応用複素関数

数値計算実習

桂田 祐史
katurada AT meiji.ac.jp

2016 年 6 月 29 日, 2016 年 6 月 29 日

1 レポート課題 part 2

(工事中)

締め切りは 8 月 1 日 18:00, 提出方法は Oh-o! Meiji. もし容量制限に引っかかった場合は、早目にメールで相談。

以下 [1], [2], [3] のいずれかをして下さい。使用するプログラミング言語の選択は基本的に自由ですが、桂田が相談に乗れるためには、自分の MacBook Air で実行できて、見せることが出来る必要があります。

[1] (1) 湧き出しまたは渦糸の等ポテンシャル線、流線、ベクトル場を適当に (流れの様子が良く分かるように) 可視化する。(2) 自分で思いつく正則関数を 5 つ以上試し、そのうちの 1 つを選んで、それを複素速度ポテンシャルとする流れについて、等ポテンシャル線、流線、ベクトル場を適当に可視化し、それをもとにどういう流れであるか説明する。凝りたければ、今井 [1] 等を見て関数を選ぶと良い。

[2] 渦なし非圧縮の定常流で、流体の占める領域の境界での流速が分かっている場合に、速度ポテンシャル、流れ関数を有限要素法で計算して、等ポテンシャル線, 流線, ベクトル場を可視化せよ。(ただし、講義で注意したように、解が存在するためには $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = 0$ が必要である。)

[3] (準備中)

2　正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れとその可視化

2.1　6/22 の話のおさらい

流体の 2 次元の流れを考える。速度場を

$$\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

とする。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} := u_x + v_y$$

で定義される $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ を発散と呼び、いたるところ

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

であるとき、流れは非圧縮であるという。

$$\omega := v_x - u_y \quad (\text{これも } \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \text{ と書くことがある})$$

で定義される ω を渦度と呼び、いたるところ

$$\omega = 0$$

であるとき、流れは渦なしであるという。

- 渦なしならば速度ポテンシャル ϕ が存在: $\exists \phi$ s.t. $\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$. (ただし ϕ は、一般には多価関数である。単連結領域の場合は一価関数である。) さらに非圧縮ならば $\triangle \phi = 0$.
  一価関数である場合、例えば領域の境界 $\partial\Omega$ 上で $\boldsymbol{v}$ が得られれば、
  $$\triangle \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$
  これは Laplace 方程式の境界値問題として、解くことが出来る。

- 非圧縮ならば流れ関数 ψ が存在: $\exists \psi$ s.t. $\begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$. (ただし ψ は、一般には多価関数である。単連結領域の場合は一価関数である。) さらに渦なしならば $\triangle \psi = 0$.
  一価関数である場合、領域の境界上の $\boldsymbol{v}$ が得られれば、やはり ψ は Laplace 方程式の境界値問題 (どんな？これは各自の練習問題) の解として得られる。

- 渦なし非圧縮流に対して、複素速度ポテンシャル $f := \phi + i\psi$ は正則関数で、$f' = u - iv$. (逆に任意の正則関数は、ある渦なし非圧縮流の複素速度ポテンシャルである。)

- 曲線で、その接線ベクトルが速度ベクトルと方向が同じものを流線と呼ぶ。定常流の場合、流線は流体の粒子の軌跡と一致する。$\psi =$ 定数 は流線を表す。

- $\phi =$ 定数 で表される曲線を等ポテンシャル線と呼ぶ。

- 渦なし非圧縮流では、流線と等ポテンシャル線は互いに直交する。

2.2　簡単な流れ

2.2.1　一様な流れ

$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = cz$ の場合、$c = Ue^{-i\alpha}$ $(U > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$ とする。複素速度は

$$u - iv = f'(z) = Ue^{-i\alpha}.$$

すなわち

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U\cos\alpha \\ U\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\begin{cases} \phi(x,y) = \mathrm{Re}\left((U\cos\alpha - i\sin\alpha)(x+iy)\right) = U(x\cos\alpha + y\sin\alpha), \\ \psi(x,y) = \mathrm{Im}\left((U\cos\alpha - i\sin\alpha)(x+iy)\right) = U(-x\sin\alpha + y\cos\alpha). \end{cases}$$

等ポテンシャル線も、流線も平行直線群で、それらは互いに直交する。

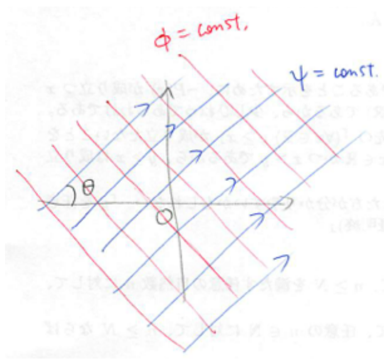

図 1: 一様な流れ

2.2.2　湧き出し、吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m\log z$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$ の場合 (多価関数！)。(多価関数は気持ち悪いかもしれないが、しばらく我慢。$\sqrt{z}$ などと違って微分すると一価関数になるので、案外面倒なことにはならない。)

$z = re^{i\theta} = x + iy$ とすると、

$$u(x,y) - iv(x,y) = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{r}e^{-i\theta} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

すなわち

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{m}{r}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

(方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と同じ、$m > 0$ ならば向きも同じ、$m < 0$ ならば反対向き、大きさ $|\boldsymbol{v}| = \frac{|m|}{r}$ は原点から遠いほど小さい。)

速度ポテンシャルと流れ関数は、$f(re^{i\theta}) = m\left(\log r + i\left(\theta + 2n\pi\right)\right)$ $(n \in \mathbb{Z})$ より

$$\begin{cases} \phi = m\log r, \\ \psi = m\left(\theta + 2n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

(ϕ は一価関数、ψ は多価関数である。)

等ポテンシャル線は、原点を中心とする円であり、流線は、原点を端点とする半直線である。

原点の周りを一周する任意の閉曲線 C を取ると、C から外に湧き出る流量 (流束) は

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \int_C d\psi = \operatorname{Im}\int_C df = \operatorname{Im}\int_C f'(z)dz = \operatorname{Im}\int_C \frac{m}{z}dz = 2\pi m \quad (\text{怪しい雰囲気の計算})$$

と一定値である。

(計算の確認: 既に見たように、$\boldsymbol{n}\,ds = \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix}$ であり、$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = -v\,dx + u\,dy = \psi_x\,dx + \psi_y\,dy = d\psi$ である。また、$df = f'(z)\,dz = (\phi_x + i\,\psi_x)(dx + i\,dy) = (\phi_x\,dx - \psi_x\,dy) + i(\psi_x\,dx + \phi_x\,dy) = (\phi_x\,dx + \phi_y\,dy) + i\,(\psi_x\,dx + \psi_y\,dy) = d\phi + i\,d\psi$.)

$m > 0$ ならば原点から湧き出す流れ、$m < 0$ ならば原点に吸い込まれる流れを表す。

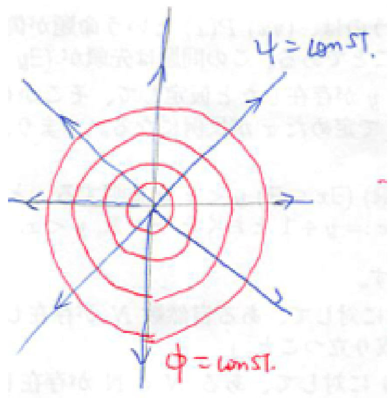

図 2: 湧き出し

2.3　渦糸

(上の f の m を純虚数に変えてみる。)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$ の場合。$z = re^{i\theta} = x + iy$ とすると、

$$u(x,y) - iv(x,y) = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}e^{-i\theta} = \frac{i\kappa}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\kappa}{r}(\sin\theta + i\cos\theta)\,.$$

すなわち

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

($\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{-\pi}{2} & -\sin\frac{-\pi}{2} \\ \sin\frac{-\pi}{2} & \cos\frac{-\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ であるから、$\boldsymbol{v}$ の方向は、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\pi/2$ 回転した方向である。「応用複素関数」なんだから、行列でなくて、$\sin\theta + i\,(-\cos\theta) = -i\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ と説明すべきか？)

速度ポテンシャルと流れ関数は、$f\left(re^{i\theta}\right) = i\kappa\left(\log r + i\,(\theta + 2n\pi)\right)$ $(n \in \mathbb{Z})$ より

$$\begin{cases} \phi = -\kappa\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \psi = \kappa \log r. \end{cases}$$

流線は原点を中心とする円で、等ポテンシャル線は原点を端点とする半直線である。

原点に置かれた渦糸の流れと呼ばれる。渦度は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 全体で 0 であることに注意しよう。

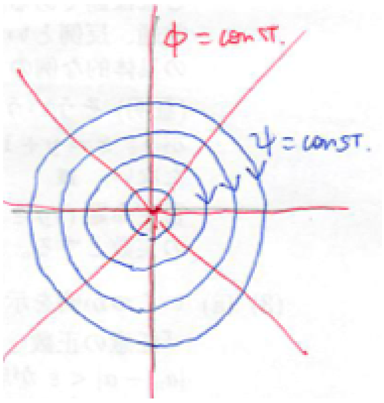

図 3: 渦糸 ($\kappa > 0$ の場合は時計回り)

3 Mathematica で一様流を可視化

複素数の計算、2 変数関数の等高線と 2 次元ベクトル場の描画が出来れば良い。

虚数単位は `I`, 実部 `Re[ ]`, 虚部 `Im[ ]`, 共役複素数 `Conjugate[ ]`, 絶対値 `Abs[ ]`, 偏角 (の主値) `Arg[ ]`, 式の中のすべての変数を実数と仮定して実部・虚部に展開する `ComplexExpand[ ]` などが用意されている。

2 変数関数の等高線の描画には `ContourPlot[ ]`, ベクトル場の描画には `VectorPlot[ ]` が用意されている。これらの使い方はオンライン・ヘルプを見よ (例えば `?ContourPlot`)。

$c = 1 - 2i$ の場合の $f(z) = cz$ を複素速度ポテンシャルとする流れ

```
c=1-2I;
f[z_]:=c z;
ComplexExpand[f[x+I y]]
phi[x_,y_]:=ComplexExpand[Re[f[x+I y]]];
psi[x_,y_]:=ComplexExpand[Im[f[x+I y]]];

phi[x,y]

psi[x,y]

g1=ContourPlot[phi[x,y]==Table[c,{c,-5,5,1.0}],{x,-2,2},{y,-2,2},
  ContourStyle->Directive[Red,Thin]]

g2=ContourPlot[psi[x,y]==Table[c,{c,-5,5,1.0}],{x,-2,2},{y,-2,2},
  ContourStyle->Directive[Blue,Thin]]

u[x_, y_] := ComplexExpand[Re[f'[x + I y]]];
v[x_, y_] := -ComplexExpand[Im[f'[x + I y]]];

g3 = VectorPlot[{u[x, y], v[x, y]}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]

g12=Show[g1,g2]

g13=Show[g1,g3]
```

`ComplexExpand[ ]` は、事前に Evaluate させる効果も考えて採用したが、いつもこれを使うのが良いかは分からない。

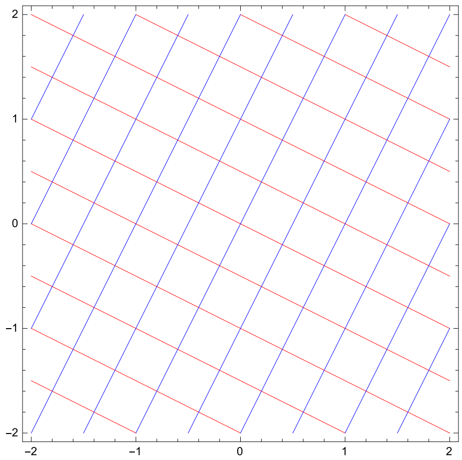

図 4: 等ポテンシャル線と流線は直交する

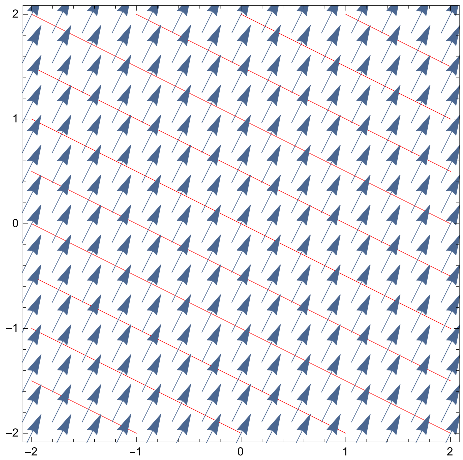

図 5: 等ポテンシャル線と速度ベクトル

このように、一様流は素直なので簡単に描画できるが、そうでないものは色々調整が必要になったりする。

4 Laplace 方程式の境界値問題を数値計算で解く

要点: ポテンシャルや流れ関数は、Laplace 方程式の境界値問題の解として特徴づけられる。その問題の解の存在や一意性についてはここで扱うことは出来ないが、弱形式を導けば、有限要素法という数値計算法で解を得ることは容易である。それを体験してみる。なお、弱形式は偏微分方程式の現代的な取り扱いのための基本的なツールである。

4.1 この講義に現れた (る) 境界値問題

速度ポテンシャル ϕ に対する Laplace 方程式の Neumann 境界値問題で、$\partial\Omega$ 上で $\boldsymbol{v}$ が与えられたとき

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{2}$$

を満たす ϕ を求めよ、というもの。

これは、後の §4.2 で $\Gamma_1 = \emptyset$, $\Gamma_2 = \partial\Omega$, $f = 0$, $g_2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ の場合に相当する。

流れ関数 ψ についても、同様の問題が得られる。

この後、「領域の等角写像」を求める話を書き足す予定。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題とそれに対する弱形式

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界な領域、その境界 $\partial\Omega$ が Γ_1, Γ_2 に分かれているとする。

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

また領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の点における外向きの単位法線ベクトルを n とする。

$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega) \tag{3}$$

$$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1) \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2) \tag{5}$$

を満たす u を求めよ、というのが Poisson 方程式の境界値問題である。

注: $\dfrac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{u(\boldsymbol{x}+hn)-u(\boldsymbol{x})}{h} = \nabla u(\boldsymbol{x})\cdot n.$

この問題は、次のように変形できる (弱定式化, weak formulation)。

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv \, d\boldsymbol{x} j + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds \quad (v \in X).$$

ここで

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}.$$

念のため: $\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y$.

4.3 有限要素法, FreeFem++

弱形式の解として u を見出す方法を**弱解の方法**と呼ぶ。

有限要素法 (finite element method) は、弱解の方法を原理とする数値計算法である。それはかなりの部分を自動化出来るため、専用のソフトウェアが開発されている。

その 1 つである、**FreeFem++**[1] は、パリ第 6 大学 J. L. Lions 研究所の Frédéric Hecht, Oliver Pironneau, A. Le Hyaric, 広島国際学院大学の大塚厚二氏らが開発した、2 次元, 3 次元問題を有限要素法で解くための、 一種の PSE (problem solving environment) である。ソースコード、マニュアル (約 400 ページ, 幸い英文)、主なプラットホーム (Windows, Mac, Linux) 向けの 実行形式パッケージが公開されている。

FreeFem++ については、大塚・高石 [2] という解説書も出ているが、簡単なことは、以前書いた紹介文「FreeFEM++ の紹介」[2] で分かるであろう。

上記の WWW サイトから、`FreeFem++-3.41-MacOS_10.8-mpi.pkg` のようなインストーラーを入手して実行するだけで、簡単にインストールできる。

4.4 (1), (2) を解くための FreeFem++ のプログラム

速度ポテンシャルを求める境界値問題

(再 1) $$\triangle \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

(再 2) $$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

[1] http://www.freefem.org/ff++/

[2] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/welcome-to-freefem/

の場合は、$\Gamma_1 = \emptyset$, $\Gamma_2 = \partial\Omega$, $f = 0$, $g_2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$.

特に $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $\boldsymbol{v} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のときは、$(x,y) \in \partial\Omega$ において $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから、

$$g_2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y.$$

速度ポテンシャルを求める potential2d.edp

```
// potential2d.edp
//   2次元非圧縮ポテンシャル流
//      速度ポテンシャル、流れ関数、速度を求め
//      等ポテンシャル線，流線，速度場を描く

border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");

fespace Vh(Th,P1);
Vh u, v, phi, psi;
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で，V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);

// 流れ関数ψを求め、その等高線（流線）を描く（ちょっと安直なやり方）
func Vn2=y-2*x;
solve Laplace2(psi,v) =
  int2d(Th)(dx(psi)*dx(v)+dy(psi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma)(Vn2*v);
plot(psi,ps="streamline.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線と流線を同時に描く
// plot(phi,psi,ps="lines.esp", wait=1);

// ベクトル場 (u,v)=∇φ を描く（ちょっと雑なやり方）
u=dx(phi);
v=dy(phi);
plot([u,v],ps="vectorfield.eps");
```

プログラムはテキスト・エディター (テキスト・エディット, mi, emacs など) で作成し、ターミナルから、

こんなふうにして実行

```
FreeFem++ potential2d.edp
```

とタイプして実行できる。

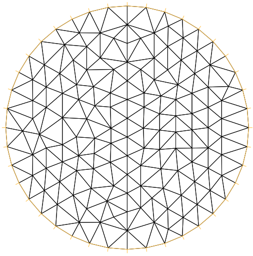

図 6: Ω の三角形分割

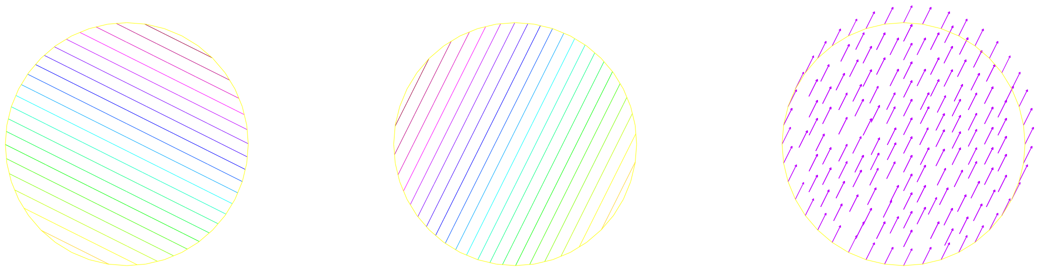

図 7: 一様流の等ポテンシャル線, 流線, ベクトル場

(実は、上の弱形式は解の一意性がないので、このプログラムは少し危ういところがある。)

参考文献

[1] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1989).

[2] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), http://comfos.org/jp/ffempp/book/ というサポート WWW サイトがある。