2016 年度 応用複素関数 期末試験問題

2016 年 7 月 27 日 (水曜)5 限 16:00〜17:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1 は必修問題であり、必ず解答すること。それ以外の **2〜8** (配点はどれも同じ) から 2 問選択して解答せよ。

1. 数値積分の DE 公式について説明せよ (目的、公式、公式がどのように導かれたか、他の数値積分公式との比較、特徴、プログラムの書き方などを書くこと)。

2. $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $P(x) \neq 0$ $(x \in [0,\infty))$ とするとき、$I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ を留数を用いて計算する公式を求めよ (単に公式を書くだけでなく、証明すること)。

3. $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $P(n) \neq 0$ $(n \in \mathbb{Z})$, $s(z) = \dfrac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s(z); c\right)$ が成り立つことを示せ。ただし、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$z \in \mathbb{C}$ が $|\operatorname{Im} z| = N + 1/2$ または $|\operatorname{Re} z| = N + 1/2$ を満たすならば $|s(z)| \leq 2\pi$ であることは証明せずに用いて良い。

4. 次のうちいずれか一方を選んで解け。(1) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ を求めよ。　(2) $S = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ。

5. 複素平面内の実軸上の有界閉区間 $[a,b]$ を含む開集合 D で正則な関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ に対し、$[a,b]$ 上の定積分 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を、積分公式 $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)A_k$ (x_k, A_k については、授業で説明した仮定を満たすとする) で計算する場合の誤差解析について、以下の問に答えよ。

適当な閉曲線 C、適当な関数 Φ と Λ_n に対して、

$$(\sharp)\qquad I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi(z) f(z)\,dz, \quad I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Lambda_n(z) f(z)\,dz$$

が成り立つことを授業で紹介した。C, Φ, Λ_n はどのようなものか書け (関数については、どの領域で正則か述べること)。また $(\sharp)$ が成り立つことを証明せよ。

6. 流体力学における連続の方程式を適当な仮定から導出せよ。

7. (1) 流体力学における Lagrange 微分 (物質微分) について説明せよ。(2) Euler 方程式, Navier-Stokes 方程式を書け。(3) 静止している池の水圧がどのようになるか、一様な重力場を仮定して、Navier-Stokes 方程式を解いて説明せよ。

8. (1) 流体力学における次の用語の定義を述べよ。
(a) 非圧縮　(b) 渦なし　(c) 速度ポテンシャル　(d) 流線　(e) (2 次元流体における) 流れ関数
(2) 次のことを示せ。(a) 流体が渦なしならば、単連結領域内で速度ポテンシャルが存在する。(b) 2 次元流体が非圧縮ならば、単連結領域内で流れ関数が存在する。
(3) 複素速度ポテンシャルについて説明し、流線と等ポテンシャル線の関係について述べよ。