

# SIR モデルについてのメモ

桂田 祐史

2021年2月7日, 2023年9月6日

かなり雑だけれど、分かったことを散逸させるよりはと考えると、これを書いている。

「こういうことだろう」と書いたことを後になって読み返すとおかしいこともある。この文書は、専門家でない人間の勉強メモにすぎないので、あまり信用しないで下さい。

稲葉 [1] は、初めて学ぶ人にはやや敷居が高い気がする。英語だと、たくさんあって、やさしいところから解説してあるものもあるようだ。

(2023/9/6 追記) 現在、ガラクタ状態で、大幅な書き直しをしている。それが済んだら差し替える。

## 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>2</b>
1.1	感染症の数理モデル	2
<b>2</b>	<b>基本的な SIR モデル</b>	<b>3</b>
2.1	モデルの紹介	3
2.2	平衡点と安定性	5
2.3	$S$ と $I$ だけを考える場合の平衡点と安定性	6
2.4	解の符号について — 第1象限内で考察できること	7
2.5	解軌道の方程式	7
2.5.1	解軌道の描画 (Mathematica)	9
<b>3</b>	<b>方程式の無次元化と解の性質</b>	<b>12</b>
3.1	$S, I, R$ 3つでやる場合	12
3.2	$I$ と $R$ に注目した場合	14
<b>4</b>	<b>解の性質</b>	<b>17</b>
4.1	自分なりにまとめてみる	17
4.2	相図	17
<b>5</b>	<b>基本再生産数と実効再生産数</b>	<b>18</b>
5.1	はじめに	18
5.2	言葉による“一般的な定義”	18
5.3	2020年4月の日本の話	18
<b>6</b>	<b>エンデミック SIR モデル</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>SEIR モデル</b>	<b>19</b>

8	数値シミュレーションのやり方	20
9	2022年1月に考えること	21
9.1	閾値定理について	22
9.2	$R_0$ の値と総感染者数	22
10	2022年5月	24
A	付録: 用語の定義	24
B	「(新規)感染者は指数関数的に増加する」を確認する	24
B.1	シミュレーションで確認	24
B.2	感染者数が指数関数で近似できること	24
B.3	数値の検討	26
B.4	新規感染者数の等比数列的增加	26
C	COVID-19の実効再生産数の簡易推定方法	27
C.1	はじめに	27
C.2	予備知識の確認	27
C.2.1	新規感染者数の変化の仕方 (指数関数的増加)	27
C.2.2	用語	27
C.2.3	感染症数理モデルとの関係 (知っている人向けの注意)	28
C.3	国立感染症研究所の簡易実効再生産数推定方法	28
C.4	西浦博提案(?)の方法	29

## TODO リスト

- 基本再生産数、実効再生産数の“一般的な”言葉による定義と、各モデルにおける式での説明がどうつながっているか。
- 「8割おじさん西浦教授に聞く 新型コロナの実行再生産数のすべて」(2020/5/12 ニコニコ生放送)を見て内容をメモする。

## 1 はじめに

### 1.1 感染症の数理モデル

SIR モデルと呼ばれるモデルが有名であるが、これは Kermack–McKendrick [2] で提唱された ([2] には他のモデルも検討されていて、SIR モデルは「最も簡単なモデル」と言える。また、彼らはその後も多くの続編を執筆していて、[3] は引用も多いようだ。)。筆者には、論文 [2] を読み解いた佐藤 [4] が参考になった。[2] も [4] も取り扱い方がクラシックである (例えばコンピューター・シミュレーションは考えていない)。現代的な取り扱いは、稲葉他 [1] の第1, 10 章などを見ると良い。

歴史的なことは、バカエル [5] に詳しい (16 章「ケルマックとマッケンドリックの感染症流行モデル (1926–1927)」)。

積んでおこうかな: Diekmann-Heesterbeek [6], 稲葉 [7], Murray [8], [9], 巖佐 [10], [11]

稲葉先生は、「感染症数理モデルに関する最も影響力のある代表的なテキスト」として、Anderson-May [12], Diekmann-Heesterbeek [6] をあげていた。

余談 1.1 COVID-19 で、なかなか微妙な評判の国立感染症研究所であるが、関係者が出版した本に、大日・菅原 [13], 栗田・大日・菅原 [14] がある。

[13] では、individual based model (ibm) と呼ばれるモデルが紹介されている。SIR モデルとそのヴァリエーションであるモデルが良く使われているが、十分把握できた感染症に対する対策を構築するには、ibm が使われている、とのこと。これは各時刻で個々の人間がどこにいるかを考えて構築されたもので、きめ細かい仮定をおいたシミュレーションが可能であるが、計算が重くなることもあって real time estimation には向かないとされている(そうである)。

というよりも、ibm で COVID19 の現実的なシミュレーションを行うには、必要なデータが揃えられない、という理由が大きそうだ。刻一刻と変化する状況から、ibm でのシミュレーションに必要なデータを抜き出すのはほとんど無理と思われる。

新型コロナウイルス感染症の第一波について論じた続編である [14] では SIR モデルを使って論じている(というか政府のやったことの検証をしている?)。 ■

## 2 基本的な SIR モデル

### 2.1 モデルの紹介

SIR モデルは、Kermack–McKendrick [2] で提唱された。  
次の仮定をしている。

- 空間分布は考慮しない (1つのゾーンの話と考える)。
- 総人口は一定 (有限の定数) である。つまり出生や自然死 (この感染症以外の理由での死亡) は考えない。
- 感受性者 (Susceptible. その時点で感染しておらず、免疫を持たないので感染する可能性がある)、感染者 (Infectious, Infected. その時点で感染していて (まだ治ってない)、隔離されていないので感染性 (他者に感染させること) を保持している)、回復・隔離または免疫保持あるいは隔離者 (Recovered/Removed/Immune. 免疫を持っている、または隔離されているため、感染する可能性がない) の3つに分類して、各時刻  $t$  での人数  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  を考察する。年齢などで分けることは考えない。
- 単位時間あたり新たに感染者となる人の数は、感染者数と感受性者数の積に比例し、比例定数  $\beta$  は時間によらない正定数と仮定する (日本語が変だ)。それに  $-1$  をかけたものが感受性者数  $S$  の時間変化率となる。詳しくは方程式 (1a) を見よ。
- 感染者は (時間について) 一定の変化率で回復する (回復者に変化する)。より詳しくは、単位時間あたり回復する人の数は感染者数に比例する、と仮定する。その比例定数  $\gamma$  は時間によらない正定数と仮定する (これも日本語がちょっと変かもしれない)。詳しくは方程式 (1c) を見よ。

(何らの理由で感染が発生しなくなった ( $\beta = 0$  と変わった、あるいは  $S = 0$  となった) 状況を考えると、その瞬間を時刻 0 として、 $I(t) = I_0 e^{-\gamma t}$  となるので、 $1/\gamma$  は感染者数が  $1/e$  になるまでの時間 (時定数) であると考えられる。)

- 感染者数の変化率は、感受性者が新たに感染して感染者となる率から、感染者が回復する率を引いたものである。これも詳しくは方程式 (1b) を見よ。

$\beta$  を伝達係数 (transmission coefficient) <sup>1</sup>, 有効接触率 (effective contact rate) <sup>2</sup> などと呼ぶ。また  $\beta I(t)$  を感染力 (force of infection) と呼ぶ。感染力は、感受性者の単位人口当たり単位時間あたりの感染率である。 $(\beta$  の呼び名として、「感染率」, 「感染伝達係数」, 「接触率」などが使われることがあるようだ)。

$\gamma$  は回復率 (removal rate)、隔離率と呼ぶ(?)。「 $1/\gamma$  は平均感染性期間を表しています。」とのことだが、正確な意味は(筆者は)まだ理解できていない。

—  $1/\gamma$  が平均感染性期間ということについて —

感染者数は、微分方程式

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

に従う。ある瞬間から (例えばロックダウンするなどして) 感染が起こらないとすると、例えば  $S$  が隔離されて 0 になるとか、 $\beta = 0$  にしてしまうと、

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I$$

という微分方程式になる。初めからこの微分方程式に従うか、あるいはある時刻からこの微分方程式に従うとして、その時刻を 0 と置き直せば

$$I(t) = I(0)e^{-\gamma t}$$

となる。時刻  $t$  で治る人の確率は

$$-I'(t) = I(0)\gamma e^{-\gamma t}$$

に比例する。ところで

$$\int_0^{\infty} \gamma e^{-\gamma t} dt = 1$$

であるから、 $\gamma e^{-\gamma t}$  が確率密度関数そのものである。治る時刻の期待値 (平均) は

$$\int_0^{\infty} t\gamma e^{-\gamma t} dt = \frac{1}{\gamma}.$$

(これはつまり、指数分布の平均の話だ。なあんだ。)

$$(1a) \quad \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

$$(1b) \quad \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

$$(1c) \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I(t),$$

右辺は  $S, I, R$  の関数として  $C^\infty$  級なので、初期値問題の局所解の存在、一意性が成り立つのは明らかである。また解は爆発などをおこさず、 $t \rightarrow \pm\infty$  まで延長できることも後で分かる。とりあえず認めて (すなわち時間大域解が存在して一意的である) 議論を進める。

容易に次のことが示せる (当たり前のことだが)。

<sup>1</sup>稲葉他 [1]

<sup>2</sup>神永 [15] にそう書かれている。

**定理 2.1** (1a), (1b), (1c) の解  $(S(t), I(t), R(t))$  が区間  $J$  で存在するならば、ある定数  $N$  が存在して

$$S(t) + I(t) + R(t) = C \quad (t \in J).$$

注: 後で示すように任意の解は  $\mathbb{R}$  全体に延長できるので  $J = \mathbb{R}$  として良い。

$S(t) + I(t) + R(t)$  は総人口であるから、「総人口は定数  $N$  である」が示せたことになる。

証明

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = -\beta S(t)I(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) + \gamma I(t) = 0$$

が分かるので、 $S(t) + I(t) + R(t)$  は時刻  $t$  によらない定数である。■

$S(t) + I(t) + R(t)$  は総人口である。これを  $N$  とおく。

$$(2) \quad S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (t \geq 0).$$

$$(再 1a) \quad \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

$$(再 1b) \quad \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

に  $R$  は含まれないので、この2つと  $S, I$  についての初期条件だけで、 $S$  と  $I$  が定まる。 $R$  が知りたければ、 $R(t) = N - S(t) - I(t)$  により求めれば良い。

(1b), (1c) を取り上げ、 $S = N - I - R$  として  $S$  を消去すれば、 $I$  と  $R$  だけの微分方程式が得られる。そうしている解説を見たことがあるが、やはりマイナーであると思われるので、以下では省略する。)

余談 2.2 SIR モデルの厳密解が得られる、という論文 Harko-Lobo-Mak[16] がある。あまり話題に登らないのは使いにくいということだろうか。

## 2.2 平衡点と安定性

常微分方程式の力学系 ( $dx = f(x)$ ) なので、まずは平衡点とその安定性を調べるべきである。平衡点とは  $f(\tilde{x}) = 0$  を満たす点  $\tilde{x}$  のことで、その安定性を調べるには、ヤコビ行列  $f'(\tilde{x})$  の固有値の符号を調べる“線型安定性解析”が最初にすべきこと、とされている。詳しくは常微分方程式や力学系のテキストを見ること。

ここでは  $S, I, R$  についての連立微分方程式 (1a), (1b), (1c) を考察するが、(1a), (1b) だけを考察した場合は次項で述べる。

(1a), (1b), (1c) の右辺の関数を  $f$  とおく。

$$f(S, I, R) := \begin{pmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix}.$$

$f(S, I, R) = 0$  は

$$\begin{aligned} -\beta SI &= 0, \\ \beta SI - \gamma I &= 0, \\ \gamma I &= 0 \end{aligned}$$

であるが、これは  $I = 0$  と同値である。すなわち常微分方程式 (1a), (1b), (1c) の平衡点は  $(S, 0, R)$  ( $S \geq 0, R \geq 0$ )。

感染者がいなく ( $I = 0$ ) ならば、 $S, I, R$  は変化しない、という当たり前のこと以外に、 $S, I, R$  が変化しないのはそういう場合しかない、ということを示している。

平衡点の線型安定性解析をしよう。 $f$  のヤコビ行列と、その平衡点  $(S, 0, R)$  における値は

$$f'(S, I, R) = \begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad f'(S, 0, R) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta S & 0 \\ 0 & \beta S - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

$f'(S, 0, R)$  の固有値は  $0$  (重根),  $\beta S - \gamma$  である。

$S > \frac{\gamma}{\beta}$  であれば、正の固有値が存在するので、 $(S, 0, R)$  は不安定平衡点である。

念のため安定性という言葉の意味について説明 平衡点が安定というのは、その平衡点から少しずらしても、ズレが大きくなる、ということである (正確な定義は常微分方程式のテキストを見て下さい)。不安定というのは、安定でないこと、直観的には平衡点から少しずらしたとき、ずらし方(ずらす方向)によっては、ずれがどんどん大きくなっていく、ということである。このモデルの場合、平衡点というのは、感染者がいなく状態ということで、感染者が発生した場合は平衡点からずれた状態である。 $S > \frac{\gamma}{\beta}$  であれば  $dI/dt = (\beta S - \gamma)I > 0$  であるから、少なくともしばらくの間、感染者が増加することが分かる。このことを「流行する」と表現したりする人もいる (曖昧な感じがするので、個人的には避けたい表現である)。これはその平衡状態が不安定であることを意味する。 $S < \frac{\gamma}{\beta}$  であれば、感染者が減る ( $dI/dt = (\beta S - \gamma)I < 0$  だから)。(実はその後ずっと減り続けて  $0$  に収束することも分かる。) 条件  $S > \frac{\gamma}{\beta}$  の意味はわかりやすいであろう。

### 2.3 $S$ と $I$ だけを考える場合の平衡点と安定性

(結果を見ると「何だ結局同じことか」となる。当たり前だが。)

以下この小節では

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} = f(S(t), I(t)), \quad f(S, I) := \begin{pmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \gamma I \end{pmatrix}$$

のみ考察する。

**定理 2.3** (3) の平衡点は  $(S, 0)$  ( $S \geq 0$ ) である。

証明  $S'(t) = I'(t) = 0$  から

$$(4) \quad \beta SI = 0 \quad \text{かつ} \quad I(\beta S - \gamma) = 0.$$

$\beta, \gamma > 0$  と仮定しているので、 $SI = 0$ 。  $I = 0$  であれば (4) を満たす。  $I \neq 0$  とすると、 $S = 0$  かつ  $S = \frac{\gamma}{\beta}$ 。これは矛盾するので、(4) の解は  $(S, 0)$  ( $S \geq 0$ )。 ■

平衡点におけるヤコビ行列を調べてみよう。

$$f'(S, I) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{pmatrix}$$

であるから

$$f'(S, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta S \\ 0 & \beta S - \gamma \end{pmatrix}.$$

固有値は  $0$  と  $\beta S - \gamma$  である。ゆえに  $S > \frac{\gamma}{\beta}$  であれば (正の固有値を持つので)、 $(S, 0)$  は不安定平衡点であることが分かる。 $S < \frac{\gamma}{\beta}$  であれば (固有値は負の数と  $0$  であるので)、線型安定性解析だけでは安定性の判定はできない。後で解軌道の方程式が求まるので、それを使うと中立安定であることが分かる。

稲葉 ([1] の第 1 章) に、 $\beta S(0) - \gamma$  は初期成長率であるという説明が書いてあった。なるほど、という感じがする。

## 2.4 解の符号について — 第 1 象限内で考察できること

$I$  軸の正の部分と  $I$  軸の負の部分は解軌道であることが分かる。実際、 $S = 0$  とおくと

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I$$

であるから

$$S(t) = 0, \quad I(t) = I(0)e^{-\gamma t}$$

という解が見つかる。 $I(0) > 0$  であれば  $I$  軸の正の部分が解軌道、 $I(0) < 0$  であれば  $I$  軸の負の部分が解軌道である。

解の一意性により、 $S(t)$  と  $I(t)$  の符号は変わらない、特に  $S(0) > 0$  かつ  $I(0) > 0$  であれば、任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $S(t) > 0$  かつ  $I(t) > 0$  である。

## 2.5 解軌道の方程式

この小節の内容は、佐藤 [4] の §7.3 による。後の 4.2 節と適当にマージすべきだ。

SIR モデルは、非線形方程式ということもあって、解を解析的に求めることは (おそらく) 出来ないが、以下に示すように、解軌道の方程式を求めることは出来る。この辺は Lotka-Volterra の方程式と事情が似ている (何にでも載っているはずと思うが、例えば桂田研の卒研レポート長谷川 [17])。かなり違うものになるが、Kepler 運動の方程式と似ていなくもない (軌跡が楕円などの円錐曲線になることは有名だが、それは時刻  $t$  の関数として求めたことにはなっていない)。

多くの本で、以下のように議論されている。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \end{aligned}$$

より

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\rho}{S}.$$

ただし

$$(5) \quad \rho := \frac{\gamma}{\beta}$$

とおいた。

$$dI = \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS$$

を積分して…

現時点で  $I$  が  $S$  の関数とみなせるかどうかは分からないので、以上の議論には若干抵抗がある。

$$\frac{dI}{dt} = \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) \frac{dS}{dt}$$

の両辺を  $t=0$  から  $t=t^*$  ( $t^*$  は任意の時刻) まで積分して

$$\int_0^{t^*} \frac{dI}{dt} dt = \int_0^{t^*} \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) \frac{dS}{dt} dt.$$

置換積分の公式から

$$\int_{I(0)}^{I(t^*)} dI = \int_{S(0)}^{S(t^*)} \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS.$$

ゆえに

$$I(t^*) - I(0) = -S(t^*) + S(0) + \rho(\log S(t^*) - \log S(0)).$$

以下では  $t^*$  を  $t$  と書くことにする。移項して

$$(6) \quad I(t) = I(0) + S(t) - S(0) + \rho \log \frac{S(t)}{S(0)}.$$

$$I_0 = I(0), \quad S_0 = S(0)$$

とおくと、 $S = S(t)$  と  $I = I(t)$  の間に次式の関係が成り立つ。

$$(7) \quad I = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0}.$$

これから、 $I$  は  $S$  の関数とみなせる ( $S$  を与えれば  $I$  が定まる)。

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S} = \frac{\rho - S}{S}$$

であるから、 $0 < S < \rho$  で増加関数、 $S > \rho$  で減少関数であり、 $S = \rho$  で最大値を取る。また

$$\frac{d^2I}{dS^2} = -\frac{\rho}{S^2} < 0$$

であるから、グラフは上に凸である。

(本来人数は  $[0, N]$  の範囲外に出ないので、現象としての意味はなくなるが、(7) で定義された関数  $I(S)$  の性質として  $S \rightarrow +0$  や  $S \rightarrow \infty$  のとき  $I(S) \rightarrow -\infty$ 。

(力学系は、 $S$  軸上の点  $(S, 0)$  を平衡点としていて、任意の解について  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$  が成り立つ、それと矛盾はしないが、混乱しないように注意が必要である。)

初期時点  $(S(0), I(0))$  を出発する点  $(S(t), I(t))$  は、時間がたつにつれて、この軌道の上を右から左に動いてゆく。そのわけは

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI < 0.$$

$t \rightarrow +\infty$  のときに  $(S(t), I(t))$  が  $S$  軸上の点に収束することを示すのは、解析学の練習問題である。



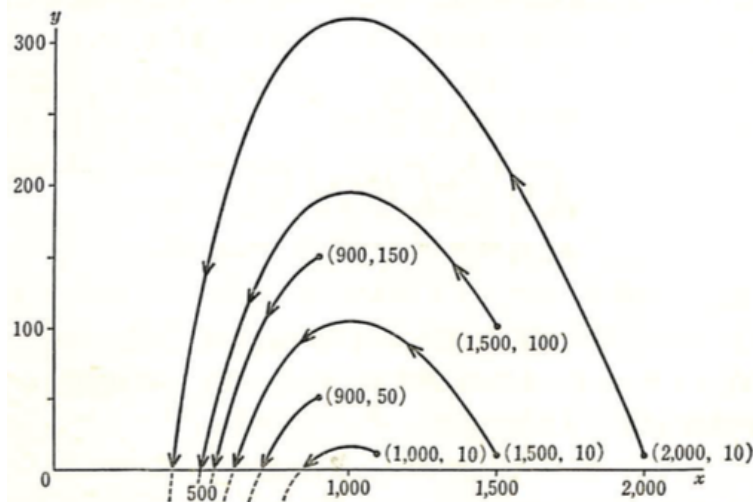


図 4 (22) の軌道  $\rho = 1,000$

図 1: (22) の軌道  $\rho = 1,000$  (佐藤 [4] p. 176 図 4)

(ゼミ中に細かいところまで調べたような記憶があるが、記録が残っていないのは残念なことだ…以下は記憶を手繰って)

例えば、 $(S, I)$  を通る曲線と  $S$  軸との交点  $(S_*, 0)$  を求めるには、 $S_*$  についての方程式

$$I = 0 + S_* - S + \rho \log \frac{S}{S_*}$$

を解けば良い。これは次のような Mathematica コードで実行できそう。

```
findS[S_, I_, rho_] :=
Module[{S0},
  S0 /. FindRoot[I == 0 + S0 - S + rho Log[S/S0], {S0, rho/2}]
S0=findS[2000, 10, 1000]
```

これで 399.626 という値が得られる (反復法の初期値  $\rho/2$  が適切かは分からないが…2階導関数が定符号なので、危なく解ける保証が出来そう)。  $S_0$  が求まれば、グラフを描くには `Plot[S0 - S + rho Log[S/S0], {S, S0, 2000}]` のようにすれば良い。

このようにして、佐藤 [4] p. 176 の図 4 を再現してみた (図 2. やってみて気付いたが、(1000, 10) という座標は (1100, 10) の誤植であろう)。

(補足) 無次元化モデルの場合も書いておこう。

$$\frac{dS}{dt} = -R_0 SI, \quad \frac{dI}{dt} = R_0 SI - I$$

から  $\frac{dI}{dS} = \frac{R_0 SI - I}{-R_0 SI} = -1 + \frac{1}{R_0} \cdot \frac{1}{S}$  が導かれて

$$I = I_0 + S_0 - S + \frac{1}{R_0} \log \frac{S}{S_0}$$

という関係が得られる。  $\rho$  のところを  $\frac{1}{R_0}$  に置き換えれば良い。

### 2.5.1 解軌道の描画 (Mathematica)

佐藤 [4] p. 176 図 4 の再現、気分転換にやってみる。

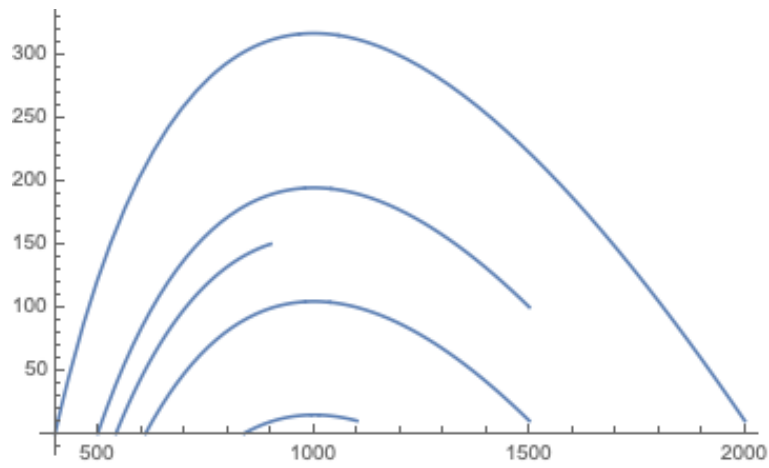


図 2: 佐藤図 4 の再現

桂田 [18] というメモ (粗雑だけど) もある。

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & S' = -\beta SI, \\
 (9) \quad & I' = \beta SI - \gamma I, \\
 (10) \quad & R' = \gamma I \\
 & \rho = \frac{\gamma}{\beta} = 1000
 \end{aligned}$$

[4] の (24) は

$$\begin{aligned}
 y(x) &= y_0 + x_0 - x + \rho \log(x/x_0). \\
 \rho &= \frac{\gamma}{\beta}.
 \end{aligned}$$

[4] では、 $\rho = 1000$  の場合に色々計算してある。

```

rho = 1000
findsinfty[s0_, i0_] :=
  Block[{s}, s /. FindRoot[i0 + s0 - s + rho Log[s/s0], {s, 0.9*rho}]]
plottrajectory[s0_, i0_] :=
  Show[Plot[i0 + s0 - s + rho Log[s/s0], {s, s0, findsinfty[s0, i0]},
    PlotRange -> {{0, 2300}, {0, 350}},
    Graphics[{Point[{s0, i0}],
      Text["(" <> ToString[s0] <> ", " <> ToString[i0] <>
        ")", {s0, i0} + {160, 0}]}]]]
plottrajectoryP[p_] := plottrajectory[p[[1]], p[[2]]

gS2000I10 = plottrajectory[2000, 10];
gS1500I10 = plottrajectory[1500, 10];
gS1500I100 = plottrajectory[1500, 100];
gS1100I10 = plottrajectory[1100, 10];
gS900I150 = plottrajectory[900, 50];
gS900I150 = plottrajectory[900, 150];
Show[gS2000I10, gS1500I10, gS1500I100, gS1100I10, gS900I150, gS900I150]

p = {{2000, 10}, {1500, 100}, {1500, 10}, {1100, 10}, {900, 150}, {900, 50}};
gFig4 = Show[Table[plottrajectoryP[p[[i]]], {i, Length[p]}]]
Export["SatoP176Fig4.pdf", gFig4]

```

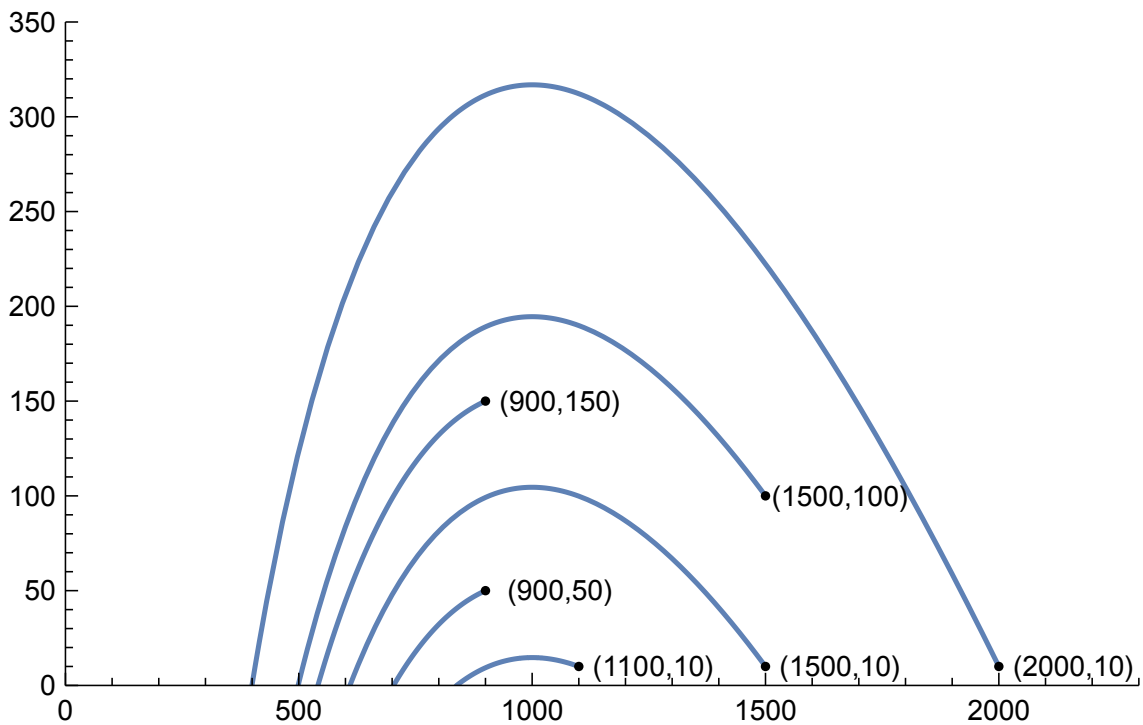


図 3: 図を再現してみた

Mathematica の `VectorPlot[]` と `StreamPlot[]` を使って、ベクトル場とその流線を描いてみる。

```

beta = 1/rho; gamma = 1;
gV = VectorPlot[{-beta x y, beta x y - gamma y}, {x, 0, 2000}, {y, 0, 350}]
gStream = StreamPlot[{-beta x y, beta x y - gamma y}, {x, 0, 2000}, {y, 0, 350}]
Export["SIRVector.pdf", gV]
Export["SIRVector.pdf", gStream]

```

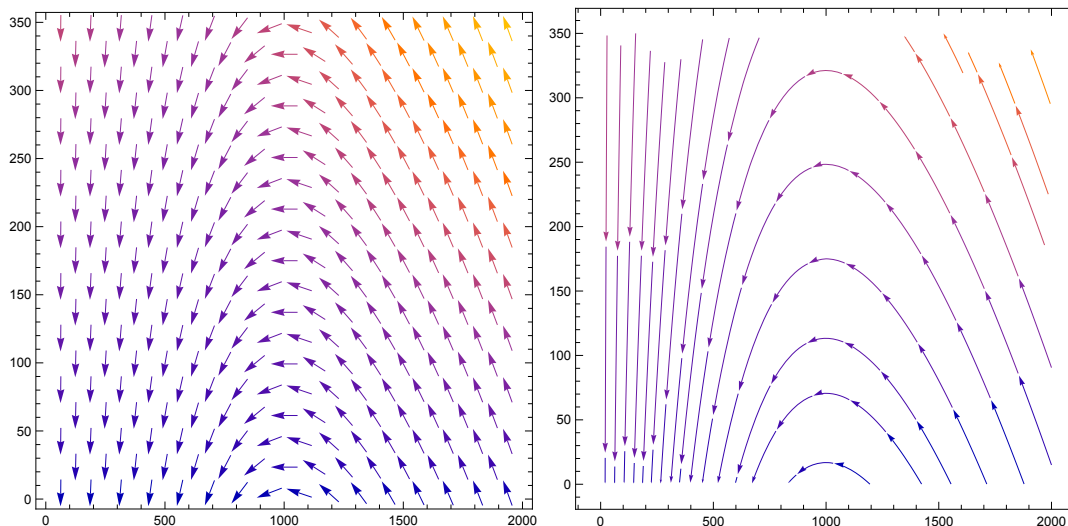


図 4:  $\beta = \frac{1}{1000}$ ,  $\gamma = 1$  の場合のベクトル場と流線

### 3 方程式の無次元化と解の性質

解の性質については、§2.5 に書いてあることも参照すること (解の性質という独立した節をつくべきかもしれない。そのうちそうしよう。)

#### 3.1 $S, I, R$ 3つでやる場合

多くのテキストで、2つの従属変数にしてから解析しているけれど、3つ残した方が分かりやすいかもしれない、と考えて説明してみる。

$$(11) \quad s := \frac{S}{N}, \quad i := \frac{I}{N}, \quad r := \frac{R}{N}$$

とおく。つまり人数でなく、総人口に占める割合を扱う、ということである。つねに

$$(12) \quad s + i + r = 1$$

が成り立つことに注意する ( $S + I + R = N$  に対応している)。

(1a), (1b), (1c) に代入すると

$$\begin{aligned}
 N \frac{ds}{dt} &= -\beta N^2 s(t)i(t), \\
 N \frac{di}{dt} &= \beta N^2 s(t)i(t) - \gamma Ni(t), \\
 N \frac{dr}{dt} &= \gamma Ni(t).
 \end{aligned}$$

整理して

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -\beta N s(t) i(t), \\ \frac{di}{dt} &= \beta N s(t) i(t) - \gamma i(t), \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i(t).\end{aligned}$$

独立変数  $t$  を

$$(13) \quad t' = \gamma t$$

と変数変換すると

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt'} &= -\frac{\beta N}{\gamma} s i, \\ \frac{di}{dt'} &= \frac{\beta N}{\gamma} s i - i, \\ \frac{dr}{dt'} &= i.\end{aligned}$$

$$(14) \quad R_0 := \frac{\beta N}{\gamma}$$

とおき、 $t', s, i, r$  をそれぞれ  $t, S, I, R$  で書き直すと

$$(15a) \quad \frac{dS}{dt} = -R_0 S I,$$

$$(15b) \quad \frac{dI}{dt} = R_0 S I - I,$$

$$(15c) \quad \frac{dR}{dt} = I,$$

$$(15d) \quad (t \text{ は元々の } t \text{ の } \gamma \text{ 倍}).$$

平衡点は  $(S, 0, R)$ . ヤコビ行列は

$$f'(S, I, R) = \begin{pmatrix} -R_0 I & -R_0 S & 0 \\ R_0 I & R_0 S - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f'(S, 0, R) = \begin{pmatrix} 0 & -R_0 S & 0 \\ 0 & R_0 S - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

固有値は  $0$  (二重),  $R_0 S - 1$ . 平衡点は  $R_0 S > 1$  であれば不安定であり、 $R_0 S < 1$  であれば中立安定である

$\frac{dI}{dt} = (R_0 S - 1)I$  であるので、この条件  $R_0 S > 1$  は  $I'(t) > 0$  であるための条件と同値であることに注意する。

**定理 3.1** (1)  $R_0 < 1$  の場合、 $I$  は減少関数で、 $t \rightarrow \infty$  のときは指数関数的に減衰する ( $t$  が十分大きなところで  $0 \leq I(t) \leq \text{定数} e^{-\text{正数} t}$ )。

(2)  $R_0 > 1$  の場合、 $R_0 S > 1$  である間は  $I$  は増加する。特に  $0 < I \ll 1$  の間は  $I$  は指数関数的に増加する。

(3)  $R_0 > 1$  の場合、ある瞬間に  $R_0 S < 1$  であれば、その後  $I$  は単調減少して、 $t \rightarrow \infty$  で  $0$  に収束する。

結局、どんな場合も  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ .

(1) の事実を、「基本再生産数が 1 より小さければ流行は起こらない」ということがある。

(2) の事実のうちの「指数関数的な増加」も新型コロナウイルス感染症の話に良く現れた。指数関数的な増加が分からない人が多いという説もあるので、詳しく説明すべきなのかもしれない。

(簡単に分かること)  $SI = 0$  でない ( $S > 0, I > 0$  である) 限り  $\frac{dS}{dt} = -R_0SI < 0$  であるから、 $S$  は単調減少関数である。 $\frac{dI}{dt} = (R_0S - 1)I$  であるから、 $S = \frac{1}{R_0}$  のときに  $I$  が最大になる。

### 3.2 $I$ と $R$ に注目した場合

まず(せっかくだから)、ゼミで読んだ牧野 [19] に従って説明する。

$$(16) \quad x := \frac{I}{N}, \quad y := \frac{R}{N}, \quad s := \frac{S}{N} = 1 - x - y$$

とおく。

$I = Nx$  であるから

$$N \frac{dx}{dt} = \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = \beta N(1 - x - y) \cdot Nx - \gamma Nx,$$

すなわち

$$\frac{dx}{dt} = N\beta(1 - x - y)x - \gamma x.$$

一方、 $R = Ny$  であるから

$$N \frac{dy}{dt} = \frac{dR}{dt} = \gamma I = \gamma Nx,$$

すなわち

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x.$$

いま

$$(17) \quad a := N\beta$$

とおくと

$$(18a) \quad \frac{dx}{dt} = a(1 - x - y)x - \gamma x,$$

$$(18b) \quad \frac{dy}{dt} = \gamma x.$$

さらに

$$(19) \quad t' := \gamma t$$

と独立変数の変数関数をする

$$(20a) \quad \frac{dx}{dt'} = \frac{a}{\gamma}(1 - x - y)x - x,$$

$$(20b) \quad \frac{dy}{dt'} = x.$$

$$(21) \quad R_0 := \frac{a}{\gamma} = \frac{N\beta}{\gamma}$$

とおくと、

$$(22a) \quad \frac{dx}{dt'} = R_0(1 - x - y)x - x,$$

$$(22b) \quad \frac{dy}{dt'} = x.$$

以下、簡単のため  $t'$  のことを  $t$  と表すと

$$(23a) \quad \frac{dx}{dt} = R_0(1 - x - y)x - x,$$

$$(23b) \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

$R_0$  を基本再生産数 (basic reproduction number) と呼び、“R naught” (あーる のーと) と読む<sup>3</sup>。

(注:  $\beta$  は  $\text{人}^{-1}\text{時間}^{-1}$ ,  $\gamma$  は  $\text{時間}^{-1}$  であるから、 $R_0$  は無次元数である。無次元化された方程式に出て来るので当たり前だけれど。)

基本再生産数の意味 稲葉 [1] の p. 1 から引用する。

なんらかの病原体 (ウイルスや最近など) に対してすべてが感受性 (susceptible) を有する個体からなる宿主 (宿主) 人工集団において典型的な 1 人の感染者が、その全感染期間において再生産する 2 次感染者の期待数を基本再生数 (basic reproduction number) とよび、 $R_0$  で表す。

(21) で定義した  $R_0$  がこのような意味を持つことの確認が必要だ。

注意 3.2 (1) 関数  $R(t)$  の  $t=0$  での値  $R(0)$  を  $R_0$  と書くテキストがある。基本再生産数と混同しないように注意が必要である。あろうことか、基本再生産数のことも  $R_0$  と書いてあって、字面で区別ができなかったり (目を疑ったけれど…)

(2) この辺の用語の使い方はコンセンサスが取れている訳ではないようだ。稲葉 [1] には、

$$R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma}$$

が基本再生産数である、と書いてある。こうすると、 $R_0 > 1 \Leftrightarrow \frac{dI}{dt}(0) > 0$  であるから、閾値原理「 $R_0 > 1$  ならば流行し、 $R_0 < 1$  ならば流行は起きない」がきれいに成り立つ。

■

念のため時刻の変数変換の意味の説明 (18b) を見ると、 $\gamma$  の単位は時間の逆数である。例えば、1 日を単位時間にしていれば、 $\text{日}^{-1}$  が  $\gamma$  の単位である。例えば  $\gamma = 0.1 \text{ 日}^{-1}$  ならば (ゆっくりに感じ)、 $1/\gamma = 10 \text{ 日}$  を新たに時間の単位に取って考え直す、ということである。

<sup>3</sup>稲葉・西浦 [20] には、“R nought” と書いてあって、文献 Dietz [21] があげられているが、[21] を読んでも “R nought” は出て来ない。WWW で検索すると「もしかして: R naught」と言われる。しかし英和辞典を引くと、nought も nought もあり、0 という意味がある、と書いてある。米語と英語の違いの面もあるようで、0 という意味では、英語では nought らしい。

ここで  $\lambda_0 = \beta S_0 - \gamma$  は初期成長率であり (中略)

$S_0$  というサイズの感受性集団に侵入した感染個体は 1 人当たり単位時間当たり  $\beta S_0$  という 2 次感染者を発生させるが、感染性である期間の長さ  $T := 1/\gamma$  を乗ずることで、単位感染者が感染性でいる間に生産する 2 次感染者総数が得られる。感染性期間の長さが  $1/\gamma$  になるということは、感染者にとって感染からの経過時間  $\tau$  において回復・隔離される確率密度が  $\gamma e^{-\gamma\tau}$  であることによる。ここで  $1/\gamma = \int_0^\infty \tau \gamma e^{-\gamma\tau} d\tau$  であることに注意しよう。 $T$  はある個体が感染してから 2 次感染を引き起こすまでの平均待機時間 (世代時間: generation time) でもある。以上の考察から、以下のような関係が得られる:

$$R_0 = 1 + \lambda_0 T$$

(確認してみる:  $1 + \lambda_0 T = 1 + (\beta S_0 - \gamma)/\gamma = \beta S_0/\gamma = R_0$ )

それゆえ、世代時間がわかっている、初期成長率が観測できれば、常識によって  $R_0$  が推定できる。人口が一定の面積の領域に分布していると仮定するならば、 $S_{cr} = \gamma/\beta$  とおくと、これは臨界的な感受性人口密度であって、初期の感受性人口密度がこれ以下ならば  $R_0 < 1$  となって  $R_0 < 1$  となって流行は起きない。

**定理 3.3** (1)  $R_0 < 1$  ならば、 $t \rightarrow \infty$  のとき、 $x$  は指数関数的に減衰する (0 に近づく)。

(2)  $R_0 > 1$  の場合、 $R_0(1 - x - y) > 1$  である間は  $x$  は増加する。特に  $0 \leq x \ll 1$  の間は  $x$  は指数関数的に増加する。

(3)  $R_0 > 1$  の場合、ある瞬間に  $R_0(1 - x - y) < 1$  であれば、それ以降  $x$  は単調減少して、 $t \rightarrow \infty$  で 0 に収束する。

結局、どんな場合も  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ 。

**証明** まず  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 。また  $x + y \leq 1$  である ( $1 - x - y$  は除去者の割合で負にはならない)。 $x$  が

$$\frac{dx}{dt} = (R_0(1 - x - y) - 1)x$$

を満たすので、 $R_0(1 - x - y) - 1$  の符号を調べることになる。解の一意性の議論により、 $x$  が恒等的に 0 に等しくない限り、つねに  $x > 0$  を満たすことも分かる<sup>4</sup>。

(1)  $0 \leq 1 - x - y \leq 1, 0 < R_0 < 1$  であるから  $R_0(1 - x - y) \leq R_0, R_0(1 - x - y) - 1 \leq R_0 - 1 < 0$ 。  
ゆえに

$$\frac{dx}{dt} = (R_0(1 - x - y) - 1)x \leq (R_0 - 1)x \leq 0$$

であるから  $x$  は単調減少である ( $x > 0$  であれば狭義の単調減少)。また

$$0 \leq x(t) \leq x(0)e^{(R_0-1)t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

であるから指数関数的に減衰する。

(2)  $R_0(1 - x - y) > 1$  であれば  $dx/dt > 0$  であるから (連続性によりしばらくこの不等式が成立するから)、 $x$  は増加する。 $0 \leq x \ll 1$  のとき  $R_0(1 - x - y) - 1 \doteq R_0(1 - y) - 1 > 0$  であるから、 $x$  は指数関数的に増加する。

<sup>4</sup>ある時刻  $t_0$  で  $x(t_0) = 0$  ならば、 $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv y(t_0)$  が解であり、一意性が成り立つから。



(3) 準備中 ■

$y(+\infty)$  は結局、何割の人が感染したか (最初の時点で感染していた人を含めて) を表す。

## 4 解の性質

### 4.1 自分なりにまとめてみる

(みんな分かりやすく書いてくれないのだね。)

平衡点は  $I = 0$  となる点である。

$(S(0), I(0), R(0))$  が平衡点でない限り ( $I(0) > 0$  である限り)、 $S(t)$  は単調減少して、 $t \rightarrow +\infty$  のとき

$$I(0) = 0 + S_* - S(0) + \frac{1}{R_0} \log \frac{S(0)}{S_*}$$

の解  $S_*$  に収束する。また  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ 。

$R_0 < 1$  であれば、 $I$  は単調減少する。

$R_0 > 1$  であるとき、 $S(0) > \frac{1}{R_0}$  であれば、 $I$  は最初のうちは増加し、 $S(t) = \frac{1}{R_0}$  のとき最大になり、その後は減少に転じる。 $S(0) \leq \frac{1}{R_0}$  であれば  $I$  は単調減少する。

以上は無次元化モデルの場合で、そうでなければ、 $\frac{1}{R_0}$  を  $\rho := \frac{\gamma}{\beta}$  で置き換える。

$R_0$  が小さいことは、その集団がその感染症に強いということを意味しているわけか。

閾値原理 (閾値定理) についても書くべきか。 $S(0)$  が  $\frac{1}{R_0}$  より大きく、十分近いとき、 $S(0) - \frac{1}{R_0} \doteq \frac{1}{R_0} - S(\infty)$ 。

### 4.2 相図

可視化するには、2次元にした方が分かりやすい。

牧野 [19] は、 $I, R$  を残して考えたが、佐藤 [4] や稲葉 ([1] の第1章) に従って、 $S, I$  を残した方程式を考えることにして、 $SI$  平面上で解曲線  $(S(t), I(t))$  を描いた相図を描いてみる。

([1] の第1章の図 1.1 を引用しておくが (図 5)、そのうち自作に置換えよう。)

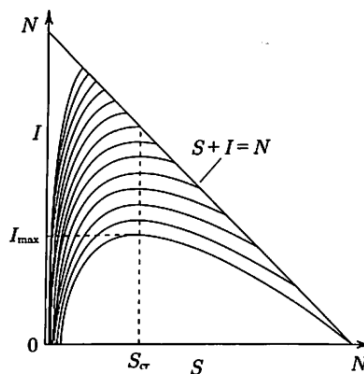


図 1.1 SIR モデル (1.1) の相図 ([68])。  $S + I = N$  という初期値から出た軌道群を示す。

図 5: [1] の第1章の図 1.1

## 5 基本再生産数と実効再生産数

ここは書き換えをするべき。

### 5.1 はじめに

言葉による“一般的な定義”と、各数理モデルごとの式での説明を結びつける必要がある。

### 5.2 言葉による“一般的な定義”

まずは言葉による“一般的な定義”を述べる。

—— 稲葉 [1] の p. 1 ——

なんらかの病原体(ウイルスや最近など)に対してすべてが感受性(susceptible)を有する個体からなる宿主(宿主)人口集団において典型的な1人の感染者が、その全感染期間において再生産する2次感染者の期待数を基本再生産数(basic reproduction number)とよび、 $R_0$ で表す。

—— 稲葉 [1] の p. 48 ——

基本再生産数は、完全に感受性人口のみからなる人口学的な定常状態にある宿主人口を前提とした2次感染者の再生産数であるから、介入行為によって部分的に免疫化された定常的宿主人口や、時間的に定常でない宿主人口における2次感染者再生産数を区別しておいた方がよい。宿主のすべては感受性とは限らない場合、あるいは感受性宿主が定常状態ではない場合の特定の時刻における平均的な1次感染者が、その全感染期間に再生産する2次感染者総数を実効再生産数(effective reproduction number)とよぶ。

—— 稲葉 [22] ——

実効再生産数(effective reproduction number)は何らかの介入行為がある場合の感染者再生産数の総称で、さまざまな異なる定義がある。新型コロナ問題では、時間依存モデルにおける日々の再生産数(瞬間的ないしは期間的再生産数)としてもつばら人口に膾炙した。意味の違いに注意されたい。

### 5.3 2020年4月の日本の話

今ではすっかり有名になった西浦博氏による「接触を8割削減」について。

$R_0 = 2.5$  と仮定して、その値を8割下げる

8割下げると2割、つまり0.2倍にするということで、 $R_0 = 2.5 \cdot 0.2 = 0.5$ を目指す、ということか。誰かが言っていた「最低6割」だと  $R_0 = 2.5 \cdots 0.4 = 1$  で、それで減るの?、 $R_0(1-x-y)$  自体は1より小さいから一応減るよ、ということか。

## 6 エンデミック SIR モデル

SIR モデルに、出生と自然死があるという修正を施したモデルを考えよう。

$$(24) \quad \frac{dS}{dt} = b - \mu S(t) - \beta S(t)I(t),$$

$$(25) \quad \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t),$$

$$(26) \quad \frac{dR}{dt} = -\mu R(t) + \gamma I(t).$$

総人口  $N(t) := S(t) + I(t) + R(t)$  については

$$\frac{d}{dt}N(t) = b - \mu N(t)$$

が成り立つので、平衡点は  $N = b/\mu$ 。最初から全人口が  $b/\mu$  とすると、総人口が変化しないので、2次元力学系

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b - \mu S(t) - \beta S(t)I(t), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t) \end{aligned}$$

に帰着できる。基本再生産数は

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma + \mu} = \frac{\beta b}{\mu(\gamma + \mu)}.$$

平衡点は

$$E_1 := \left( \frac{b}{\mu}, 0 \right), \quad E_2 := \left( \frac{\gamma + \mu}{\beta}, -\frac{\mu}{\beta} + \frac{b}{\gamma + \mu} \right).$$

ヤコビ行列は

$$f'(S, I) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma - \mu \end{pmatrix}.$$

$E_1$  におけるヤコビ行列は

$$f'(b/\mu, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta b/\mu \\ 0 & \beta b/\mu - \gamma - \mu \end{pmatrix}$$

であり、固有値は  $-\mu, \beta b/\mu - \mu - \gamma$ 。

$E_2$  におけるヤコビ行列は

$$f'\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, -\frac{\mu}{\beta} + \frac{b}{\gamma + \mu}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{b\beta}{\gamma + \mu} & -(\gamma + \mu) \\ -\mu + \frac{b\beta}{\gamma + \mu} & 0 \end{pmatrix}$$

## 7 SEIR モデル

いわゆる潜伏期を考えたもの。

西浦・稲葉 [20] に次の方程式が載っている。

「例えば、感染待ち時間 (あるいは暴露後期間; latency period) を考慮する場合には、 $I$  の状態を Exposed (感染後, まだ感染性を持たない状態) と Infectious (感染性を有する状態) の2つに分けて扱うことによって4つの部分人口でモデルを構成することができる (SEIR モデル)」

$$(27a) \quad \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

$$(27b) \quad \frac{dE}{dt} = \beta S(t)I(t) - \varepsilon E(t),$$

$$(27c) \quad \frac{dI}{dt} = \varepsilon E(t) - \gamma I(t),$$

$$(27d) \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I(t)$$

「ここで  $\varepsilon$  は暴露後に感染性を得る率であり、 $\varepsilon^{-1}$  は感染待ち時間が指数分布に従うと仮定した場合の平均値である。」

$E$  は潜伏期にある感染者数、 $\alpha_t$  は時刻  $t$  における1人の発症者が単位時間あたりに感受性者を感染させる人数とする。

## 8 数値シミュレーションのやり方

とりあえず「常微分方程式の初期値問題を解くプログラムの書き方 付録 G. 専用の関数を使ってみる - Python, Julia」<sup>5</sup> からプログラムと実行例を持って来る。

計算部分のコードはごくわずか。 $R_0 = 2.5$  である感染症について、免疫を持たない集団に少数の感染者が侵入した場合のシミュレーション ( $0 < I(0) \ll 1$ ,  $S(0) = 1 - I(0)$ ,  $R(0) = 0$ ) の結果を表示する。

<https://colab.research.google.com/drive/1taMZW55Cy9BHNh7RrtK1bXCk0d1tf-w2?hl=ja#scrollTo=cD1Ndn6AuYMF>

```
# testsir6.py --- SIR model
# coding: utf-8
#
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# x=(S,I,R)
def sir(x, t, R0):
    return [-R0*x[0]*x[1], R0*x[0]*x[1]-x[1], x[1]]

#
R0=2.5
I0=0.001
x0=[1.0-I0,I0,0.0]
n=1000
t=np.linspace(0.0, 20.0, n+1)
x=odeint(sir, x0, t, args=(R0,))

fig=plt.figure(figsize=(20,5))

# S,I,R の時間変化
plt.subplot(141)
plt.plot(t,x[:,0], 'b', label='S')
```

<sup>5</sup><http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/intro-ode-simulation/node67.html>

```

plt.plot(t,x[:,1], 'g', label='I')
plt.plot(t,x[:,2], 'r', label='R')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.title('SIR model (t-S,I,R)')
plt.grid()

# SI 平面での軌道
plt.subplot(142)
plt.xlim(0.0,1.0)
plt.plot(x[:,0],x[:,1], 'k',label='S&I')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('S')
plt.ylabel('I')
plt.title("orbit in SI-plane")

# 流行曲線
plt.subplot(143)
plt.plot(t,R0*x[:,0]*x[:,1], 'b', label='S')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('-DS/Dt')
plt.title("Epidemic curve")

# SIR 空間での軌道
# 3DAxes を追加
ax = fig.add_subplot(144, projection='3d')
# 軸ラベルを設定
ax.set_xlabel("$S$")
ax.set_ylabel("$I$")
ax.set_zlabel("$R$")
# 曲線を描画
ax.plot(x[:, 0], x[:, 1], x[:, 2])
plt.title("orbit in SIR-space")

plt.savefig('SIR-figure.png')
plt.show()

```

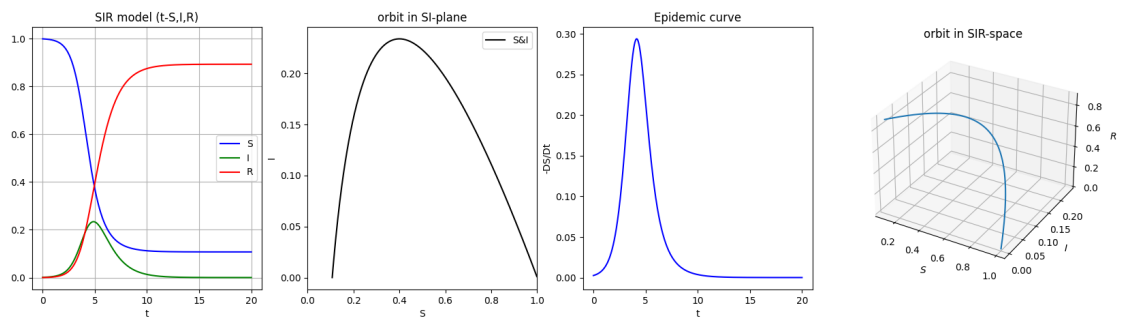


図 6:  $R_0 = 2.5$  の場合の時間変化、解軌道 (2 次元)、流行曲線、解軌道 (3 次元)

## 9 2022年1月に考えること

約9ヶ月ぶりに書き足した(8節)。

## 9.1 閾値定理について

佐藤 [4] に閾値定理というのが載っているが、少なくとも COVID19 の場合には、仮定の条件が満たされないので、有効性が低いと思われる。

## 9.2 $R_0$ の値と総感染者数

$S$  と  $I$  に注目した場合の、相平面内の軌道の方程式は

$$I = I_0 + S_0 - S + \rho \frac{S}{S_0}.$$

であった。無次元化した場合は  $\rho$  は基本再生産数  $R_0$  の逆数である。

$$I = I_0 + S_0 - S + \frac{1}{R_0} \log \frac{S}{S_0}.$$

ごく少数の感染者が侵入した場合の推移を考えるには、 $I_0 = 0, S_0 = 1$  とすれば良い。微分方程式のシミュレーションでは、 $I_0 = I(0) = 0$  では  $I(t) = 0$  のまま (それではナンセンス) であるが、この軌道の方程式では取り扱いができる。無次元化の場合は

$$I = 1 - S + \frac{1}{R_0} \log S.$$

Mathematica でグラフを描く ( $R_0$  を変えながら)

```
i[s_, R0_] := 1 - s + 1/R0 Log[s]
Manipulate[Plot[i[s, R0], {s, 0, 1}, PlotRange -> {-0.1, 1}], {R0, 0.9, 5, 0.01}]
```

Julia でグラフを描く (一つの  $R_0$  を指定して)

```
I(s,R0)=1-s+log(s)/R0
plot(s->I(s,2.5),xlim=(0.01,1),ylim=(-0.2,1.1))
```

(Julia に Manipulate[] に相当するものないかな?)

もちろん  $R_0 \leq 1$  ならば流行しない (一時的でも  $I$  は増加しない… このケースでは  $I = 0$  のまま)。そういう場合は 1 人の感染者が侵入した場合、

$$1 + R_0 + R_0^2 + \dots = \frac{1}{1 - R_0}$$

人だけ感染する、というようなことが書いてあった (すると総感染者数は  $\frac{I_0}{1 - R_0}$  という見積りになる?)。これがどれだけの意味を持つか。

やはり  $R_0$  が 1 を超えた時が主たる問題となる。 $I = 0$  となるときの  $S$  の値 (1 より小さいもの) を求めよう。その値を 1 から引いたものが、感染した人の総数となる。

$$(28) \quad 1 - s + \frac{1}{R_0} \log S = 0$$

を解くわけであるが、簡単そうに見えて、式で解けない。反復法で解くので、適当な初期値を選ぶことが必要であるが、最初は適当なものを思いつかなかった。Mathematica の FindRoot[]

は結構いい加減な初期値を与えても、解を返してくれるが、Newton 法には良い初期値が必要である。

近似法則ではあるが、閾値定理によれば、 $R_0$  が小さいときは、 $\frac{2}{R_0} - 1$  に近いと考えられる。ところが、この値は  $R_0 \leq 1/2$  のとき 0 以下になってしまい、うまく行かない。 $R_0$  が大きいとき、 $S \doteq 0$  であることに注目すると、 $\log S \doteq -R_0$ 。ゆえに  $S \doteq e^{-R_0}$ 。そこで  $e^{-R_0}$  を初期値とすると、ほぼいつでもうまく解けるようになった。

ところで  $z = 1 - s$  とおき、上の方程式を  $R_0$  について解いた

$$(29) \quad R_0 = -\frac{\log(1-z)}{z}$$

を掲げている本もある (西浦 [23])。

Mathematica で総感染者数のグラフを描く

```
lasts[R0_] := s /. FindRoot[i2[s, R0] == 0, {s, 0.1}]
Plot[1 - lasts[R0], {R0, 1, 5}, PlotRange -> All]
```

Julia で総感染者数のグラフを描く

```
using Printf
using Plots

function newton(f, df, x0, eps)
    x = x0
    for i=1:20
        dx = f(x) / df(x)
        x = x - dx
        #@printf("Δ x=%e, x=%g, f(x)=%e\n", dx, x, f(x))
        if abs(dx) < eps
            return x
        end
    end
    println("newton: 収束しませんでした。修正量=$(dx)")
    return x
end

# 関数 I とその導関数
I(s,R0)=1-s+log(s)/R0
dI(s,R0)=-1+1/(R0*s)
# I=0 となる s を Newton 法で求める関数、初期値=exp(-R0)
lastS(R0)=newton(x->I(x,R0),x->dI(x,R0),exp(-R0),1e-15)
# 総感染者数のグラフを描く
plot(x->1-lastS(x),xlim=(1.01,5),title="total infectious",label=raw"$1-S(\infty)$")
xlabel!("R0");
savefig("total_infectious.pdf")
```

$R_0$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
総感染者数	0	0.176	0.314	0.423	0.511	0.583	0.641	0.691	0.732	0.767	0.797	0.822	0.844	0.862	0.879	0.893

$R_0 = 1.3$  で放置すると、42% 感染する。COVID19で、それ位ひどいことになった国もあるが (インドとかはもっとひどい)。そういう国は多くないのでは。そういう国では  $R_0$  を 1.3 より小さくできた、ということだろうか?? 個人的には信じられない。もしそうならば、もう一息で流行を回避できたことになりそう。(既にロックダウンをした後に、 $R_0$  を下げるために有効な手段は残っていない、ということだろうか。)

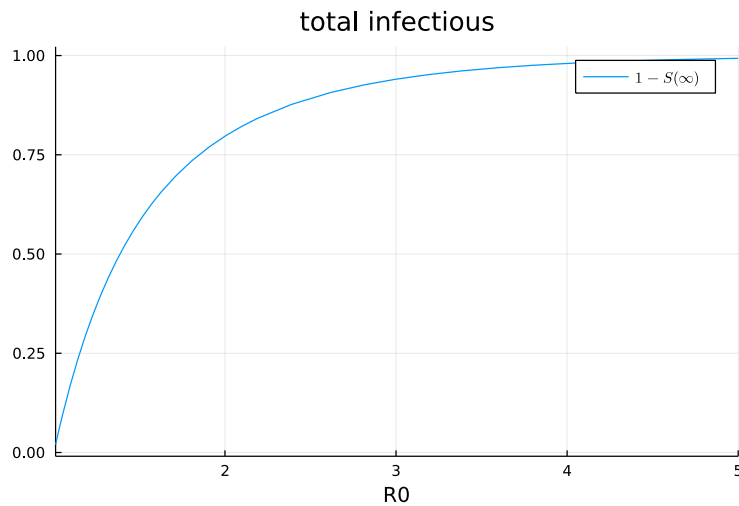


図 7: 総感染者数の  $R_0$  依存性

## 10 2022年5月

- <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/ode-workbook.pdf#page=22> に書いたことをここに持って来る。

### A 付録: 用語の定義

(準備中)

### B 「(新規)感染者は指数関数的に増加する」を確認する

(しばらく落書き状態)

「感染者は指数関数的に増加する」とか「新規感染者は指数関数的に増加する」と良く言われ、急激な増加が起きているとき、実際のデータがそうなっている場合が多いので、受け入れられているようである。それを確認してみよう。

#### B.1 シミュレーションで確認

SIR モデルのシミュレーションをすると、確かに感染者数  $I(t)$  は指数関数的に増加していることが分かる。一方、報道されるのは新規感染者数で、これは  $I(t)$  とは異なるが、大まかに  $-S'(t) \times 1$  日 がそれを意味するか、という気はする。その値を調べるとやはり指数関数的に増加していることが分かる。

(実際にデータを載せたい。準備中。)

#### B.2 感染者数が指数関数で近似できること

まず、“猛烈な”感染者数の増加が起きているときでない限り、感受性者数  $S(t)$  は、短期間では定数とみなせる、ということを確認する。

例えば日本では、COVID-19 の最初の1年が経過した頃、累積感染者数は人口の0.5%程度であった。総人口を  $N$  ( $N = 1.2 \times 10^8$ ) とするとき、 $S(1年) \cong 0.995N$  ということである。1



年の間、 $0.995N \leq S(t) \leq N$ .  $S$  はほぼ定数であったと言っても構わないだろう。これは極端にしても、短期間で総人口の何割かが新たに感染してしまう激しい増加の時期を別にすれば、短時間では  $S$  が大きく変化しないと考える良いだろう。

この業界の人達は

$$\lambda := \beta S$$

とおくそうだが、 $\lambda$  はほぼ定数、ということになりそう。まあ、 $\beta$  の方は感染対策次第で値がそれなりに変わりそうなので、「 $\beta$  が大きく変わらないような短期間では、 $\lambda$  は定数に近い」というべきだろうか。(  $\lambda$  とおく気持ちが分かった気がする。 )

SIR モデルの方程式

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = (\beta S - \gamma)I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

は

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda I, \quad \frac{dI}{dt} = (\lambda - \gamma)I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

と書き換えられるが、元の式は忘れて、この書き換えた式で  $\lambda$  を定数としてしまうと、 $S, I, R$  は簡単な計算で求まる。免疫を持たない集団に感染者が侵入する場合、つまり  $S(0) = N - I(0)$ ,  $R(0) = 0$  を考えると、

$$I(t) = e^{(\lambda - \gamma)t} I(0),$$

$$R(t) = R(0) + \int_0^t R'(\tau) d\tau = 0 + \gamma \int_0^t e^{(\lambda - \gamma)\tau} I(0) d\tau = \frac{\gamma}{\lambda - \gamma} (e^{(\lambda - \gamma)t} - 1) I(0),$$

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S'(\tau) d\tau = N - I(0) - \lambda \int_0^t e^{(\lambda - \gamma)\tau} I(0) d\tau = (N - I(0)) - \frac{\lambda}{\lambda - \gamma} (e^{(\lambda - \gamma)t} - 1) I(0).$$

検算として、総人口が変わらないことを確認しておく：

$$\begin{aligned} S(t) + I(t) + R(t) &= (N - I(0)) + \frac{\gamma - \lambda}{\lambda - \gamma} (e^{(\lambda - \gamma)t} - 1) I(0) + e^{(\lambda - \gamma)t} I(0) \\ &= (N - I(0)) - (e^{(\lambda - \gamma)t} - 1) I(0) + e^{(\lambda - \gamma)t} I(0) \\ &= N - I(0) + I(0) = N. \end{aligned}$$

以上より、 $\lambda$  が定数に近い場合は

$$(30) \quad I(t) \doteq e^{(\lambda - \gamma)t} I(0)$$

と考えられる (精密な話もできるだろうけれど、それはサボる)。感染者数  $I(t)$  は指数関数である、と言ってよからう。

実効再生産数  $R_t := \frac{\beta S}{\gamma}$  を用いると ( $t = 0$  から短い間を考える場合は、基本再生産数  $R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma}$  を使うべきか？ )

$$\lambda - \gamma = \frac{\beta S}{\gamma} \gamma - \gamma = (R_t - 1)\gamma$$

であるから、単位時間経過すると  $I$  は

$$(31) \quad e^{(\lambda - \mu) \cdot 1} = e^{\lambda - \mu} = e^{(R_t - 1)\gamma}$$

倍になる。

平均世代時間  $\mu := \frac{1}{\gamma}$  経過すると  $I$  は  $e^{(R_t - 1)\gamma\mu} = e^{R_t - 1}$  倍になる。

### B.3 数値の検討

シミュレーションの結果と比較するため、 $\lambda, \gamma$  がどの程度の数値か見ておこう。どちらも単位は  $\text{日}^{-1}$  である。

$$\gamma = \frac{1}{\text{平均世代時間}} = \begin{cases} \frac{1}{4.8} & (\text{武漢株}, \delta \text{株}) \\ \frac{1}{2} & (\text{オミクロン株}) \end{cases} = 0.2 \sim 0.5.$$

そういえばオミクロン株とかデルタ株の  $R_0$  はどれくらい？ 今度調べておこう。武漢株の場合は、何も対策しなければ  $R_0 = 2.5$  とよく言われた。その場合は

$$\lambda = \beta S = \frac{\beta N}{\gamma} \cdot \frac{S}{N} \cdot \gamma = R_0 \frac{S}{N} \gamma \doteq 2.5 \times 1 \cdot \frac{1}{4.8} \doteq 0.52,$$

ゆえに

$$\lambda - \gamma = (R_0 - 1)\gamma = 1.5 \times \frac{1}{4.8} = 0.3125, \quad e^{\lambda - \gamma} = e^{0.3125} = 1.36684.$$

平均世代時間が経過すると、この 4.8 乗の 4.48169 となる。 $e^{R_0 - 1} = e^{2.5 - 1} = e^{1.5} = 4.48169$  と等しい。

$N \gg I(0)$  である。例えば  $I(0) = 100$  として、 $\frac{I(0)}{N} = \frac{10^2}{10^8} = 10^{-6}$  であるから、 $I(t)$  が総人口  $N$  の  $0.1\% = 10^{-3}$  になるには、 $10^3$  倍に増える必要がある。それに要する時間  $t$  は、 $e^{(\lambda - \gamma)t} = 10^3$  を解いて

$$t = \frac{\log 10^3}{\lambda - \gamma}.$$

武漢株の場合  $\lambda - \gamma = \gamma(R_0 - 1) = \frac{1.5}{4.8} = 0.3125$  であるから

$$t = 22 \text{ 日}.$$

ざっと 3 週間ということである。このペースは 1 週間で 10 倍になっているということか。実際には、日本では、デルタ株の流行時でも 1 週間で 2 倍程度だったので、こんなにひどくなかった、 $R_0$  は 2.5 よりはかなり小さく抑えられた、ということか。

### B.4 新規感染者数の等比数列的增加

新規感染者というのは、感染したばかりの人という意味であろうが、数えるためには、いつまで新規とみなすか決める必要がある。

現実世界では、感染状況は毎日報告されていて、昨日 (のある時刻) から今日 (のある時刻) までの間に感染していることが判明した人を新規感染者と呼んでいる。

そこで時間間隔  $\Delta t > 0$  を固定して、

$$t_n := n\Delta t \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とおく。 $t_{n-1}$  から  $t_n$  の間に新たに感染者となる人の数は (時刻  $t$  における、単位時間当たりの発生率が  $-S'(t) = \beta S(t)I(t)$  であることから)

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \beta S(\tau)I(\tau) d\tau &\doteq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \lambda I(\tau) d\tau \doteq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \lambda e^{(\lambda - \gamma)\tau} I(0) d\tau \\ &= \lambda I(0) \left[ \frac{e^{(\lambda - \gamma)\tau}}{\lambda - \gamma} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} = \frac{\lambda I(0)}{\lambda - \gamma} (e^{(\lambda - \gamma)t_n} - e^{(\lambda - \gamma)t_{n-1}}) \\ &= \frac{\lambda I(0)}{\lambda - \gamma} e^{(\lambda - \gamma)n\Delta t} (1 - e^{-(\lambda - \gamma)\Delta t}) = Ar^n. \end{aligned}$$

ただし

$$A := \frac{\lambda I(0)}{\lambda - \gamma} (1 - e^{-(\lambda - \gamma)\Delta t}), \quad r := e^{(\lambda - \gamma)\Delta t}$$

とおいた。

「1日ごとの新規陽性者数は公比  $r$  の等比数列である。」 $\lambda - \gamma = 0.3125 \text{ 日}^{-1}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ 日}$  ならば

$$r = e^{0.3125} = 1.36684.$$

平均世代時間 4.8 日が経過すると

$$r^{4.8} = 4.48169$$

倍になる。あれえ？ 新規感染者数も感染者数と同じ倍率で大きくなる。 $R_0 = 2.5$  と異なるのはなぜ？

## C COVID-19の実効再生産数の簡易推定方法

### C.1 はじめに

ネットで(「COVID」も「コロナ」も省略して)“実効再生産数 計算”として検索すると、国立感染症研究所のメンバーが中心となって書かれた高・有馬・鈴木・島田・古瀬・中島 [24] がヒットする (2022/5/6 現在)。

一方、「東洋経済 ONLINE 新型コロナウイルス 国内感染の状況」<sup>6</sup> の「よくあるご質問」には、西浦博の提案したとされる計算法が紹介されている。

この節では、この2つの方法について説明する。

### C.2 予備知識の確認

#### C.2.1 新規感染者数の変化の仕方 (指数関数的増加)

しばしば「感染者数は指数関数的に増加する」と言われる。実際、感染者数が急激に増えているときは、新規感染者数 (検査で陽性になった人の数) が1週間で2倍とか、2日で2倍とか、の倍々ゲームで増えていくことがおなじみである。

このことは感染症の数理モデルの解についても、一定の条件下で成り立つことが確認できる。

指数関数  $y = a^x$  は、現在では高校の数学IIで学ぶ事項であるが(昔は数学Iだった?)、変数である時間  $x$  として、日ごとで考えることにすると、等比数列(古い言い方をすると幾何級数)ということになる。ある日の数を  $a$  とすると、1日後は  $ar$ , 2日後は  $ar^2$ ,  $\dots$ ,  $n$  日後には  $ar^n$  ( $r^n$  は  $n$  個の  $r$  をかけた結果という意味)になる、ということである。 $r$  のことを公比と呼ぶ。

#### C.2.2 用語

**incubation period (潜伏期間)** 感染してから発病するまでに要する時間

**serial interval (発病間隔)** 感染源の発病から2次感染者の発病までに要する時間

**generation time (世代時間)** 感染源の感染から2次感染者の感染までに要する時間

<sup>6</sup><https://toyokeizai.net/sp/visual/tko/covid19/>

世代時間より発病間隔の方が調べやすいので、前者が分からないうちは後者で代用することも行われる。

実際には、感染者は約 10 日間程度、他の人にうつす可能性を持つので、平均的なものを考える必要がある。そこで「平均世代時間」という言葉を使うことになる。

単に「世代時間」と呼んで、感染した人はちょうどそれだけの時間が経過したときに、一気に  $R_t$  人の人にうつす、という“簡単化”をして議論することが少なくない(というか「簡易推定方法」というのはそういう単純化をしているという意味がある)。

### C.2.3 感染症数理モデルとの関係 (知っている人向けの注意)

SIR モデルであれば、 $R_t = \frac{\beta S(t)}{\gamma}$  となる ( $t = 0$  のとき  $S = N$  と仮定すると、基本再生産数  $R_0$  と一致する— 記号は筋が通っている)。

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = (R_t - 1)\gamma I$$

であるので、時刻  $t$  から短い時間  $h$  の間は ( $R_t$  が定数とみなして微分方程式を解いて)

$$I(t+h) \doteq I(t)e^{(R_t-1)\gamma h}.$$

$I(t)$  は時刻  $t$  における感染者の総数であるが、この文書では新規感染者数を扱うことが多く、それは  $I(t)$  とは異なることに注意が必要である。

例えば、時間が平均世代時間  $\mu$  だけ経過すると、新規感染者数は  $R_t$  倍になるが、感染者の総数  $I$  は  $e^{(R_t-1)\gamma\mu} = e^{R_t-1}$  倍になる ( $\because \gamma = \frac{1}{\mu}$ )。

## C.3 国立感染症研究所の簡易実効再生産数推定方法

実効再生産数は「(ある時刻  $t$  における、一定の対策下での)1 人の感染者による二次感染者数」と定義される。

とあるが、これは西浦・稲葉 [20] の p. 468 から抜き出したものであろう。もう少し長く引用すると

そこで、効果的再生産数 (Effective reproduction number,  $R_t$ ) が定義される：これは「(ある時刻  $t$  における、一定の対策下での) 1 人の感染者による 2 次感染者数」を意味する概念である。重要な  $R_0$  との違いが () 付きで書かれるのは、必ずしも時刻  $t$  の関数ではなく、また必ずしも明白に一定の対策下という外因的な要素を考慮したものでもない、という曖昧な  $R_t$  の定義による (むしろ  $R_0$  でないことを意味する場合に  $R_t$  が用いられることが多い)。

[20] には、 $R_t$  を求めるために綿密な調査を行った事例も紹介されているが、そのようなことが実行可能なことは稀で、簡易的な計算法の必要性が高い。

[24] では、そのような簡易的な方法を 2 つ紹介している。

(a) ドイツのロベルト・コッホ研究所 (Robert Koch Institut) が用いている方法 ([25])

$$R_t = \frac{\text{その日の新規陽性者数}}{\text{世代時間前の新規陽性者数}}$$

(彼らは世代時間を 4 日と考えているので、分母は「4 日前の新規陽性者数」になる。)

(b) Bonifazi ら ([26]) の推奨する方法

$$R_t = \frac{\text{その日の直近7日間の新規陽性者数}}{\text{世代時間前の日の直近7日間の新規陽性者数}}$$

(週末の検査数の減少など週内変動を考慮した(よくある「移動平均」と似た考え方)。世代時間を4日とすると、分母は「4日前～10日前の新規陽性者数」となる。)

[24]では、この Bonifazi の方法を「簡易  $R_t$  推定法」と呼び、世代時間を3,4,5,6,7日として計算した結果を、より精密な方法 (Cori et. al [27]) で計算した結果と比較することで、その有効性を検証し、世代時間を5日とするのが優れている、と結論した。

その方法では、例えば4月15日の実効再生産数  $R_{4月15日}$  は

$$R_{4月15日} = \frac{\text{4月9日～4月15日の新規陽性者数}}{\text{4月4日～4月10日の新規陽性者数}}$$

として計算する。

世代時間がコッホ研究所の採用した4日でなく、5日が良いというのは、(武漢株で) 世代時間は分からないが、発病間隔は4.8日と推定されるので、それで代用しよう、という西浦博の提案とも合致するので、うなずける。

もっとも、世代時間は5日とするのが良いというのは、2021年中頃までに通用した話で、オミクロン株が優占している最近では2日とするべきであろう。

## C.4 西浦博提案(?)の方法

東洋経済オンライン (<https://toyokeizai.net/sp/visual/tko/covid19/>) から引用する。

Q. 実効再生産数とは何ですか？

A. 「1人の感染者が平均して何人に感染させるか」を示す指標です。この数字が高いほど感染が急速に拡大していることを意味し、逆に1未満の期間が続けば「感染が収束しつつある」といえます。計算式は「(直近7日間の新規陽性者数/その前7日間の新規陽性者数)^(平均世代時間/報告間隔)」です。平均世代時間は2日、報告間隔は7日と仮定しています(2021年12月31日以前では平均世代時間を5日と仮定)。リアルタイム性を重視して流行動態を把握するため、報告日ベースによる簡易的な計算式を用いています。精密な計算ではないこと、報告の遅れに影響を受けること、陽性者が少ない都道府県では数人の差で大きく実効再生産数に変動する場合がありますことにご注意ください。北海道大学大学院医学研究院・西浦博教授のモデルと監修を基にしています。計算式の詳細は西浦教授の公開するGitHubリポジトリをご覧ください。ただし、たとえば直近7日間の新規陽性者が1人でも1万人でも同じ「実効再生産数1」となる場合があります。現在の感染状況を把握するには、陽性者数など他の指標もあわせてご確認ください。

2022-2-10 New

2022年1月1日からの実効再生産数について、主流となったオミクロン株の状況を反映するため、計算式の「平均世代時間」を従来の5日間から2日間に変更しました。

ところが西浦博が発表したものを探しても、ピッタリのものは(私には)見つからなかった。

2020/5/12のニコニコビデオでの西浦の講演(<https://blog.nicovideo.jp/niconews/132897.html>)で使ったスライド資料(西浦[28])にそれに近い式が出て来るが、これは2010年の論文

Nishiura-Chowell-Heesterbeek-Wallinga [29] から“コピペ”したものであろう (スライド資料にその論文があげられていないので、そのことが分かるのに時間がかかった)。

[29] では、報告間隔  $\Delta t$  が世代時間  $\mu$  の  $n$  倍 ( $n$  は正の整数) の場合は、

$$R_t = \left( \frac{\text{その報告での新規陽性者数}}{\text{一つ前の報告での新規陽性者数}} \right)^{1/n}$$

で  $R_t$  が推定される、 $\Delta t = \mu$  とするのが望ましい、と述べられている。

筆者は、東洋経済 ONLINE の式をはじめて見たときかなり困惑したのだが (報告間隔というのは7日間とされているようだがなぜ? 毎日報告されているのに。訳が分からない)、[29] を読んで疑問が解消した。[29] では、今回の COVID-19 のように頻繁に (毎日!) 報告が行われることは想定していなくて、例えば平均世代時間が15日程度の感染症で、月ごとに報告された場合のことを論じていたりする (その場合は、 $\mu = 15$ ,  $\Delta t = 30$ ,  $n = 2$  となる)。しかし、[29] の考え方は、毎日新規陽性者数が報告される現在の状況にも、容易に応用できる。

曜日による変動を除去するために、(Bonifazi et. al [26] と同様に考えて) 報告間隔  $\Delta t$  を7日とみなす。 $n$  は、定義式はこれまで通りの

$$n = \frac{\text{報告間隔}}{\text{平均世代時間}} = \frac{7 \text{ 日}}{5 \text{ 日}} = \frac{7}{5}$$

を採用する。 $n$  の値は整数にはならないが、それは実は問題にならない。

$$(32) \quad R_t = \left( \frac{\text{その日の直近7日間の新規陽性者数}}{\text{7日前の日の直近7日間の新規陽性者数}} \right)^{5/7}$$

とすればよい。この方法では、例えば4月15日の実効再生産数  $R_{4 \text{ 月 } 15 \text{ 日}}$  は

$$R_{4 \text{ 月 } 15 \text{ 日}} = \left( \frac{\text{4月9日~4月15日の新規陽性者数}}{\text{4月2日~4月8日の新規陽性者数}} \right)^{5/7}$$

として計算する。 $\boxed{x^y}$  というキーがついている電卓ならば (Google 電卓にはある)、 $\frac{5}{7}$  乗 (0.714 乗) を計算することは出来る。

式 (32) の根拠は次にまとめておく。

———— ノート (指数関数に慣れている人向け) ————

指数関数  $I(t) = Ce^{at}$  と  $\mu$  が与えられたとき、 $R := \frac{I(t+\mu)}{I(t)} = e^{a\mu}$  の値が知りたいが、 $I(t)$  と  $I(t - \Delta t)$  の値が知られている。どうすれば良いか。

$$\frac{I(t)}{I(t - \Delta t)} = \frac{Ce^{at}}{Ce^{a(t-\Delta t)}} = e^{a\Delta t} = e^{a\mu \cdot \frac{\Delta t}{\mu}} = R^{\frac{\Delta t}{\mu}}$$

であるから

$$R = \left( \frac{I(t)}{I(t - \Delta t)} \right)^{\frac{\mu}{\Delta t}}$$

$R$  を実効再生産数、 $I(t)$  を時刻  $t$  における新規陽性者数、 $\mu$  を平均世代時間 (5日あるいは4.8日)、 $\Delta t$  を“報告の間隔” (7日) とする訳である。

例えば、新規陽性者数が1週間で2倍のペースで増えているときの、実効再生産数はいくつか。実際に報告される新規陽性者数は色々な理由で凸凹だけれど、一定の時間ごとに一定の数をかけるように増える。1日で $r$ 倍になるとすると、1週間で2倍になるのだから

$$r \times r \times r \times r \times r \times r \times r = r^7 = 2.$$

ゆえに $r$ は、2の7乗根 $\sqrt[7]{2}$  (これを $2^{\frac{1}{7}}$ と書く)である。

$$r = \sqrt[7]{2} = 2^{\frac{1}{7}} = 1.10408951367381233764 \dots (\text{無理数なので無限に続く}).$$

実効再生産数 $R_t$ は、世代時間だけ時間が経過すると何倍になるかだから、世代時間が5日の場合は

$$R_t = r \times r \times r \times r \times r = r^5 \doteq 1.64.$$

以上を一つの式で書くと、

$$R_t = 2^{\frac{5}{7}} \doteq 1.64$$

となる。 $\boxed{x^y}$ というキーがついている電卓では、 $2 \boxed{x^y} 0.714$  (0.714は $\frac{5}{7}$ の近似値)とすれば計算できる。

7日で2倍になるけれど、5日しか経っていないので、2よりも小さい値1.64になっている。

オミクロン株の場合は、世代時間が2日とされているので、もし上と同じように1週間で2倍というペースであれば、

$$R_t = r^2 \doteq 1.22.$$

意外と大したことがない、となる。オミクロン株は最初は非常に恐れられたが、それは平均世代時間をそれ以前と同じ5日と見積もって $R_t$ を計算したからである。

## 参考文献

- [1] 稲葉<sup>ひさし</sup>寿：感染症の数理モデル, 培風館 (初版 2008, 増補版 2020/12/15).
- [2] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G.: A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, Vol. 115, No. 772, pp. 700–721 (1927).
- [3] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G.: A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics II — The problem of endemicity, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, Vol. 138, No. 834, pp. 55–83 (1932).
- [4] 佐藤<sup>ふさお</sup>總夫：自然の数理と社会の数理 II, 日本評論社 (1987), 版元在庫切れだったりしますが、図書館で借りるとか、読む方法はあると思います。ゼミ生は見つからなければ相談して下さい。
- [5] ニコラ・バカエル：人口と感染症の数理はいかに創られてきたか — 個体群ダイナミクスの数学史, 東京大学出版会 (2022/11/25), 稲葉寿/國谷紀良/中田行彦/竹内康博一訳. 第16章がSIRモデル.

- [6] Diekmann, O. and Heesterbeek, J. A. P.: *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley Series in Mathematical and Computational Biology, Wiley, New York (2000), J. A. P. Heesterbeek とあるけれど、Hans Heesterbeek と書いてあることもある。
- [7] 稲葉<sup>ひさし</sup> 寿 : 数理人口学, 東京大学出版会 (2002).
- [8] Murray, J. D.: *Mathematical Biology I: An Introduction*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag (2002), マレー [30] が邦訳.
- [9] Murray, J. D.: *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag (2003), マレー [31] が邦訳.
- [10] 巖佐庸 : ニューバイオフィジックス, 数理生態学シリーズ, 共立出版 (1997).
- [11] 巖佐庸 : 数理生物学入門 — 生物社会のダイナミクスを探る, 数理生態学シリーズ, 共立出版 (1998).
- [12] Anderson, R. M. and May, R. M.: *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*, Oxford University Press (1992/9/24).
- [13] 大日<sup>おおひ</sup>泰史, 菅原<sup>すがはら</sup>民枝 : パンデミック・シミュレーション — 感染症数理モデルの応用, 技術評論社 (2009/9/5).
- [14] 栗田<sup>くりだ</sup>順子, 大日泰史, 菅原民枝 : 第一波のパンデミック・シミュレーション — 数理モデルからの振り返り, 技術評論社 (2020/12/15).
- [15] 神永<sup>かみなが</sup>正博 : Python と実例で学ぶ微分方程式 ～はりの方程式から感染症の数理モデルまで～, コロナ社 (2021/10/6), <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/Viewer/Id/3000112217>.
- [16] Harko, T., Lobo, F. S. N. and Mak, M. K.: Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 236, pp. 184–194 (2014).
- [17] 長谷川<sup>ながはがわ</sup>成実 : 生物の増殖についての常微分方程式 (2011 年度桂田研卒業研究レポート), <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/report/pdf/2011-hasegawa.pdf> (2012).
- [18] 桂田<sup>かいた</sup>祐史 : 佐藤「自然の数理と社会の数理 II」7,8 章を読む, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/reading-sato.pdf> (2020/2/7～).
- [19] 牧野<sup>まきの</sup>淳一郎 : 新型コロナウイルスに関するメモ, 2020/3/26 のセミナー資料の翻訳でそうです。 <http://jun-makino.sakura.ne.jp/talks/kobe20200326-j.pdf> (2020/4/20 (2021/1/3 改訂)).
- [20] 西浦<sup>にしうら</sup>博, 稲葉寿 : 感染症流行の予測 : 感染症数理モデルにおける定量的課題, 統計数理, Vol. 54, No. 2, pp. 461–480 (2006), <https://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/54-2-461.pdf>.
- [21] Dietz, K.: The estimation of the basic reproduction number for infectious diseases, *Statistical Methods in Medical Research*, Vol. 2, No. 1, pp. 23–41 (1993).



- [22] 稲葉寿：集団免疫論を超えて, 数学セミナー, 2020年9月号, pp. 19–25 (2020).
- [23] 西浦博編著：感染症疫学のためのデータ分析入門, 金芳堂 (2021/10/10).
- [24] 高勇羅, 有馬雄三, 鈴木基, 島田智恵, 古瀬祐気, 中島一敏：COVID-19 感染報告者数に基づく簡易実効再生産数推定方法, Infectious Agents Surveillance Report (病原微生物検出情報, IASR), Vol. 42, No. 6, pp. 128–129 (2021/6/29), <https://www.niid.go.jp/niid/ja/2019-ncov/2502-idsc/iasr-in/10465-496d04.html>.
- [25] Institut, R. K.: Erläuterung der Schätzung der zeitlich variierenden Reproduktionszahl  $R$ , [https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges\\_Coronavirus/Projekte\\_RKI/R-Wert-Erlaeuterung.pdf?\\_\\_blob=publicationFile](https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Projekte_RKI/R-Wert-Erlaeuterung.pdf?__blob=publicationFile) (2020/5/15).
- [26] Bonifazi, G., Lista, L., Menasce, D., Pedrini, M. M. D., Spighi, R. and Zoccoli, A.: A simplified estimate of the effective reproduction number  $R_t$  using its relation with the doubling time and application to Italian COVID-19 data, *The European Physical Journal Plus*, Vol. 136, No. 4, pp. 1–14 (2021), <https://link.springer.com/content/pdf/10.1140/epjp/s13360-021-01339-6.pdf>.
- [27] Cori, A., Ferguson, N. M., Fraser, C. and Cauchemez, S.: A New Framework and Software to Estimate Time-Varying Reproduction Numbers During Epidemics, *American Journal of Epidemiology*, Vol. 178, No. 9, pp. 1505–1512 (2013), <https://academic.oup.com/aje/article/178/9/1505/89262>.
- [28] 西浦博：実効再生産数とその周辺, [https://github.com/contactmodel/COVID19-Japan-Reff/blob/master/nishiura\\_Rt%E4%BC%9A%E8%AD%B0\\_12May2020.pdf](https://github.com/contactmodel/COVID19-Japan-Reff/blob/master/nishiura_Rt%E4%BC%9A%E8%AD%B0_12May2020.pdf). 2020/5/12 のニコニコビデオでの講演で使ったスライド (2020/5/12).
- [29] Nishiura, H., Chowell, G., Heesterbeek, H. and Wallinga, J.: The ideal reporting interval for an epidemic to objectively interpret the epidemiological time course, *Journal of the Royal Society Interface*, Vol. 7, pp. 297–307 (2010).
- [30] ジェームズ D. マレー：マレー数理生物学入門, 丸善出版 (2014/1/18), 三村 昌泰 (監修, 翻訳), 瀬野 裕美 (監修), 河内 一樹 (監修), 中口 悦史 (監修).
- [31] ジェームズ D. マレー：マレー数理生物学入門 応用編 — パターン形成の数理とバイオメディカルへの応用, 丸善出版 (2016/12/23), 三村 昌泰 (監修, 翻訳), 瀬野 裕美 (監修).