i$ を通して正の側が負の側に及ぼす単位面積当たりの力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ として、 $P := (p_{ij})$ とおく。 P を応力テンソル (stress tensor) と呼ぶ。

定義から

$$\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} = \mathbf{p}(\mathbf{e}_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるが、実は任意の \mathbf{n} に対して

$$(8) \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}$$

である。

授業では、(8) が成り立つ理由を説明する余裕はない。こういうことが気になる人には (気になる方が健全だと思うが) 物理学を学ぼう。

問 4. (流体力学あるいは弾性力学の本で勉強して) (8) を示せ。

問 5. (流体力学あるいは弾性力学の本で勉強して) 応力テンソルは一般に対称テンソルであることを示せ。

\mathbf{v} を流体の速度場とするとき、

$$(9) \quad E := (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定まる E を歪み速度テンソル (変形速度テンソル) と呼ぶ。

等方的な流体の多くで、

$$(10) \quad P = -pI + 2\mu E,$$

が成り立つ (そうである)。ここで μ は粘性率 (粘性係数, viscosity) と呼ばれる非負定数であり、 $p = p(\mathbf{x}, t)$ は圧力 (pressure) と呼ばれる。

以下この文書では、(10) が成り立つような流体について論じることにする。(μ が定数である場合を Newton 流体、定数でない場合を非 Newton 流体と呼ぶそうで、我々は以下では Newton 流体だけを考察する、ということでもある。)

もしも $\mu = 0$ あるいは $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (静止流体) ならば、 $P = -pI$ であるから、応力 $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ は $-p\mathbf{n}$ に等しい。つまり応力の方向は面に垂直 (内向き)、大きさは面の方向に依らない一定値 p である。

(応力 $\mathbf{p}(\mathbf{n})$, 応力テンソル P , 圧力 p , と文字 P を使って表すものがたくさんあるけれど、混同しないように気をつけよう。)

$\mu = 0$ である流体を完全流体 (perfect fluid) または非粘性流体 (inviscid fluid) と呼ぶ。一方、 $\mu > 0$ である流体を粘性流体 (viscous fluid) と呼ぶ。

問 6. 静止している池の水圧がどのようになるか、一様な重力場を仮定して、Navier-Stokes 方程式を解いて説明せよ。

問 7. 静止した水の中では $p(\mathbf{x}) = -\rho g x_3 + \text{定数}$ であることを仮定して (ただし水面を $x_3 = 0$ と考えている)、アルキメデスの浮力の原理を示せ。

(結果: 物体 Ω の体積を $|\Omega|$ と表すことにすると、物体が水から受ける力 (いわゆる浮力) は、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho|\Omega|g \end{pmatrix}$$
 … 向きは鉛直上向き、大きさは物体の体積の水にかかる重力に等しい)

問 8. 水面から 1 m 下のところの水圧はどれくらいか。1 気圧 (1013 hPa — h は 100 倍を表し、1 Pa は 1 m^2 あたり 1 N の力がかかるということ) の何倍か。

粘性率はどの程度の大きさか 粘性率は温度に依存する。摂氏 20° で、水は粘性率 $\mu \doteq 0.001005 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。サラダ油の粘性率は、水の 60 ~ 80 倍程度とか。また空気は $\mu \doteq 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。

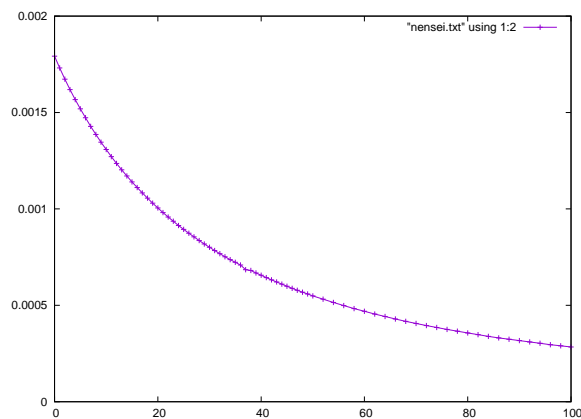


図 1: 水の粘性率の温度依存性 — 縦軸は粘性率 (単位は $\text{Pa}\cdot\text{s}$), 横軸は温度 (単位は摂氏)

2.3 運動方程式 (運動量の保存)

最初に流体を構成する粒子の加速度は $\partial\mathbf{v}/\partial t$ ではなく、 $D\mathbf{v}/Dt$ であることを注意しておく。

流体の運動方程式は

$$(11) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P.$$

ただし

$$\operatorname{div} P = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

である。

証明 任意の領域 V において

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} P d\mathbf{x}$$

が成り立つことによる。成分ごとに Gauss の発散定理を用いている。 ■

(等方的な) 完全流体では $\operatorname{div} P = -\nabla p$ であるから、運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

すなわち

$$(12) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

これが完全流体の運動方程式として有名な **Euler** 方程式である。

(等方的な) 粘性流体では $P = -pI + 2\mu E$ となることから、

$$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu (\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

さらに非圧縮の場合は、右辺の最後の項が $\mathbf{0}$ であることに注意すると

$$(13) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の運動方程式として有名な **Navier-Stokes** 方程式である。ただし

$$\nu := \frac{\mu}{\rho}$$

とおいた。この ν を動粘性率 (kinematic viscosity) と呼ぶ。

Euler 方程式も、Navier-Stokes 方程式も非線形微分方程式である (速度の物質微分 $D\mathbf{v}/Dt = \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ が非線形であることに注意する)。

$\nu \Delta \mathbf{v}$ を粘性項と呼ぶ。Navier-Stokes 方程式の粘性項を落としたものが Euler 方程式である。

一方、Navier-Stokes 方程式の非線形項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ を落とした線形方程式

$$(14) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

を Stokes 方程式と呼ぶ。線形方程式であるので、数学的には大分簡単化したことになる。乱暴な近似であるように感じられるかもしれないが、流速が小さい場合には、Stokes 方程式は Navier-Stokes 方程式の実用上十分良い近似になっている、と言われている。

余談 2.1 Navier-Stokes 方程式 (13) を初めて学んだとき、こんな(複雑な)方程式を覚えられるのだろうか、と不安に思ったものである。その方程式をコミックスの中²で見つけてちょっと驚いた。Navier-Stokes 方程式もメジャーの仲間入り? でも残念ながら誤植があった。

$$(15) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{p} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (\text{間違い探し}).$$

(\mathbf{F} は外力項であり、これは誤植ではない。また、ラプラシアン Δ を ∇^2 と書くのも、よくある流儀であって、誤植ではない。) (15) の誤植を正せ、という問題を試験で出そうか考えてみたけれど、練習問題くらいが良いだろうか。■

問 9. (15) の誤植を正せ (解答 p. 30)。

2.4 数学的チャレンジ: Euler 方程式、Navier-Stokes 方程式は解けるか?

一般に、未知関数の個数と方程式の個数が一致することが方程式が解けるための必要十分条件というわけではないが (例外はいくつもあげられる)、以下のように考えると分かりやすいと思われる。

ベクトルを成分ごとに分けて考えると、連続の方程式は1つの方程式で、運動方程式は3つの方程式である。速度と圧力で4つの未知関数であるから、密度が既知であるとすれば、連続の方程式と運動方程式を連立すると、未知関数の個数と方程式の個数が4でつりあって、速度と圧力が求まる可能性があると考えられる。

例えば密度が定数の場合、連続の方程式は非圧縮条件となり、これと Euler の方程式、または Navier-Stokes 方程式を連立させ、適当な境界条件と初期条件を与えて、解を求めよ、という数学的な問題 (初期値境界値問題) が得られる。

古典的な問題ではあるが、非線形偏微分方程式であるため難しく、現時点でも完全な解決には至っていない。これについては、岡本 [6] を見よ。

2.5 状態方程式

(ここは授業ではごく簡単に。最初の段落だけ?)

ρ が未知関数のときは、連続の方程式と運動方程式だけでは、方程式が不足していて解けない。そこで、以下に説明する状態方程式を補うことが多い。

²蛇蔵, 「決してマネしないでください。3」, 講談社 (2016) の p. 142.

p が ρ のみの関数である、というバロトロピー流体の仮定

$$p = f(\rho)$$

をおくことで解ける場合が多い。具体的には、例えば断熱変化を仮定すると、 $\exists \gamma > 1$ s.t.

$$\rho \propto p^{1/\gamma}.$$

等温変化を仮定すると、

$$\rho \propto p.$$

より一般に

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla w$$

を満たす w が存在するとき、isentropic であるといい、 w をエンタルピー (enthalpy) と呼ぶ。バロトロピー流体は isentropic である。

3 非圧縮流体の渦なしの流れ

(粘性はあっても良い。言い換えると完全流体でも、粘性流体でも、以下の話は通用する。以下の議論を見ると、Laplace 方程式や Poisson 方程式の重要性が感じられると思われる。これについては別の解説を用意する。)

3.1 渦度と渦なしの流れ

\mathbf{v} を流体の速度場とするとき、

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v}$$

を渦度 (vorticity) と呼ぶ。これは流体粒子の自転の角速度の2倍に等しい (そうである)。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ であるとき、流体は渦なしまたは非回転 (irrotational), 層状 (lamellar) という。

流体が渦なしであれば、局所的に \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在する:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi.$$

3.2 非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (3次元の場合)

流体の速度場 \mathbf{v} に対して、

$$\nabla \phi = \mathbf{v}, \quad \text{i.e.} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

を満たす ϕ (いわゆる \mathbf{v} のポテンシャル) が存在するとき、 ϕ を流体の速度ポテンシャルと呼び、その流れはポテンシャル流であるという。

問 10. (ベクトル解析の復習がてら)

- (1) ポテンシャル流は渦なしであることを示せ。
- (2) 単連結領域内の渦なしの流れはポテンシャル流であることを示せ。

以下、流体が非圧縮で渦なしであり、領域全体で \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在すると仮定する。一般に $\operatorname{div} \nabla = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ であるから、

$$\Delta \phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

非圧縮条件 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ を用いると

$$(16) \quad \Delta \phi = 0.$$

すなわち、非圧縮流体のポテンシャル流において、速度ポテンシャルは調和関数である。まとめると

渦なしならば (局所的には) 速度ポテンシャルが存在し、
さらに非圧縮ならば速度ポテンシャルは調和関数である。

例えば、流体の占める領域 Ω の境界で \mathbf{v} が分かっているならば、($\partial \phi / \partial \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$ より)

$$(17) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial \Omega)$$

であるから、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題 (16), (17) が得られ、それを解けば ϕ が求まる (\mathbf{v} も求まる)。

ここでは、連続の方程式から導かれる非圧縮条件だけから (運動方程式を用いずに) \mathbf{v} が求まった。それが出来た理由は、ポテンシャルが存在する場合は、非圧縮条件は1つの未知関数 ϕ に関する1つの方程式 (16) に帰着されるから、と言えるであろう。

上のようにして、速度が求まったとして、残る圧力は運動方程式から求められると期待される。それについて、一つの定理を紹介しよう。

完全渦なし流体のポテンシャル流においては、(さらに適当な仮定を追加において) 「一般化された Bernoulli の定理」が成り立つ。ここでは簡単のため、 ρ が定数 (つまり一様で非圧縮) と仮定しよう。 $\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla p$ であるから、Euler 方程式に代入して、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right).$$

ベクトル解析の公式

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

より

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

$\mathbf{v} = \nabla\phi$ と、 $\text{rot } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ を代入すると

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{0}.$$

これから t のみの関数 $g = g(t)$ が存在して

$$(18) \quad p = -\rho \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + g(t) \right].$$

これを一般化された **Bernoulli** の定理と呼ぶ。(以上の議論は完全渦なしのバロトロピー流体に拡張できる)

大雑把に言って、 ϕ が分かっているならば、 p も求まる、ということになる (細かい注意: 方程式の中で p は ∇p の形でしか現れないので、もともと p は一意的には定まらない)。

3.3 非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (2次元の場合)

流体の流れが2次元的であるとは、 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$ が次の条件を満たすことを言う。

(a) z 成分である w は 0.

(b) z によらない。

すなわち

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & v & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & w & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x - u_y \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \omega := v_x - u_y.$$

以下では、2次元の速度場 $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$ について考えることにして、 $\text{rot } \mathbf{v} := v_x - u_y$ と定める (割と良くやる定義)。

三次元の場合と同様に、

- \mathbf{v} がポテンシャルを持てば ($\mathbf{v} = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y)$ を満たす関数 ϕ が存在すれば)、 $\omega = 0$.
- $\omega = 0$ であれば、 \mathbf{v} は局所的にはポテンシャルを持つ。
- $\omega = 0$ であり、考えている領域 Ω が単連結であれば、 \mathbf{v} は Ω 全体でポテンシャルを持つ。

ϕ のことを流体の速度ポテンシャルと呼ぶのは 3次元と同様である。

$$\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = u_x + v_y = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

ゆえに流体が非圧縮であれば $\Delta \phi = 0$.

$\omega = 0$ であることを渦なしの定義とする本が多いが、実際には領域全体でポテンシャルが存在することを仮定しているの、ポテンシャルが存在することと渦なしの定義と考えるのが良いかもしれない。あるいはポテンシャルが多価関数になることを許して扱うことになる(そうしている場合もある)。

ところで

$$\begin{aligned} \text{非圧縮} &\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x + v_y = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x = (-v)_y \\ &\Leftrightarrow \text{局所的に } \exists \psi \quad \text{s.t.} \quad \psi_x = -v, \quad \psi_y = u. \end{aligned}$$

問 11. 上のことを確かめよ。

問 12. 流れ関数が存在し、境界条件 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ が成り立つとき、流れ関数は境界をなす各閉曲線の上で定数であることを示せ。

一般に

$$(19) \quad \psi_x = -v, \quad \psi_y = u$$

を満たす ψ を $\mathbf{v} = (u, v)$ の流れ関数 (stream function) と呼ぶ。このとき、流れ関数は次の Poisson 方程式を満たす:

$$-\Delta \psi = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = -(-v_x + u_y) = \omega.$$

ゆえに渦なしの非圧縮流ならば、流れ関数は調和関数である:

$$\Delta \psi = 0.$$

さらに、このとき

$$(20) \quad \phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x.$$

が成り立つ。

これは

$$(21) \quad f(z) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

についての Cauchy-Riemann 方程式である。ゆえに f は正則関数である。

f を \mathbf{v} の複素速度ポテンシャルという。

$f = \phi + i\psi$ であるとき、

$$f' = \phi_x + i\psi_x = u - iv$$

であるから、

$$u = \operatorname{Re} f', \quad v = -\operatorname{Im} f'.$$

f' の極形式を $f' = qe^{-i\theta}$ とすると、 $v = \begin{pmatrix} q \cos \theta \\ q \sin \theta \end{pmatrix}$. ゆえに q が速さ、 θ が速度の方向となる。

このことを背景に、 f' のことを複素速度と呼ぶ(共役複素速度と呼ぶ人もいるらしく、その気持ちわかるけれど、複素速度という方が普通である)。

まとめると、2次元の流れについて

- (1) 渦なしならば(局所的には)速度ポテンシャルが存在する。
(逆に速度ポテンシャルが存在するならば渦なしである。)
- (2) 非圧縮ならば(局所的には)流れ関数が存在する。
(逆に流れ関数が存在するならば非圧縮である。)
- (3) 非圧縮かつ渦なしならば(局所的には)速度ポテンシャル ϕ , 流れ関数 ψ が存在して、ともに調和関数である。 ψ は ϕ の共役調和関数であり、 $f := \phi + i\psi$ は複素速度ポテンシャルと呼ばれる正則関数となる。
- (4) $v = (u, v)$ の複素速度ポテンシャル f が存在するとき、 $f' = u - iv$.

注意 3.1 Ω が単連結でなくても、 Ω 全体で一価関数の流れ関数が存在する場合もある。実際、一価関数となるためには、 Ω 内の任意の閉曲線 C に対して、

$$\int_C u \, dy - v \, dx = \int_C \psi_x \, dx + \psi_y \, dy = 0$$

が成り立つことが必要十分である。(穴があると、その周りを一周積分すると0にならないかもしれないが、いつも $\neq 0$ というわけではない。) ■

問 13. 流れ関数が存在するとき、Euler 方程式は次のように書ける (p が消去できることに注目)。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - J(\psi, \Delta \psi) = 0.$$

ただし

$$J(f, g) := f_x g_y - f_y g_x.$$

(流れ関数が存在するならば非圧縮なので、この方程式は、Euler 方程式と非圧縮方程式を連立させた方程式と同値であることになる。)

3.4 流線と等ポテンシャル線

速度場や圧力が時刻によらない場合を定常解、定常流と呼ぶ(流体が止まっているのではない)。定常流を可視化するための最も適当な方法は流線を描くことである。

定義 3.2 時刻 t における流れの流線 (streamline) とは、流れの領域の中の曲線で、その各点における接線ベクトルと、その点における流れの速度ベクトルの方向が一致するものをいう。式で表すと、曲線 $s \mapsto \mathbf{x}(s)$ で、

$$\mathbf{x}'(s) \parallel \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), t)$$

を満たすものが流線である。

- 流線は時刻ごとに異なる。
- 流線は粒子の軌道とは異なる概念であるが、定常流の場合は流線は粒子の軌道と一致する。
- 他に流脈線というものもあるが省略する。(流れの実験で良く可視化されるが、これには流線とも、粒子の軌道とも一致しない。)

2次元の場合、流れ関数の任意の等高線は、流線である。

例 3.3 (円盤領域内のポテンシャル流の有限要素法による計算) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $\mathbf{b} = (1, 2)$ のとき、Laplace 方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0 \quad ((x, y) \in \Omega), \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \quad ((x, y) \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

の解として、速度ポテンシャル ϕ が求まる。その等高線 (等ポテンシャル線) を描く。同様に流れ流線を求めて、流線を描く。速度場は $\mathbf{v} = \nabla \phi$ として求まる。次のプログラム potential2.edp

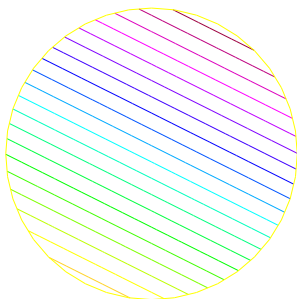


図 2: 等ポテンシャル線

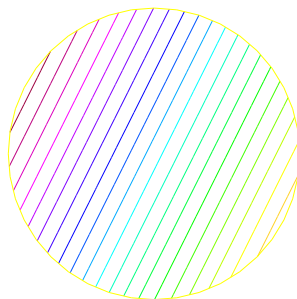


図 3: 流線

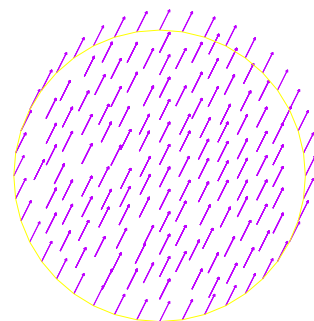


図 4: ベクトル場

を用意して、

FreeFem++ による数値計算&結果の描画

```
$ FreeFem++ potential2.edp
```

(1つ図を描くごとに止まるので、`Enter` キーを押して、次に進む。最後に `esc` キーを押して終了する。)

potential2.edp

```
// potential2d.edp
// 2次元非圧縮ポテンシャル流
// 速度ポテンシャル、流れ関数、速度を求め
// 等ポテンシャル線、流線、速度場を描く

border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");

fespace Vh(Th,P1);
Vh u, v, phi, psi;
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で、V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th) (dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma) (Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);

// 流れ関数ψを求め、その等高線（流線）を描く（ちょっと安直なやり方）
func Vn2=y-2*x;
solve Laplace2(psi,v) =
  int2d(Th) (dx(psi)*dx(v)+dy(psi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma) (Vn2*v);
plot(psi,ps="streamline.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線と流線を同時に描く
// plot(phi,psi,ps="lines.esp", wait=1);

// ベクトル場 (u,v)=∇φ を描く（ちょっと雑なやり方）
u=dx(phi);
v=dy(phi);
plot([u,v],ps="vectorfield.eps");
```

流体内にある仮想的な曲線（障害物にはならないという意味）の微小部分 $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ を通過する流量（単位時間あたりの体積）は、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$ であり、

$$\mathbf{n} ds = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = -v dx + u dy = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi.$$

従って曲線 C 全体を、左から右に通過する流量は、 C の始点を P_0 , 終点を P_1 として

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_C d\psi = \psi(P_1) - \psi(P_0).$$

ゆえに、2つの流線ではさまれた領域を流れる流体の流量は、流線上の流れ関数の値の差である。

単純閉曲線 C で囲まれる範囲内に連続の方程式が成り立たない領域あるいは点が存在する場合、湧き出しがあるいは吸い込みがあることになる。このとき C から外に湧き出る流量は、いわゆる流束積分

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

に等しい。

領域 D の境界 ∂D に対して、

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx$$

非圧縮流体であればこれは 0 である。

流体の占める領域内の任意の閉曲線 C に対して、

$$\Gamma := \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

を閉曲線 C に沿う循環と呼ぶ。

付録

A ベクトル解析駆け足の復習

さすがに線積分、面積分の定義の復習は省略する (桂田 [9])。

Ω を \mathbb{R}^n の領域とする。 Ω を定義域とする n 次元ベクトル値関数 $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ のことを Ω 上のベクトル場と呼ぶ。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ とするとき、}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{f} := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$$

とおき、 $\operatorname{div} \mathbf{f}$ を \mathbf{f} の発散 (divergence) と呼ぶ。 $\operatorname{div} \mathbf{f}$ のことを $\nabla \cdot \mathbf{f}$ とも書く。

“良い” 境界を持つ領域 Ω の閉近傍で C^1 級のベクトル場 \mathbf{f} に対して、

$$(22) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

が成り立つ (Gauss の発散定理)。ただし \mathbf{n} は、 $\partial\Omega$ 上の点における、外向き単位法線ベクトルを表すとする。

問 14. (22) は

$$(23) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f n_j d\sigma \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

と同値であることを確認せよ。

C^1 級関数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\operatorname{grad} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

とおき、 F の勾配 (gradient) と呼び、 ∇F とも書く。これはベクトル場である。

Ω 上のベクトル場 \mathbf{f} に対して、

$$\operatorname{grad} F = \mathbf{f} \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たす関数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとき、 F を \mathbf{f} のポテンシャルと呼ぶ。

\mathbf{f} の C^2 級のポテンシャル F が存在するならば、

$$(24) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (\text{in } \Omega; i, j = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

逆に C^1 級のベクトル場 \mathbf{f} が (24) を満たしている、 Ω が単連結ならば、 \mathbf{f} のポテンシャルが存在する。実際、 Ω 内に任意の選んだ定点 \mathbf{a} を始点として、 Ω 内の任意の点 \mathbf{x} を終点とする、 Ω 内の区分的に滑らかな曲線 $C_{\mathbf{x}}$ に対して

$$\int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

の値は、 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $C_{\mathbf{x}}$ の取り方によらずに定まり、

$$F(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

とおくことで得られる関数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ が \mathbf{f} の一つのポテンシャルになる。

Ω 自身が単連結でない場合も、任意の開球は単連結領域であるから、 \mathbf{f} が (24) を満たしていれば、任意の点の十分小さな近傍でポテンシャルが存在することになる。

3次元の C^1 級ベクトル場 \mathbf{f} に対して、

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

とおき、 \mathbf{f} の回転 (rotation) と呼び、 $\nabla \times \mathbf{f}$, $\operatorname{curl} \mathbf{f}$ と表す。 $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ は 3次元のベクトル場である。

3次元の C^1 級ベクトル場 \mathbf{f} に対して、(24) は

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

と同値である。ゆえに 3次元のベクトル場 \mathbf{f} がポテンシャルを持てば、 $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ が成り立ち、逆に $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ が成り立つならば、単連結領域においてポテンシャルが存在する。

2次元のベクトル場 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対しては、(24) は

$$v_x - u_y = 0$$

と同値であり、同様のことが成り立つ。

B Poisson 方程式・Laplace 方程式に対する数値計算法

B.1 はじめに

Poisson 方程式・Laplace 方程式の境界値問題は、素性の良い問題なので、色々な数値解法が適用できる。

モデル問題として

$$(25) \quad -\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(26) \quad u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_D),$$

$$(27) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_N).$$

簡単のための1次元版として、 $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_D = \{0\}$, $\Gamma_N = \{1\}$, $g_1(0) = \alpha$, $g_2(1) = \beta$ の場合は、

(P)

$$(28) \quad -u''(x) = f(x) \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(29) \quad u(0) = \alpha,$$

$$(30) \quad u'(1) = \beta$$

ポピュラーな差分法 (FDM), 有限要素法 (FEM) を手短かに紹介してから、Laplace 方程式 ($f = 0$) の場合に基本解を利用する方法の解説を行う。

B.2 差分法

常微分方程式の初期値問題に対する Euler 法, Runge-Kutta 法などを学んだことがあれば、理解しやすいであろう。

差分法 (finite difference method, FDM) は次の2つの考え方をを用いる。

- 微分方程式に含まれる導関数を差分商で置き換えた差分方程式の解を近似解に採用する。
- 領域を格子に区切って、格子点上の値を求めることを目標にする。

$$(31) \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (h \rightarrow 0).$$

$$(32) \quad f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (h \rightarrow 0).$$

$$(33) \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

$$(34) \quad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

$$(35) \quad f'''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

$$(36) \quad f''''(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x,y) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

多変数関数の偏導関数はこれらを適当に組み合わせて近似する。例えば

$$\Delta u(x, y) = \frac{u(x+h_x, y) - 2u(x, y) + u(x-h_x, y)}{h_x^2} + \frac{u(x, y+h_y) - 2u(x, y) + u(x, y-h_y)}{h_y^2} + O(h_x^2 + h_y^2).$$

例 B.1 1次元 Poisson 方程式

$$-u''(x) = f(x) \quad (x \in (0, 1)),$$

$$u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta.$$

$N \in \mathbb{N}$ に対して、 $h = \frac{1}{N}$, $x_i = ih$ において、途中略で

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2\beta h \end{pmatrix}$$

という差分方程式が得られる。ただし、境界条件 $u'(1) = \beta$ は仮想格子点 x_{N+1} を導入して

$$\frac{U_{N+1} - U_{N-1}}{2h} = \beta$$

と近似した。■

例 B.2 (2次元 Poisson 方程式の同次境界値問題) $\Omega := (0, W) \times (0, H)$ における Poisson 方程式の

$$-(u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)) = f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

$$u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega).$$

$N_x, N_y \in \mathbb{N}$ として、

$$h_x := \frac{W}{N_x}, \quad h_y := \frac{H}{N_y}, \quad x_i = ih_x, \quad y_j = jh_y$$

として $u(x_i, y_j)$ の近似値 U_{ij} を求めることを目標とする。

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,1} \\ \hline U_{12} \\ U_{22} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{1,N_y-1} \\ U_{2,N_y-1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,N_y-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_1) \\ \vdots \\ f(x_{N_x-1}, y_1) \\ \hline f(x_1, y_2) \\ f(x_2, y_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_x-1}, y_2) \\ \hline \vdots \\ \hline f(x_1, y_{N_y-1}) \\ f(x_2, y_{N_y-1}) \\ \vdots \\ f(x_{N_x-1}, y_{N_y-1}) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\left(I_{N_y-1} \otimes \frac{1}{h_x^2} (2I_{N_x-1} - J_{N_x-1}) + \frac{1}{h_y^2} (2I_{N_y-1} - J_{N_y-1}) \otimes I_{N_x-1} \right) \mathbf{U} = \mathbf{f}.$$

例 B.3 例えば熱方程式

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

は $(x, t) = (x_i, t_n)$ において、左辺を前進差分、右辺を中心差分で置き換えると

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t) = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

を得る。そこで

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

という差分方程式の解 u_i^n を $u(x_i, t_n)$ の近似解とすることが考えられる。

$$U_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n).$$

差分解 (差分方程式の解) が偏微分方程式の解に収束することを示すには、偏微分方程式の問題ごとの分析が必要である。Poisson 方程式や熱方程式については、最大値原理の離散版が成り立つことを利用した証明がある。

the Lax equivalence theorem (Lax の同等定理)

適切な (well-posed) 線形初期値問題の適合 (consistent) な差分スキームが収束するにはそれが (Lax-Richtmeyer の意味で) 安定であることが必要十分である。

普通の差分方程式を作ると適合性は明らかに成り立つので、後は安定性をチェックするだけで収束が証明できることになる。

- 差分方程式の導出はとりあえず簡単だが、差分解の収束や安定性の証明は、もとの偏微分方程式の性質の証明と関連深い。(結局勉強をサボるのは難しい。)
- 多次元の場合、境界が曲がっている領域を扱うには工夫が必要になる。(四角い領域に写像してから解く, 不等間隔差分を用いる)

B.3 有限要素法

Laplace 方程式の境界値問題に対する Dirichlet の原理は、Poisson 方程式に対しても拡張できる。

これも簡単のため、1次元版で論じる (多次元でも本質的な違いはない)。

(P)

$$(37) \quad -u''(x) = f(x) \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(38) \quad u(0) = \alpha,$$

$$(39) \quad u'(1) = \beta$$

$H^1(0, 1)$ を 1 階の Sobolev 空間として

$$X := \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0\}, \quad X_{g_1} := \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = \alpha\}$$

とおく。

上の境界値問題の解は、次の 2 つの問題 (W), (V) の解でもある。

まず弱形式 (weak form)、あるいは弱定式化 (weak formulation) した問題。

(W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(1) \quad (v \in X).$$

変分問題にしたもの。

(V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$J[u] = \min_{w \in X_{g_1}} J[w].$$

ただし

$$J[u] := \frac{1}{2} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx - \beta v(1).$$

(W) と (V) は同値な問題であり、常に一意的な解を持つことが分かる。

逆に f がある程度滑らかであれば、(W), (V) の解は (P) の解であることが示される。

そこで (P) を解く代わりに、(W) あるいは (V) を解くことを目指す (変分法の直接法と呼ばれる解き方)。

$\{x_i\}_{i=0}^N$ を

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$$

を満たす数列として、

$$\tilde{X} := \{v \in C([0, 1]) \mid v \text{ は小区間 } [x_{i-1}, x_i] \text{ では 1 次多項式と一致}\},$$

$$\hat{X} := \{v \in \tilde{X} \mid v(0) = 0\},$$

$$\hat{X}_{g_1} := \{v \in \tilde{X} \mid v(0) = \alpha\}$$

とおくとき、 X を \hat{X} で、 X_{g_1} を \hat{X}_{g_1} で置き換えた問題を考える。 \tilde{X} の要素を区分 1 次多項式と呼ぶ。

次の 2 つの問題は同値であり、常に一意的な解 \hat{u} を持つ。それを近似解として採用する。

(\hat{W})

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\int_0^1 \hat{u}'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(1) \quad (v \in \hat{X}).$$

(\hat{V})

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$J[\hat{u}] = \min_{w \in \hat{X}_{g_1}} J[w].$$

実は $\{x_i\}$ が $[0, 1]$ の N 等分点であるとき、有限要素解 \hat{u} の x_i での値は、差分解 U_i と一致する。もちろん、いつもそうなるわけではない (もしそうならば、2 つの方法を考える意味がない)。

有限要素法には以下の利点がある。

- 弱形式の議論を済ませてあれば、有限要素解の厳密解への収束の議論は簡単になる。
- 多次元問題の場合に、長方形領域以外でも、それほど苦勞なく解析が可能である。
- プログラムの自動生成がしやすい。

B.4 基本解の利用

B.4.1 基本解とは

3 次元の場合 $E(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|}$, 2 次元の場合 $E(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}|$ を $-\Delta$ の基本解 (the fundamental solution) と呼ぶ。

E は原点以外では調和関数であることは簡単な計算で分かる:

$$\Delta E(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

さらに、超関数の言葉で言うと (原点まで込めて)

$$(40) \quad -\Delta E = \delta$$

が成り立つ。ここで δ は Dirac のデルタ関数である。

物理的な解釈: 原点に置かれた単位点電荷の作る電場のポテンシャルが $E(x)$ である。

B.4.2 Poisson 方程式の特解

$$U(x) := \int_{\Omega} E(x-y)f(y)dy$$

とおくと、

$$-\Delta U = f$$

が成り立つ (証明は結構難しい)。つまり U は Poisson 方程式の特解である。

$v := u - U$ とおくと、 $\Delta v = 0$ が成り立つので、 $f = 0$ の場合の問題が一般に解ければ良いことになる。(実際には U を計算することは難しいことが多く、数値計算向きではないかもしれない。)

B.4.3 Green の積分公式 (続き)

Green の第 2 積分公式

$$\int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx$$

を利用して、次の Green の第 3 積分公式を得る (証明の詳細は略するが、関数論の Cauchy の積分公式の証明のように、 x を中心とする球を除いた領域で Green の公式を適用してから、球の半径を 0 に近づける。詳しくは桂田 [11] の §3.5 を見よ。)

$$-\int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) d\sigma_y = \begin{cases} u(x) & (x \in \Omega) \\ \frac{1}{2}u(x) & (x \in \partial\Omega) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}). \end{cases}$$

($x \in \partial\Omega$ の場合は左辺第 3 項は主値積分である。)

(a) u が $\Delta u = 0$ を満たすならば、 $x \in \Omega$ に対して、

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) d\sigma_y.$$

すなわち、 u が調和関数であるとき、 $u, \partial u/\partial n$ の $\partial\Omega$ での値が分かれば、 $u(x)$ の値がこの式で求まることになる (正則関数の Cauchy の積分公式に似ていて、使いでのある公式)。境界条件から半分は分かっているので、もう半分求めれば良いことになる。

以下は細かい話になるが: 例えば $\Gamma_N = \emptyset$ のとき、

$$\frac{1}{2}g_1(x) = \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y - \int_{\partial\Omega} g_1(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) d\sigma_y.$$

これから $\partial\Omega$ 上で $\partial u/\partial n$ を求めることが出来る。

(b) u が $\partial\Omega$ の近傍で 0 ならば、 $x \in \Omega$ に対して、

$$- \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) d\mathbf{y} = u(x).$$

この事実を超関数解釈すると $-\Delta E(x-\cdot) = \delta(\cdot-x)$ となる。

B.4.4 基本解の方法

簡単のため、 $\Gamma_N = \emptyset$ の場合の Laplace 方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad (x \in \Omega), \\ u(x) &= g_1(x) \quad (x \in \Gamma_D = \partial\Omega) \end{aligned}$$

を取り上げる。

Ω が滑らかな境界を持つ有界領域の場合に、この境界値問題が一意的な解を持つことは知られている。

Ω が (円盤とか、長方形とか) 特別な形をしている場合に、解 u を求める公式はいくつか知られているが、ここでは多くの場合に使える数値解法を紹介する。一見素朴であるが、多くの場合に良好な近似解を得ることが出来る。

Ω の外部に Ω を「囲むように」点 $\{y_j\}_{j=1}^N$ を取り、

$$u^{(N)}(x) = \sum_{j=1}^N Q_j E(x-y_j)$$

とおく。ここで Q_1, Q_2, \dots, Q_N は未定係数である。これらが何であっても

$$\Delta u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_N\})$$

が成り立つ。もし $u^{(N)}(x) = g_1(x)$ ($x \in \partial\Omega$) が成り立てば $u^{(N)}$ は解である。さすがにそんな都合の良いことはめったにおこらないが、多くの場合、境界 $\partial\Omega$ 上で選んだ点 x_1, \dots, x_N に対して

$$u^{(N)}(x_i) = g_1(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

を満たすように Q_j を決めることが出来る。

$$u^{(N)} \doteq u$$

が成り立つことは期待できる。この近似解法を the method of fundamental solutions (基本解の方法, fundamental solution method), あるいは代用電荷法 (charge simulation method) と呼ぶ。

次のような利点がある。

- しばしば誤差の指数関数的減少

$$(\exists C)(\exists \rho \in (0, 1))(\forall N \in \mathbb{N}) \quad \|u - u^{(N)}\| \leq C\rho^N$$

が成り立つ (この場合、差分法や有限要素法と比較して効率が高くなりうる)。

- $u^{(N)}$ 自身が調和であり、特に

$$\text{grad } u^{(N)}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \frac{x - y_j}{|x - y_j|^2} & (2 \text{次元の場合}) \\ -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \frac{x - y_j}{|x - y_j|^3} & (3 \text{次元の場合}) \end{cases}$$

のように grad が直接計算できる。

基本解の方法以外に、基本解を利用する方法として、境界要素法 (boundary element method, BEM) がある。

C 等角写像の数値計算

Ω を \mathbb{C} の単連結領域で、 \mathbb{C} とは異なるものとする。Riemann の写像定理により、双正則写像

$$\varphi: \Omega \rightarrow D_1 = D(0; 1)$$

が存在する (Riemann の写像定理)。

φ のことを領域 Ω の等角写像と呼ぶ。

講義ではそれを納得してもらえるところまで解説できなかったけれど、問題となる領域の等角写像はしばしば役に立つ。そのため、その計算方法は重要である。

C.1 単連結領域の場合の等角写像の正規化条件

Ω を \mathbb{C} の単連結領域で、 \mathbb{C} とは異なるものとする。Riemann の写像定理により、 Ω の等角写像

$$\varphi: \Omega \rightarrow D_1 = D(0; 1)$$

が存在する。この写像は一意的には定まらないが、次が成り立つ。

命題 C.1 Ω を \mathbb{C} とは異なる \mathbb{C} の単連結領域で、 z_0 を Ω の任意の点とする。このとき

$$(41) \quad \varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0$$

という条件を満たす双正則写像 $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$ は、存在すれば一意的である。

証明 φ_1, φ_2 がその条件を満たすとする。 $\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ とおくと、 $\psi: D_1 \rightarrow D_1$ は双正則写像である。そして、

$$\psi(0) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(0)) = \varphi_2(z_0) = 0$$

であるから、

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| = 1)(\forall z \in D_1) \quad \psi(z) = \varepsilon \frac{z - 0}{1 - \bar{0}z} = \varepsilon z.$$

ところが、

$$\varepsilon = \psi'(0) = \varphi_2'(z_0) \frac{1}{\varphi_1'(z_0)} > 0.$$

であるから、 $\varepsilon = 1$. ゆえに $\psi(z) = z$. ゆえに $\varphi_2 = \varphi_1$. ■

C.2 多重連結領域の場合

Ω が単連結でないときは? D_1 は単連結であるから、 $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$ は双正則ではありえない。
 \mathbb{C} の領域 Ω は、 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ が n 個の連結成分からなるとき、 n 重連結領域であるという。

Ω が2重連結領域である場合、 $\exists r \in (1, \infty), \exists \varphi: \Omega \rightarrow A(0; 1, r)$ 双正則。

三重連結以上の場合も、調べられている。

C.3 Jordan 領域の場合の等角写像

\mathbb{C} 内の Jordan 閉曲線 C に対して、 C の“囲む”領域 Ω が定まり、 Ω は単連結である (Jordan 曲線定理)。

このとき、 $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$ が双正則写像で、 (41) を満たすとしよう。 Ω の閉包から閉円盤への同相写像 $\tilde{\varphi}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}_1$ に拡張できる (Carathéodory の定理)。以下 $\tilde{\varphi}$ のことも φ と書くことにする。

関数 $\frac{\varphi(z)}{z - z_0}$ は Ω で正則であり、かつ 0 という値を取らない。 Ω が単連結であるから、 $\log \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$ の一価正則な分枝が取れる。その実部、虚部をそれぞれ u, v とおく:

$$u(z) + iv(z) := \log \frac{\varphi(z)}{z - z_0}.$$

両辺の実部を取ると、

$$u(z) = \log \frac{|\varphi(z)|}{|z - z_0|}.$$

$z \in \partial\Omega$ のとき、 $\varphi(z) \in \partial D_1$, すなわち $|\varphi(z)| = 1$ であるから、

$$(42) \quad u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \partial\Omega).$$

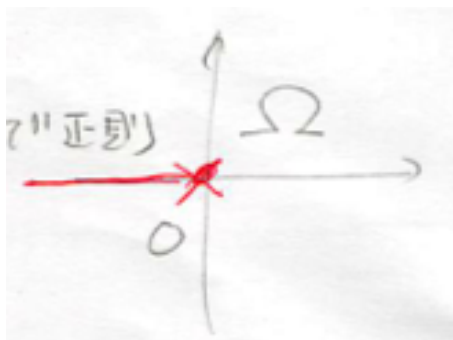
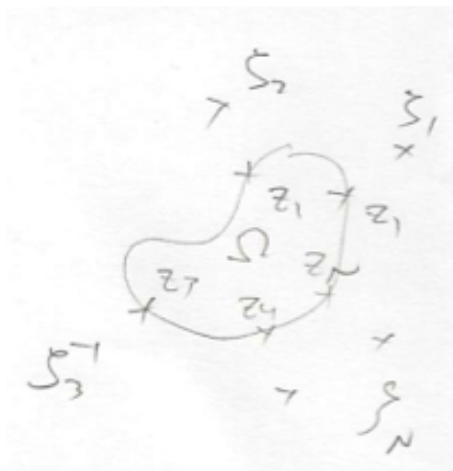
一方

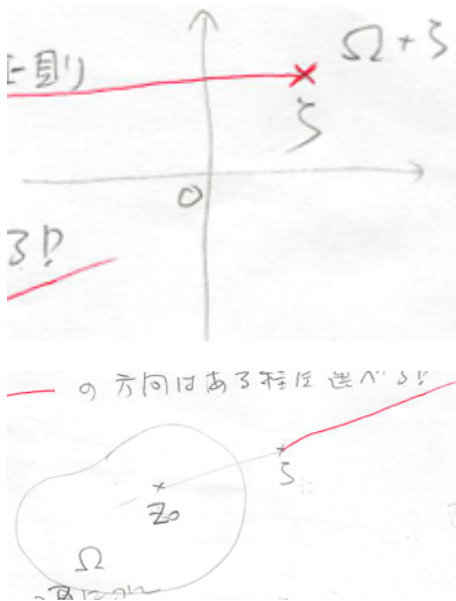
$$(43) \quad \Delta u(z) = 0 \quad (z \in \Omega).$$

(43), (42) は、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題である。これを解いて u を求め、 v を u の共役調和関数で、 $v(z_0) = 0$ を満たすものとする

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp[u(z) + iv(z)].$$

(書きかけ: 201507 某日等角写像天野の方法.pdf を入力せよ。)





解答 1. 水 1 cm^3 は 1 g であるから、 1 m^3 では、 $100^3 \text{ g} = 10^6 \text{ g} = 10^3 \text{ kg}$. ゆえに $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$. (1 立方メートルの水は 1 トン)

空気は、酸素 (分子量 32) と窒素 (分子量 28) が、おおよそ 20:80 の体積比で混合されているので (もう少し精密にやると酸素、窒素、アルゴンが 21 : 78 : 1)、平均の分子量は、 $32 \times 0.2 + 28 \times 0.8 = 28.8$. ゆえに 1 mol の質量は $28.8 \text{ g} = 2.88 \times 10^{-2} \text{ kg}$. この体積は、 0°C , 1 気圧で、 $22.4 \text{ l} = 2.24 \times 10^4 \text{ cm}^3 = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$. ゆえに $\rho = \frac{2.88 \times 10^{-2}}{2.24 \times 10^{-2}} \text{ kg/m}^3 \doteq 1.3 \text{ kg/m}^3$. (もう少し精密に計算すると 1.293 kg/m^3)

水の密度 \div 空気の密度は、 $\frac{10^3}{1.3} \doteq 770$. ■

解答 2. (1) $\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$. (2) (簡単なので略) ■

解答 3. (準備中)

解答 4. (準備中)

解答 5. (準備中 — 角運動量の保存によるそうだ。)

解答 6. g を重力加速度として、 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ となる。静止しているということは $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$

ということであるから、Navier-Stokes 方程式は、

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f},$$

すなわち

$$0 = -\frac{p_x}{\rho}, \quad 0 = -\frac{p_y}{\rho}, \quad 0 = -\frac{p_z}{\rho} - g.$$

これから $p(x, y, z) = -gz + F(t)$. 水面を $z = 0$ として、 $F(t)$ を大気圧 $p_{\text{大気}}$ にすると、

$$p(x, y, z) = p_{\text{大気}} - gz. \blacksquare$$

解答 7. 物体の占める領域を Ω とする。物体表面 $\partial\Omega$ の微小部分 $d\sigma$ が水から受ける力は、 $-pn d\sigma$ であるから、物体全体では、

$$\mathbf{F} := \int_{\partial\Omega} (-pn) d\sigma.$$

この第 j 成分は、発散定理 (23) によって

$$F_j = - \int_{\partial\Omega} pn_j d\sigma = - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho g d\mathbf{x} = \rho g |\Omega| & (j = 3) \\ \int_{\Omega} 0 d\mathbf{x} = 0 & (j = 1, 2). \end{cases}$$

ゆえに

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g |\Omega| \end{pmatrix}. \blacksquare$$

解答 8. 上の面が水面に含まれる、1 辺が 1 m の立方体を考える。底面に 1 m^3 の水に働く重力がかかる。水は $1 \text{ cm}^3 = (10^{-2})^3 \text{ m}^3$ の質量が $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ であるから、 1 m^3 の水に働く重力は

$$10^6 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 9.81 \times 10^3 \text{ N}.$$

ゆえに水圧は $9.81 \times 10^3 \text{ Pa}$. 一方、大気圧は $1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ であるから、大気圧は水圧の $\frac{1.013 \times 10^5}{9.81 \times 10^3} \doteq 10.3$ 倍である。大気圧の方が 1 桁大きい。水面から 10 m 下のところの水圧がほぼ 1 気圧ということになる。意外に大気圧は大きい (と筆者は感じた)。■

解答 9. 右辺第 1 項は $\frac{1}{p} \nabla p$ でなく、 $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ である。

- (i) 密度 ρ であるべきところが、圧力 p になってしまっているのは、字が似ているからだろう。(13) の導出の過程で、両辺を ρ で割る操作があったことを思い出して欲しい。
- (ii) 負号 $-$ が落ちているのも細かいようだが、(単位体積あたりの) 力 (の一部) を表す項で、(粘性を無視すればつねに) 圧力の高い方から低い方に力が働くことが納得できるので、 $-$ がないとおかしい、と気付けるはずである。■

解答 10. (1) 一般に $\text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$ が成り立つ。(2) 領域内の定点から任意の点 \mathbf{x} にいたる領域内の曲線 $C_{\mathbf{x}}$ を取って、 $\phi(\mathbf{x}) = \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ とおくと、 ϕ は \mathbf{v} のポテンシャルである。■

解答 11. 要点のみ: $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} u dy - v dx$ とする。■

解答 12. $\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$ であることが導かれる。■

解答 14. (準備中)

参考文献

- [1] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1989).
- [2] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 後編は書かれなかった。
- [3] 今井功：応用超関数論 I, II, サイエンス社 (1981).
- [4] ^{たつみともまさ} 巽 友正：流体力学, 培風館 (1982).
- [5] ホレースラム：ラム流体力学 1, 2, 3, 東京図書 (1988), Lamb, Hydrodynamics, Dover Publications (1945) の今井功, 橋本英典による翻訳である。原著の PDF がネットで入手できる。
- [6] 岡本久：ナヴィエ・ストークス方程式の数理, 東京大学出版会 (2009).
- [7] 新井紀夫：複素流体力学ノート, コロナ社 (2012).
- [8] ダニエル・フライシュ：物理のためのベクトルとテンソル, 岩波書店 (2013/1/30), 川辺 哲次 訳。
- [9] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (2006~)。
- [10] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf> (2008)。
- [11] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」), <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/pde/pde2013.pdf> (1997 年~)。