π ノート

桂田 祐史

2004 年 1 月, 2017 年 7 月 22 日

2003 年度卒研の清水君の卒研 ([19]) の相手をしたときのノートとしてスタートしたが、2005 年度卒研でも取り上げてくれた学生がいたので、ひさしぶりに工事再開 (2005 年 7 月)。

リンク切れを指摘されたので、久しぶりに手を入れてみました (2013 年 11 月)。本当は色々直さないといけないのだと思いますが、怖いのでチェックしません (笑)。

目 次

1 序にかえて — 私と円周率 3

1.1 ペートル・ベックマン『π の歴史』 3
1.2 カール・セーガン『コンタクト』 3
1.3 2003 年度卒研 清水康生「π の数値解析」 5
1.4 2005 年度卒研 椎名信治「Taylor 展開による平方根計算と建部の円周率計算の解析」 6
1.5 2005 年度卒研 鎌田伊織＆吉本清夏「π — 計算法の変遷」 6
1.6 「情報処理２」でのネタとして 6

2 円に接する正多角形の利用 6

2.1 記号 6
2.2 基本的な結果 6
2.2.1 内接正 n 角形の周長 p_n 7
2.2.2 内接正 n 角形の面積 s_n 7
2.2.3 外接正 n 角形の周長 P_n 7
2.2.4 外接正 n 角形の面積 S_n 8
2.2.5 大小関係、極限など 8
2.3 漸化式 8
2.3.1 p_n についての漸化式 9
2.3.2 P_n についての漸化式 10
2.4 アルキメデスの使った漸化式 13
2.5 加速 15
2.6 精度の解析 15
2.7 歴史 17

3 マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数 18
3.1 歴史 18
3.2 証明 19
3.2.1 飛び道具を使う証明 19
3.2.2 初等的な証明 19

4 逆三角関数の級数展開を用いる方法 20
4.1 逆三角関数の級数展開 20
4.2 Sharp 21
4.3 Machin 21
4.4 Charles Huttion 21
4.5 Euler 21
4.6 Gauss 22
4.7 クリンゲンシュテルナ (S.Klingenstierna) の公式 22
4.8 シュテルマー (F.C.M.Störmer, 1896) 22
4.9 高野喜久雄 22
4.10 結論？ 23

5 AGM による π の計算 25
5.1 発端 25
5.2 計算法の背景 26
5.3 AGM1 28
5.4 Gauss–Legendre, Salamin–Brent 29
5.5 Borwein 29

6 DRM 法 29

7 Ramanujan 29
7.1 Chudonovsky 29

A 十進 BASIC で 30
A.1 プログラム 30
A.2 実行結果 31

B π の数論的性質 33
B.1 無理数であること 33
B.2 超越数であること 33

C π の数値計算の桁数の記録 33
C.1 2004 年 1 月現在の世界記録 33

D　円周率の呼び名& π **33**
D.1　呼び方 . . . 33
D.2　文字 π を使うようになった経緯 . . . 33
D.3　文字 π を使う理由 . . . 34

E　楕円積分と AGM **34**
E.1　AGM . . . 34
E.2　完全楕円積分 $K(k)$, $E(k)$, $I(a,b)$, $J(a,b)$ . . . 36
E.3　Legendre の関係式 . . . 43
E.4　Gauss-Legendre あるいは Salamin-Brent のアルゴリズム . . . 43
E.5　misc. . . . 44
E.5.1　ルーツ . . . 44
E.5.2　楕円積分 . . . 44
E.5.3　超幾何関数による表示 . . . 45
E.5.4　微分方程式 . . . 45
E.5.5　Legendre form . . . 46

F　数値実験 **47**

G **51**

1　序にかえて — 私と円周率

1.1　ペートル・ベックマン『π の歴史』

(この稿は書きかけです。)

高校生の頃、1 年に 365 回くらいは本屋に行っていたと思う。趣味の将棋や、勉強用の参考書、マンガなどなど、色々立ち読みして、こづかいの許す範囲で買いまくっていたわけだけれど、小学校の理科の先生のお勧めにしたがって、ガモフ全集など、理科の本のコーナーにも足を運んだ。その際に見つけたのが、1975 年に邦訳の出た「π の歴史」(原著は 1973 年出版だったと思う)。

1.2　カール・セーガン『コンタクト』

一時期、NASA というとカール・セーガンがしゃしゃり出て来ることが多かった。有名な『コスモス』は仕掛けにこり過ぎて「平家蟹」で失敗したが、それはさておき面白い読み物であった。

その彼が書いた人類と地球外生命との遭遇をテーマに書かれた小説が『コンタクト』である。これを読んだ私の感想は「まあまあ面白いけれど、それは無理だろう…それにしてもブッ飛んでるなあ」というものであった。

とは言え、それなりの好感を持ったので、ずっと後になって (カール・セーガンが亡くなってから)、ハリウッドでジョディ・フォスター主演で映画化されたことを知ったときは結構期待した。見に行く前の映画評もなかなか好評のようであった。そして映画館に足を運んで…腹が立った。あの原作をそんなふうに安直にいじくってしまって良いのですか。原作者に対して失礼と言うか、死者の冒涜と言って良いのではないかいな。

というわけで、少し原作の紹介をする (お話の解説は「ばらし」になりかねないので嫌いなのであるが)。私の記憶が確かならば『コンタクト』の第 1 章のタイトルは「超越数」であったと思う。この場合は「π」と言い換えても良いくらい。父と娘の話。この娘は長じて天文学者となり、地球外知性とのコンタクトをするわけで、つまりはカール・セーガン自身の分身であり、子供時代の話はおそらくは彼が実際に経験したことなのだと信じる (あまり根拠はないけれど)。私自身も子供の頃、父から円周率の無理数性を聞いたことがあるので、読んだときに非常な親近感を抱いたものである (無理数性と超越性では負けているような気がするけど)。理科少年 (＆少女) としては共通性の高い経験なのかなと思った。

さて、それからは “コンタクト” の準備の話になるのだけれど、信号の変調とその解読などの話が続いて、ほんとに理科小説。きっとセーガンが本職で常日頃考えていることを披露しているのだろうけれど、ちょっと読むのはしんどい。

映画の方は人間の葛藤の話にしてしまう。それも宗教がかった。確かにキリスト教の根強い国としては、神がかりの話になるのでしょう。ふと、宇宙戦争 (トムクルーズじゃなくて古い方) に出て来た神父 (牧師？) が、我々よりも知性が高ければ…言ってあえなく宇宙人に殺されてしまうエピソードを思い出す (テレビを見ていた日本のガキにすれば「馬鹿だなぁ」なのだが、大真面目でそういう思考をしかねないのでしょう、本当のキリスト教徒は)。

ハリウッドの脚本家は、理科小説らしさに「なんだこりゃ」と思っただろうね。でも、陳腐な神様の話に変えてしまって、まあそんな内容の映画で「結構受けた」わけだけど、それは違うと思う。

信号の変調とその解読の話は長たらしくて、“すぺくたきゅらー” な話 (実際に地球外知性に「会いに行く」) が始まる前にもったいつけただけかと思いそうだが (僕は結構駆け足で飛ばし飛ばし読んでしまった)、実はそうではなくて、最後の伏線なのだ。そして実はこの小説の始まりも伏線だったのだ。この小説は最初から全体の構成を計算して作ってあったわけだ。

地球外生命とコンタクトできるのか、コンタクトするためにはどのような「努力」をすれば良いのか、成功するには運もいるだろうが、自分が歩んできた道、自分の努力の方向は正しいと信じたい。それで自分の分身である主人公が最後に成功して、ともすると神様に「会った」と言えるような話を書いたということなのだろう。

これは安直な神様云々とは正反対の話のような気がする。少なくともブッシュの神様ではない (これを書いているのは 2006 年)。

数学のような学問をするには、畏敬の念を持つ、祈るという姿勢が究極のところで効いてくるのだという人もいるから (僕も結構信じている)、神様と正反対ではないと思う。セーガンの小説は「分かる」と思う。小説として「成功している」かどうかは難しいところ。結果的には成功しなかったのでしょうね。

1.3 2003年度卒研 清水康生「πの数値解析」

(ひたすら脱線する。色々面白い事実があるが、それをここで紹介することはしない。何で今さらπを取り上げることが許されるか状況をしゃべってみたい。)

ずっと以前、某学生に円周率をやりたい、と言われて「やめろ」と説得した覚えがある。その当時は、円周率の数値計算は「終わっている」と理解していたのである。しかし実はそれは勘違いであることが分かってきて、今回相談されて OK を出すことになった。

円周率というと、筆者が高校生のとき (1975頃) に書店で見つけたペートル・ベックマン「πの歴史」が面白い読み物である。これが書かれたときから新しい発見が色々あって、円周率の計算法は大きく変ってしまったのである。この本が書かれた頃の世の中の認識は、マチンの公式 (arctan 公式) によって計算することで十分であり、後はコンピューターのパワー次第、ということだったと思う。

最近では、ジャン・ポール・ドゥラエ「πの魅力」という読み物 (邦訳は2001年) が出ている。例えばこの本では、サラミン&ブレントの算術幾何平均アルゴリズム (1976) に代表される新しい方法が arctan 公式を大幅に凌駕した、ということになっているが、実はこのことも今では「古く」なってしまっている。

この文章を書いている2004年10月時点の円周率計算の世界記録は、実は arctan 公式を使って、2002年12月「例の」金田氏によって達成された10進1兆2411億桁というものである。それが可能になったのは、また DRM 法 (分割有理数化法, 後保範(うしろやすのり)による) という新しい発見があったからなのだが (後先生の WWW ページを見ましょう)、それがマスコミなどで大きく取り上げられたことはないみたい。うーん。新しいスパコンでもなければニュースにしないのね。

この手の性能向上は、コンピューター・システムの性能向上もさることながら、アルゴリズムやソフトウェア上の工夫も大きく、貢献度は半々くらいではないかと思うのだけどね。

ちなみに記録更新に使われた公式は、詩人高野喜久雄氏によるものである (http://www.asahi-net.or.jp/~yp5k-tkn/, また共立出版の bit 1983年4月号への寄稿を見よ)。ここらへんの選択はちょっと楽しい。

一応、本線に戻ると、清水君は建部賢弘(かたひろ) (1664–1739) の綴術算経(てつじゅつさんけい) (1722) にある加速法の再現実験とそれに対する考察をしている。

(また脱線)

この建部の計算については、和田秀男『高速乗算法と素数判定法』(上智大学講究録, 1983) という本で、追試と分析がされているのが有名だけれど、Mathematica が使える現在、学生が気軽に色々試せるのは時の流れを感じる (もっとも、分析は和田先生の方がずっと鋭い…これは比べる方が失礼か)。

綴術算経については、和算の研究者である小川束氏の WWW ページ http://www.tcp-ip.or.jp/~hom/ http://fomalhaut.web.infoseek.co.jp/science/tetujyutu.pdf に公開画像があって見ることができる。実にすばらしい。

1.4 2005年度卒研 椎名信治「Taylor展開による平方根計算と建部の円周率計算の解析」

椎名君は清水君の後をフォローして、清水君が完遂できなかったことをほぼきれいに解決することができた。

具体的には、高名な和算家である建部賢弘の「綴術算経」の円周率の加速法計算について、建部自身は知らなかったテイラー展開 (西洋数学！) を用いることでその原理が「見える」ようになった、というものである。この話は有名で、小川 [16], 和田 [34], 森本 [35] などに一応は書いてあるが、椎名君のレポートは細かいところまで書けていると思う。なお、内接正多角形の周長の代わりに外接正多角形の周長を用いて加速計算した場合の結果とその解析については、私は直接文献で目にしたことはなくて、ちょっと珍しいかもしれない。その過程で正接係数などが登場して、皆川君の卒業研究 (ベルヌーイ数) とオーバーラップしたのは楽しい出会いであった。

細かいことだが、和田 [34] では苦労して開発した多倍長計算プログラム (ひょっとして一部計算ミスをしている？)、森本 [35] では UBASIC, 小川 [16] や清水 [19] では Mathematica と、建部の計算を追試する敷居はやや高かったのだが、椎名君は (仮称) 十進 BASIC で数値計算をしている。この種の数値実験の敷居が低くなったことを実感する。

1.5 2005年度卒研 鎌田伊織＆吉本清夏「π — 計算法の変遷」

鎌田君、吉本さんが卒研の輪講で担当したのは三角関数で、テイラー展開つながりで、円周率の計算法に取り組むことになった。テイラー展開を用いる方法は吉本さん、算術幾何平均を用いる方法は鎌田君という分担である。

1.6 「情報処理２」でのネタとして

ここ数年「情報処理 2」という講義のネタにしている。具体的なことは、その資料 `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2011/jouhousyori2-2011-06/node10.html` に譲る。

2 円に接する正多角形の利用

2.1 記号

直径 1 (半径 1/2) の円に内接する正 n 角形の周の長さ、面積をそれぞれ p_n, s_n とする。
直径 1 (半径 1/2) の円に外接する正 n 角形の周の長さ、面積をそれぞれ P_n, S_n とする。

2.2 基本的な結果

ここでは $n \geq 3$ と仮定する。

2.2.1 内接正 n 角形の周長 p_n

(1)
$$p_n = n \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{2n} = n \sin \frac{\pi}{n}.$$

Mathematica で p_n

```
p[n_]:=p[n]=n Sin[Pi/n]
Table[{n,p[n]},{n,3,10}]
```

(やってみると分かるが、割と根性無しである。)

$$p_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad p_4 = 2\sqrt{2}, \quad p_5 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \quad p_6 = 3, \quad p_8 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad \cdots$$

(p_{17} は平方根で書けるわけかな？)

なお、$n=2$ のときは正多角形の周長という意味はなくなるが、この式に形式的に代入した $p_2 = 2\sin\dfrac{\pi}{2} = 2$ は、後で出て来る漸化式と整合する。こじつけで 2 角形の周長と考えられなくもない。

2.2.2 内接正 n 角形の面積 s_n

(2)
$$s_n = n \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{2n} = \frac{n}{4} \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{n}{8} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Mathematica で s_n

```
s[n_]:=s[n]=(n/8)Sin[2Pi/n]
```

$$s_3 = \frac{3\sqrt{3}}{16}, \quad s_4 = \frac{1}{2}, \quad s_5 = \frac{5}{16}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \quad s_6 = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad \cdots$$

2.2.3 外接正 n 角形の周長 P_n

(3)
$$P_n = n \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \tan \frac{2\pi}{2n} = n \tan \frac{\pi}{n}.$$

Mathematica で P_n

```
P[n_]:=P[n]=n Tan[Pi/n]
```

$$P_3 = 3\sqrt{3}, \quad P_4 = 4, \quad P_5 = 5\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \quad P_6 = 2\sqrt{3}, \cdots$$

2.2.4　外接正 n 角形の面積 S_n

$$S_n = n \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \tan \frac{2\pi}{2n} = \frac{n}{4} \tan \frac{\pi}{n}. \tag{4}$$

P_n との間に

$$S_n = \frac{P_n}{4} \tag{5}$$

という関係がある。これは重要で、面積の大小関係から分かる $\frac{\pi}{4} < S_n$ から

$$\pi < P_n$$

が導かれる。

Mathematica で S_n

```
S[n_]:=S[n]=n Tan[Pi/n]/4
```

$$S_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad S_4 = 1, \quad S_5 = \frac{5}{4}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \quad S_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cdots$$

2.2.5　大小関係、極限など

$$p_n < \pi < P_n, \quad s_n < \frac{\pi}{4} < S_n. \tag{6}$$

(「証明せよ」と言われると、$p_n < \pi$, $s_n < \frac{\pi}{4} < S_n$ は簡単だが、$\pi < P_n$ は一瞬詰まってしまうかも。上で述べたように、$\frac{\pi}{4} = S_n = \frac{P_n}{4}$ から $\pi < 4S_n = P_n$ が得られる。)

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n = \pi, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

$\{p_n\}_{n=3}^{\infty}, \{s_n\}_{n=3}^{\infty}$ は n について単調増加、$\{P_n\}_{n=3}^{\infty}, \{S_n\}_{n=3}^{\infty}$ は n について単調減少である。

2.3　漸化式

実は次項 2.4 が素晴らしく、ここは「一応やってみただけ」。

2.3.1 p_n についての漸化式

半角の公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

より、$\sin\theta$ から $\sin(\theta/2)$ を求める公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2}$$

が得られる。$\theta=\pi/n$ とすると、$\sin\theta=p_n/n$, $\sin(\theta/2)=p_{2n}/(2n)$ より

$$\left(\frac{p_{2n}}{2n}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{p_n}{n}\right)^2}\right).$$

整理して

$$(p_{2n})^2=2\left(n^2-n\sqrt{n^2-(p_n)^2}\right). \tag{8}$$

これから n が 2 の冪であるときに計算することにして

$$q_n:=p_{2^n} \tag{9}$$

とおくと、

$$(q_{n+1})^2=2\left((2^n)^2-2^n\sqrt{(2^n)^2-(q_n)^2}\right)$$

であるから

$$q_{n+1}=\sqrt{2(2^{2n}-2^n\sqrt{2^{2n}-(q_n)^2})}. \tag{10}$$

Mathematica で q_n

```
q[1]=2;
q[n_]:=q[n]=Simplify[Sqrt[2^(2n-1)-2^n Sqrt[2^(2n-2)-q[n-1]^2]]]
```

$$\begin{aligned} q_1 &= 2,\quad q_2=2\sqrt{2},\quad q_3=4\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad q_4=8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \\ q_5 &= 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\quad \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

単純ではあるが、ちょっと見入ってしまう式である。

Mathematica で p_n (根性編)

あるいは

$$p_n = \sqrt{2\left((n/2)^2 - (n/2)\sqrt{(n/2)^2 - (p_{n/2}^2)}\right)}$$

として、

```
Clear[p];
p[2]=2;p[4]=2Sqrt[2]; p[3]=3Sqrt[3]/2; p[5]=(5/2)Sqrt[(5-Sqrt[5])/2];
p[n_]:=p[n]=Module[{N},N=n/2;Simplify[Sqrt[2(N^2-N Sqrt[N^2-p[N]^2])]]]
```

のようなプログラムの方が融通が聞くかも知れない。

```
Clear[p];
p[2]=2; p[3]=3Sqrt[3]/2; p[5]=(5/2)Sqrt[(5-Sqrt[5])/2];
p[n_]:=p[n]=Module[{N},
                   If[EvenQ[n],
                 (N=n/2;Simplify[Sqrt[2(N^2-N Sqrt[N^2-p[N]^2])]]),
              n Sin[Pi/n]]]
```

は間違っていないか？これなら `Table[p[n],{n,2,20}]` とか出来る。(定義式から計算したものと数値計算で比較すると正しいようである。)

2.3.2 P_n についての漸化式

tan の倍角公式

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

を $\tan\theta$ についての 2 次方程式として解いて、

$$\tan\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2 2\theta}}{\tan 2\theta}.$$

符号を考えて

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}-1}{\tan 2\theta}.$$

$2\theta = \pi/n$ とすると $\tan 2\theta = P_n/n$, $\tan\theta = P_{2n}/(2n)$ なので

$$\frac{P_{2n}}{2n} = \frac{\sqrt{1+(P_n/n)^2}-1}{P_n/n}.$$

ゆえに

$$P_{2n} = 2n \cdot n\frac{\sqrt{1+(P_n/n)^2}-1}{P_n} = \frac{2n\left(\sqrt{n^2+(P_n)^2}-n\right)}{P_n}.$$

$$Q_n := P_{2^n} \tag{12}$$

とおくと、

$$Q_{n+1} = \frac{2\cdot 2^n\left(\sqrt{(2^n)^2+(Q_n)^2}-2^n\right)}{Q_n} = \frac{2^{n+1}\left(\sqrt{2^{2n}+(Q_n)^2}-2^n\right)}{Q_n}.$$

Mathematica で Q_n

```
Q[1]=Infinity;
Q[2]=4;
Q[n_]:=Q[n]=Simplify[2^n(Sqrt[2^(2n-2)+Q[n-1]^2]-2^(n-1))/Q[n-1]]
```

Mathematica で P_n

```
Clear[P];
P[3]=3Sqrt[3]; P[4]=4;
P[N_]:=P[n]=
  Module[{n},
    If[EvenQ[N],
      (n=N/2;Simplify[2n (Sqrt[n^2+P[n]^2]-n)/P[n]]),
      N Tan[Pi/N]
    ]
  ]
```

$$\begin{aligned} Q_2 &= P_4 = 4, Q_3 = P_8 = 8(\sqrt{2}-1), \quad Q_4 = \frac{16(\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1)}{\sqrt{2}-1}, \\ Q_5 &= \frac{32\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{8-4\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)}{-1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \quad \cdots \end{aligned}$$

あまり簡単にならず、Mathematica も Q[7] の計算あたりから、長く考え込んでしまうようになる

Mathematica で Q_n (小数計算で満足)

```
Clear[Q];
Q[1]=Infinity;
Q[2]=4;
Q[n_]:=Q[n]=Simplify[2^n(Sqrt[2^(2n-2)+Q[n-1]^2]-2^(n-1))/Q[n-1]]
Q[3]=N[Q[3],100]
Table[{n,Q[n]},{n,2,50}]
```

2	4
3	3.31370849898476039041350979367758462
4	3.18259787807452811058556196231481965
5	3.15172490742925609847032068132247783
6	3.14411838524590426274197256136407149
7	3.14222362994245684538620850699631631
8	3.14175036916896645910721362797332388
9	3.14163208070318180571871518787114766
10	3.14160251025680894676368965849266001
11	3.14159511774958905035309223598169594
12	3.14159326962930731078945878682797576
13	3.14159280759964457652825443596058346
14	3.14159269209225437422841955718088385
15	3.14159266321540841623217919009007384
16	3.14159265599619702626928316277128760
17	3.14159265419139418499956931883584370
18	3.14159265374019347507095399160890296
19	3.14159265362739329761310098063972575
20	3.14159265359919325325015652919943117
21	3.14159265359214324215951534142072707
22	3.14159265359038073938686097729363656
23	3.14159265358994011369369775706296303
24	3.14159265358982995727040697518036334
25	3.14159265358980241816458428115815521
26	3.14159265358979553338812860774313079
27	3.14159265358979381219401468939503266
28	3.14159265358979338189548620980836175
29	3.14159265358979327432085408991171612
30	3.14159265358979324742719605993755610
31	3.14159265358979324070378155244401618
32	3.14159265358979323902292792557063120
33	3.14159265358979323860271451885228496
34	3.14159265358979323849766116717269840
35	3.14159265358979323847139782925280176
36	3.14159265358979323846483199477282760
37	3.14159265358979323846319053615283406
38	3.14159265358979323846278017149783567
39	3.14159265358979323846267758033408608
40	3.14159265358979323846265193254314868
41	3.14159265358979323846264552059541433
42	3.14159265358979323846264391760848074
43	3.14159265358979323846264351686174734
44	3.14159265358979323846264341667506400
45	3.14159265358979323846264339162839316
46	3.14159265358979323846264338536672545
47	3.14159265358979323846264338380130852
48	3.14159265358979323846264338340995429
49	3.14159265358979323846264338331211573
50	3.14159265358979323846264338328765609

(細かいアソビ) $Q_1 = P_2$ は図形的な意味を持たないが、上の漸化式を

$$Q_{n+1} = 2^{n+1} \left(\sqrt{\left(\frac{2^n}{Q_n}\right)^2 + 1} - \frac{2^n}{Q_n} \right)$$

と書き直すと、形式的に $Q_1 = \infty$ とおくと $n = 1$ で漸化式が満たされるようになる。
ところが清水君が発見したことだが、

$$Q_2 = 4, \quad Q_3 = 8\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}, \quad Q_4 = 16\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$Q_5 = 32\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}, \cdots$$

結局 $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ ともにきれいになるわけだ。

2.4 アルキメデスの使った漸化式

p_n, P_n から P_{2n}, p_{2n} を求めるには、

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}. \tag{13}$$

実際

$$\begin{aligned}\sqrt{p_n P_{2n}} &= \sqrt{n\sin\frac{\pi}{n}\cdot 2n\tan\frac{\pi}{2n}} = n\sqrt{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\cdot 2\tan\frac{\pi}{2n}} = n\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{2n}} \\ &= 2n\sin\frac{\pi}{2n} = p_{2n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{P_n}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{1}{n\sin\frac{\pi}{n}}\times\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}\cos^2\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2n\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{P_n}.\end{aligned}$$

(14)

$$(p_3, P_3) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3}\right), \quad (p_4, P_4) = \left(2\sqrt{2}, 4\right), \quad (p_5, P_5) = \left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, 5\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right),$$

$$(p_6, P_6) = \left(3, 2\sqrt{3}\right), \cdots$$

出発値としては、$n = 4, 6$ あたりが候補になるだろう。アルキメデスは $n = 6$ を採用したわけである。

Mathematica で計算 (2017/7/22 修正)

```
Clear[pP];
pP[3]={3Sqrt[3]/2,3Sqrt[3]};
pP[4]={2Sqrt[2],4};
pP[n_]:=pP[n]=(p=pP[n/2][[1]];P=pP[n/2][[2]];t=2 p P/(p+P);{Sqrt[p t],t})
Table[{2^n,N[pP[2^n],20]},{n,2,10}]
Table[{3 2^n,N[pP[3 2^n],20]},{n,0,10}]
```

正 2^n 角形の周長

n	p_n	P_n
4	2.8284271247461900976	4.0000000000000000000
8	3.0614674589207181738	3.3137084989847603904
16	3.1214451522580522856	3.1825978780745281106
32	3.1365484905459392638	3.1517249074292560985
64	3.1403311569547529123	3.1441183852459042627
128	3.1412772509327728681	3.1422236299424568454
256	3.1415138011443010763	3.1417503691689664591
512	3.1415729403670913841	3.1416320807031818057
1024	3.1415877252771597006	3.1416025102568089468

正 $3 \cdot 2^n$ 角形の周長

n	p_n	P_n
6	3.0000000000000000000	3.4641016151377545871
12	3.1058285412302491482	3.2153903091734724777
24	3.1326286132812381972	3.1596599420975004833
48	3.1393502030468672071	3.1460862151314349711
96	3.1410319508905096381	3.1427145996453682982
192	3.1414524722854620755	3.1418730499798238717
384	3.1415576079118576455	3.1416627470568485262
768	3.1415838921483184087	3.1416101766046895388
1536	3.1415904632280500957	3.1415970343215261520
3072	3.1415921059992715505	3.1415937487713520280

この漸化式はなかなか優秀であると思う。反復を 1 ステップ進めるために、長い桁の数の掛け算を 2 回、割り算を 1 回、平方根を 1 回計算するだけで済む。

一方で π の具体的な上界、下界を与えていることも重要である。

アルキメデスは、$3 \cdot 2^5 = 96$ 角形の

$$q = 3.141031950890509, Q = 3.142714599645368$$

から

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

を出したわけである。2000 年以上前の精度保証付き数値計算？

このアルキメデスの方法を超える計算法は 1000 年以上現れないわけであるが、その 1000 年の間、外接円の周長 P_n を計算した人は稀で、内接円の周長 p_n を計算した人がほとんどである。つまり、精度保証していない (笑)。

アルキメデスは素晴らしい。当たり前だけど。

2.5 加速

sin の Taylor 展開から

$$p_n = n\sin\frac{\pi}{n} = n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2j+1} = \pi + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\pi^{2j+1}n^{-2j}$$

であるから、$q_n = p_{2^n}$ は

$$q_n = \pi + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\pi^{2j+1}(2^n)^{-2j} = \pi + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}4^{-nj}$$

を満たす。

(工事中)

2.6 精度の解析

p_n, P_n と π との差は？

『アルキメデス法による円周率の算出について』http://www.cybernet.co.jp/maple/hiroba/PI/PI1.html によれば、

> 円に内接ない外接する正 $N = 10^n$ 角形の周囲長より求められる近似円周率はそれぞれ $2n = 2\log_{10}(N)$, $2n-1 = 2\log_{10}(N)-1$ 桁正しい。
>
> また、内接周囲長と外接周囲長とを $1:2$ に内分した値は $4n-1 = 4\log_{10}(N)-1$ 桁正しい近似円周率を与える。

(ふうん、すると、$96 \fallingdotseq 10^2$ 角形では、それぞれ 4, 3 の精度だが、うまく内分すると 7 桁得られると。ええと、$p_{96} = 3.14103195089050963 81\cdots$, $P_{96} = 3.1427145996453682982\cdots$ おお、なるほど。

$$\frac{2p_{96}+P_{96}}{3} = 3.1415928338087958581\cdots$$

おおお！すごい。本当だ。7 桁合っている。)

$$f(x) = \frac{2\sin x + \tan x}{3} = x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^7}{56} + \frac{7x^9}{960} + \cdots,$$

$$f^{(5)}(0) = 6,$$

$$
\begin{aligned}
f^{(5)}(x) &= \frac{2\ \cos(x)+16\sec(x)^6+88\sec(x)^4\tan(x)^2+16\sec(x)^2\tan(x)^4}{3}\\
&= \frac{2(33+\cos^7 x-26\cos 2x+\cos 4x)}{3\cos^6 x}
\end{aligned}
$$

であるから

$$\left|f^{(5)}(x)\right| \le \frac{2(33+1+26+1)}{3\cos^6 x} = \frac{61}{3\cos^6 x}$$

(工事中)

(2017/7/22) 1 年ゼミで取り上げた人がいたので。

長い桁数の計算をするのでなければ、C で書いて試せる。こういうのも置いておこう。

(15) $$q_n = p_{3\cdot 2^n},\quad Q_n = P_{3\cdot 2^n}$$

とおくと、

(16) $$q_0 = p_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2},\quad Q_0 = P_3 = 3\sqrt{3},$$

(17) $$Q_{n+1} = \frac{2q_nQ_n}{q_n+Q_n},\quad q_{n+1} = \sqrt{q_nQ_{n+1}}.$$

アルキメデスの方法を C プログラムで

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void)
{
  double q,Q,newQ;
  int n;
  q = 3 * sqrt(3.0) / 2;
  Q = 3 * sqrt(3.0);
  n = 0;
  printf("直径 1 の円に内接・外接する正 3× 2^{n}角形の周長\n");
  printf("n=%2d, q=%18.15f, Q=%18.15f, (2q+Q)/3=%18.15f\n",
   n, q, Q, (2*q+Q)/3);
  for (n = 1; n < 30; n++) {
    newQ = 2 * q * Q / (q + Q);
    q = sqrt(q * newQ);
    Q = newQ;
    printf("n=%2d, q=%18.15f, Q=%18.15f, (2q+Q)/3=%18.15f\n",
   n, q, Q, (2*q+Q)/3);
  }
}
```

アルキメデスの方法 (正 $3 \cdot 2^{n-1}$ 角形の周長による評価)

```
直径 1 の円に内接・外接する正 3× 2^{n}角形の周長
n= 0, q= 2.598076211353316, Q= 5.196152422706632, (2q+Q)/3= 3.464101615137755
n= 1, q= 3.000000000000000, Q= 3.464101615137754, (2q+Q)/3= 3.154700538379251
n= 2, q= 3.105828541230249, Q= 3.215390309173473, (2q+Q)/3= 3.142349130544657
n= 3, q= 3.132628613281238, Q= 3.159659942097500, (2q+Q)/3= 3.141639056219992
n= 4, q= 3.139350203046867, Q= 3.146086215131435, (2q+Q)/3= 3.141595540408390
n= 5, q= 3.141031950890509, Q= 3.142714599645368, (2q+Q)/3= 3.141592833808796
n= 6, q= 3.141452472285462, Q= 3.141873049979824, (2q+Q)/3= 3.141592664850249
n= 7, q= 3.141557607911857, Q= 3.141662747056849, (2q+Q)/3= 3.141592654293521
n= 8, q= 3.141583892148318, Q= 3.141610176604690, (2q+Q)/3= 3.141592653633775
n= 9, q= 3.141590463228050, Q= 3.141597034321526, (2q+Q)/3= 3.141592653592542
n=10, q= 3.141592105999271, Q= 3.141593748771351, (2q+Q)/3= 3.141592653589965
n=11, q= 3.141592516692157, Q= 3.141592927385096, (2q+Q)/3= 3.141592653589804
n=12, q= 3.141592619365384, Q= 3.141592722038614, (2q+Q)/3= 3.141592653589794
n=13, q= 3.141592645033691, Q= 3.141592670701998, (2q+Q)/3= 3.141592653589793
n=14, q= 3.141592651450767, Q= 3.141592657867844, (2q+Q)/3= 3.141592653589793
n=15, q= 3.141592653055036, Q= 3.141592654659306, (2q+Q)/3= 3.141592653589793
n=16, q= 3.141592653456104, Q= 3.141592653857171, (2q+Q)/3= 3.141592653589793
n=17, q= 3.141592653556370, Q= 3.141592653656637, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=18, q= 3.141592653581437, Q= 3.141592653606503, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=19, q= 3.141592653587703, Q= 3.141592653593970, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=20, q= 3.141592653589270, Q= 3.141592653590837, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=21, q= 3.141592653589661, Q= 3.141592653590053, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=22, q= 3.141592653589759, Q= 3.141592653589857, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=23, q= 3.141592653589784, Q= 3.141592653589808, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=24, q= 3.141592653589790, Q= 3.141592653589796, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=25, q= 3.141592653589791, Q= 3.141592653589793, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=26, q= 3.141592653589792, Q= 3.141592653589792, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=27, q= 3.141592653589792, Q= 3.141592653589792, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=28, q= 3.141592653589792, Q= 3.141592653589792, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
n=29, q= 3.141592653589792, Q= 3.141592653589792, (2q+Q)/3= 3.141592653589792
```

正三角形からスタートして、13 回反復した正 $3 \cdot 2^{13} = 24576$ 角形で、double の精度一杯の 3.141592653589794 が出ている。

ブレンドしないと、25 回程度の反復が必要である。

2.7 歴史

一次資料に当たれるわけではないが、それぞれ出典を書いておこう。

http://www002.upp.so-net.ne.jp/koinunomadoromi/tubuyaki/pie.html

http://ddb.libnet.kulib.kyoto-u.ac.jp/tenjikai/2003/zuroku/pdf/4000.pdf

二次資料を実際に見てみると分かるが、みんな結構いい加減である (食い違いが実に多く、食い違いがなくてもすぐにおかしいと分かるものが少なくない)。アルキメデスや建部については比較的きちんとしている (原典の翻訳が読めるから。アルキメデスはある意味で当然だが、建部の翻訳が読めるのは、小川束氏の功績である。)。

1. シュラクサ (シチリア島にある) の Archimedes[1] (B.C.287?–212) は、内接&外接正 96 角形

[1]球の表面積、体積、円周率の不等式評価、アルキメデスの浮力の原理、梃子の原理、重心と比重の概念などを発見した。12 世紀以後に広く知られることになり、16 世紀から著作のラテン語訳が広まる。

の周の長さから π の厳密な評価 $223/71 < \pi < 22/7$ を得た[2](B.C.250 頃)。211875/67441 ($= 3.1416349\cdots$) という値を書いている人もいるが本当？

2. 60 頃 劉徽 (中国の魏) 正 96 角形の辺の長さ 3.1416
3. 480 祖沖之 (中国) 正 24576 角形の辺の長さ 3.1415926
4. アル＝カーシー (ペルシャ, 1429) $3\cdot 2^{28}$ 角形の周長 16 桁
5. Ludolph van Ceulen (1540–1610, ドイツの Hildesheim に生まれ、オランダの Leiden にて没する) 内接正 2^{62} 角形の周長で 35 桁 (1596 年)。
6. ホイヘンス[3](オランダ, 1629–1695) 外接正？角形の周長に Richardson 加速を 1 回施して 35 桁の値を得た (1654 年)。
7. 関孝和 (1640 頃–1708) は内接正 $2^{17} = 131072$ 角形の周の長さから小数点以下 9 桁まで計算し、Aitken 加速で小数点以下 16 桁の値を得た。
8. 建部賢弘(かたひろ) (1664-1739) は内接正 $2^{10} = 1024$ 角形の周の長さから Richardson 加速を繰り返すことによって、小数点以下 41 桁の値を得た (綴術算経(てつじゅつさんけい) (1722), 不休綴術 (1722) — これについては、小川束氏の作成した WWW ページ[4] を参照すると良い)。
9. 鎌田俊清 () 内接外接正 $2^{44} =$ 角形の周長 (宅間流円理, 1722)。

$$3.14159265358979323846264336658 < \pi < 3.14159265358979323846264341667$$

小数第 24 位まで厳密に求められたことになる。(この結果にしても 2^{14} 角形と書いている人があったが、それではこの精度まで出るはずがない。)

3 マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

3.1 歴史

南インド (ケーララ) マーダヴァ () (fl. ca. 1380/1460) 小数点以下 11 桁の値とか sin, cos, arctan などの級数展開

マーダヴァという名前そのものはインドで非常にポピュラーらしい。神様の名前でもあり、現在でも人の名前として普通にあるみたい。

[2] $223/71 = 3.140845\cdots$, $22/7 = 3.1428571\cdots$.

[3] Chritiaan Huygens. 数学者、天文学者、物理学者。屈折式望遠鏡の製作。土星の環と衛星タイタン、オリオン星雲の発見。振子時計の発明。遠心力。完全弾性体の衝突理論。光の波動説。ホイヘンスの原理。

[4] `http://www.tcp-ip.or.jp/~hom/historyofmath/document/tetsujutsu/hmframe.html`

楠葉隆徳・林　隆夫・矢野道雄, インド数学研究 — 数列・円周率・三角法 —, 恒星社厚生閣 (1997).

ニーラカンタ (1444-1542 以後)

James Gregory (スコットランド, 1638–1675) http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gregory.html

Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646–1716)

3.2 証明

大学 1 年生になったとき、知り合ったばかりの友人に 3.2.1 の大筋を教えてもらったが、正直あちこち分からなかった。このストーリーは「普通」であるが、大抵の場合は細かいところ (項別積分可能性や Abel の定理) を無視して説明したり「理解」されていることが多いと思う。

3.2.1 飛び道具を使う証明

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(|x|<1)$$

を項別積分することで、Arctan の Taylor 展開

$$\operatorname{Arctan} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(|x|<1)$$

を得る。ところで右辺の級数は $x=1$ で収束する (交代級数についての Leibniz の定理)。Abel の連続定理より級数は $[0,1]$ で連続で、$x=1$ での値は $\operatorname{Arctan} 1=\dfrac{\pi}{4}$ に等しい。 ■

3.2.2 初等的な証明

(ここは「行間を空けずに」書く。少々くどく感じられるかもしれないが…)

$x\in\mathbf{R}$ のとき $-x^2\neq 1$ であるから、等比数列の和の公式より

$$\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k=\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}.$$

両辺を積分して

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\,dx.$$

ところで、

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k\,dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\,dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1},\qquad\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

なので、

$$R_n := -(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\, dx$$

とおけば

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + R_n.$$

ところが、$\dfrac{1}{1+x^2} \le 1$ であるから $\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} \le x^{2n+2}$ となるので、

$$|R_n| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx \le \int_0^1 x^{2n+2}\, dx = \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+3} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{4} + R_n\right) = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

4 逆三角関数の級数展開を用いる方法

4.1 逆三角関数の級数展開

Gregory 級数[5]とも呼ばれる arctan の Taylor 展開

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$$

が有名だが、

$$\arctan x = \frac{y}{x}\left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}y^2 + \cdots\right), \quad y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

も使われる (Euler が使ったのが有名)。

また Newton が発見した

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

も利用できる。

なお $\arcsin^2$ の展開

$$(\arcsin x)^2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!2^n)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

は Euler の 1737 年の発見ということになっているが、建部賢弘の 1722 年の綴術算経に載っている。

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}. \tag{18}$$

[5]スコットランド の J.Gregory が 1671 年に発見し (1667 年の「円と双曲線の真の求積」との説も)、Leibniz が 1674 年に再発見したという。また実は 1400 年頃、インドのケーララ地方の数学者マーダヴァが発見していたと言われている。

独り言 arctan を用いた π の表示公式は AGM を用いた π の計算方法の発見以来、今一つ面白味がなくなったのだと思っていた。先日神田の古書街をぶらついているときに

猪口（いのぐち） 和則（かずのり）, π の公式をデザインする, 新風舎 (1998)

という本を見つけた。内容は arctan を用いて π を表現する公式を色々と発見するというもので、趣味で数学をしている人の書いた本だが、なかなか楽しそうにやっていて、こちらもちょっと楽しい気分になれた。ただ残念なことに効率的にすぐれた目新しい公式が載っているわけではない。ただ新しい公式を作るだけなら簡単だが、新記録達成に利用できそうな公式を発見するには、その気になって真剣に挑戦しないとダメなのだろう。DRM 法により計算量を低減することで世界記録を樹立した (2002 年) した高野の公式 (高野 [24]) はどんな人がどうやって求めた式なのだろう？この疑問については、?? に続く。

4.2 Sharp

Abraham Sharp (1651–1742)

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

4.3 Machin

John Machin (1680–1752, ロンドン大学天文学教授) は 1706 年に

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

を用いて 100 桁の値を計算した。

以後この公式は多くの人達に採用されることになる。William Shanks (1812–1882) が 707 桁計算したのが有名 (567 桁までが正しかった)。

4.4 Charles Huttion

Charles Huttion (1737-1823) は 1776 年に

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7} = 2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7} = \arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3} = 3\arctan\frac{1}{4}+\arctan\frac{5}{99}$$

4.5 Euler

1737 年に得た公式

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.$$

$$\pi = 20\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{3}{79}.$$

4.6 Gauss

[28] によると「ガウスは 20 ページもの分解表の副産物として

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{38} + 20\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} + 24\arctan\frac{1}{268}$$

を見つけました (『全集』第 2 巻, p.477-502.)」1863 年という記録がある。

4.7 クリンゲンシュテルナ (S.Klingenstierna) の公式

Samuel Klingenstierna (1698–1765, スウェーデンの物理学者・数学者, 色収差のないレンズを作る理論) の 1730 年に発表した公式。

$$\frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515}.$$

4.8 シュテルマー (F.C.M.Störmer, 1896)

1896 年に F. C. M. Störmer

$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} - 12\arctan\frac{1}{682} + 24\arctan\frac{1}{12943}.$$

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239}.$$

4.9 高野喜久雄

1982 年に高野喜久雄氏の発見した公式

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}$$

については、高野 [24] を見よ。

金田 康正, 後(うしろ) 保範(やすのり)等のグループは、2002 年にこの公式を用いて 1 兆 2400 億桁の記録を樹立した。

高野喜久雄とはどういう人かと思って、検索したら `http://www.asahi-net.or.jp/~yp5k-tkn/` というページを見つけた。余所のページで調べても、『1927 年佐渡生まれ。詩集「独楽」「存在」、「高野喜久雄詩集」等。合唱曲「水のいのち」「朱鷺」等。』などとある。詩人？同姓同名の別人かと思ったが、WWW ページには円周率の話が…じっくり読んだら、間違いなく探していた当人だということが分かった。

以下、WWW ページから引用させて頂きます。

気になる円周率 π の公式

むかし、円周率 π の公式に興味を持って、さらに収束性の良い新公式を求め夢中になったことがある。発見した新公式は bit 誌[6]にまとめたが、収束性はマチン公式よりかなりよいのに、計算実時間では負けていた。最近、並列処理がかなり進んできたので、私の公式も使える場面があるのかなと秘かに期待していたが、「高野の公式を利用して並列処理をすれば良い成績が期待できよう」とのコメントをのせたホームページ 〈pi〉[7]や、松元隆二氏による本格的な〈π の公式集〉[8] に出会ってうれしかった。やっぱり気になっていたのかな。

4.10 結論？

そして、松元隆二 [32] に行き当たった。これはかなり力の入った研究の成果を報告した WWW ページである。詳しくはそのページを見てもらいたいが、WWW ページというものはいつなくなるか分からないので、内容をごく大ざっぱにまとめておく。

コンピューターを用いて、組織的に arctan 公式を探索した結果のレポートである。探索の手法は『共通の素数 (高野 [24] にある) を目印にして探索する方法』と『連鎖探索法 (これも高野 [24] にある)』の二つであり、かなり広い範囲で探索を行った結果、2 万個以上の公式を発見し、そこから既知のものを分別し、「10000 桁の精度を得るために必要な級数の項数」を計算して、公式の評価の目安として順位づけしてある。

はてさて、その結果は…

(i) arctan の項数が 2 であるものは、次の 4 つの古くから知られているもののみ (これしかないことは既知の結果)

1. $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ (J.Machin, 1706) 9256 項必要
2. $\pi/4 = 2\arctan(1/3) + \arctan(1/7)$ (C.Hutton, 1776) 16396 項必要
3. $\pi/4 = 2\arctan(1/2) - \arctan(1/7)$ (J.Hermann, 1706) 22526 項必要
4. $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$ (L.Euler, 1738) 27089 項必要

(ii) arctan の項数が 3 であるものは、105 個見つかった。ほとんどは既に知られていたもので、多くは F. C. M. Störmer によるものだが、上位 5 つを見ると何と。

1. $\pi/4 = 12\arctan(1/18) + 8\arctan(1/57) - 5\arctan(1/239)$ (C. F. Gauss, 1863) 8933 項必要
2. $\pi/4 = 8\arctan(1/10) - \arctan(1/239) - 4\arctan(1/515)$ (S. Klingenstu, 1730) 8946 項必要
3. $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - 2\arctan(1/478) + \arctan(1/54608393)$ (F. C. M. Störmer, 1896) 9666 項必要

---

[6] 高野 [24] のこと。
[7] `http://alfin.mine.utsunomiya-u.ac.jp/~niy/algo/p/pi.html`
[8] `http://www.pluto.ai.kyutech.ac.jp/~matumoto/dvi/pi.pdf`

4. $\pi/4 = 5\arctan(1/7) + 4\arctan(1/53) + 2\arctan(1/4443)$ (J.W.Wrench.Jr, 1938) 10187 項必要

5. $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/240) - \arctan(1/57361)$ (F. C. M. Störmer, 1896) 10305 項必要

(iii) arctan の項数が 4 であるものは、数多く見つかっている。ベスト 5 は次の通り。

1. $\pi/4 = 44\arctan(1/57) + 7\arctan(1/239) - 12\arctan(1/682) + 24\arctan(1/12943)$ (F. C. M. Störmer 1896) 7930 項必要
2. $\pi/4 = 22\arctan(1/28) + 2\arctan(1/443) - 5\arctan(1/1393) - 10\arctan(1/11018)$ (E. B. Escott 1896) 8172 項必要
3. $\pi/4 = 17\arctan(1/23) + 8\arctan(1/182) + 10\arctan(1/5118) + 5\arctan(1/6072)$ (松元隆二 1996) 8554 項必要
4. $\pi/4 = 12\arctan(1/49) + 32\arctan(1/57) - 5\arctan(1/239) + 12\arctan(1/110443)$ (高野喜久雄 1982) 8900 項必要
5. $\pi/4 = 16\arctan(1/21) + 3\arctan(1/239) + 4\arctan(1/343) - 4\arctan(1/27493)$ (松元隆二 1996) 8982 項必要

(iv) arctan の項数が 5 の公式は、松元氏が発見したものしか載っていない。ベストのものは $\pi/4 = 44\arctan(1/109) + 95\arctan(1/239) - 12\arctan(1/682) + 24\arctan(1/12943) - 44\arctan(1/6826318)$ (松元隆二, 1997) 8268 項必要

ここからどう分析するかは松元氏は読者に委ねているが、一応やっておくと (あくまで松元氏の作った評価の目安を使った場合であるが…例えば並列計算をするとまた評価が変わるはず)、

1. 栄えあるトップは F. C. M. Störmer の 1896 年発表の 4 項の arctan を用いる公式である。5 つ以下の項を用いる公式のいずれよりも効率がよい。
2. 高野の公式はかなり高く評価できる。日本人発見の公式としては松元隆二氏が 1996 年に発見した公式に抜かれてしまった。arctan を 4 項以下用いる公式の 4 位。
3. Gauss の公式は arctan の項数が 3 以下のものでは最も効率が高い (さすがは王様 Gauss, 20 ページの計算は伊達じゃない)。arctan の項数が 4 であるものと比べても、Gauss の公式よりも優れているものは 4 つしかない (高野氏の公式はかろうじて Gauss の公式を越えている)。

並列計算機を用いる場合は、最も足をひっぱる arctan の項の性能に左右されるのであろう。どういう基準になるのだろうか…

5 AGM による π の計算

Borwein-Borwein [36] が定番かもしれないが、あまり読み易くない。少しかみくだいて書いてある梅村 [9] (1999) の方が読みやすい。あるいはマイコン時代に出た和田 [34] (1983) の方が計算量の解析や、どうして 1976 年というタイミングで出て来たかなど分かるように書かれていて、お奨めである。

付録の「楕円積分と AGM」でかなりの部分を説明しておいた (まだ不足しているところがあるが…)。

5.1 発端

1976 年、π の計算法の歴史の新しい 1 ページが開かれた。

E. Salamin と R. P. Brent により独立に次の手順が「発掘」された[9]。

Salamin-Brent のアルゴリズム (別名 Gauss–Legendre のアルゴリズム)

$a=1$, $b=1/\sqrt{2}$ として、

$$
(19)\qquad \begin{cases} a_0 := a, \quad b_0 := b, \\ a_{n+1} := \dfrac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} & (n=0,1,2,\cdots), \\ c_n := \sqrt{a_n^2-b_n^2} & (n=0,1,2,\cdots) \end{cases}
$$

で定義された数列を用いて

$$
\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1-\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k c_k^2}
$$

とおくとき、

$$
\lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi \quad (\text{単調増加}).
$$

これは無限級数でなく、漸化式で定義された数列の極限として π をとらえているわけだが、いわゆる 2 次の収束 (20) をするので非常に速く高精度の値が得られる。収束の速さに関しては

$$
(20)\qquad \pi-\pi_{n+1} \le \frac{2^{-(n+1)}}{\pi^2}(\pi-\pi_n)^2 \quad (\text{二次収束}),
$$

$$
\pi-\pi_n \le \pi^2 2^{n+4} e^{-\pi\cdot 2^{n+1}}.
$$

以下に確認用のプログラムを示す。上に示したアルゴリズムそのままでは、c_n が桁落ちしそうなので、後で示す漸化式 $c_{n+1}=\dfrac{c_n^2}{4a_{n+1}}$ を採用している。

[9] Borwein-Borwein[36] から引用した。

確認用プログラム

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
{
  int n, maxn = 5;
  long double a, b, c, ap1, bp1, cp1, pi, pin, s, p;
  pi = 4 * atan(1.0);
  a = 1.0; b = 1.0 / sqrt(2.0L); c = 1.0 / sqrt(2.0L);
  s = 0;
  p = 1;
  for (n = 0; n < maxn; n++) {
    s += p * c * c; p *= 2;
    ap1 = (a + b) / 2;
    bp1 = sqrt(a * b);
    cp1 = c * c / (4 * ap1);
    a = ap1; b = bp1; c = cp1;
    pin = 2 * a * a / (1 - s);
    printf("n=%d π%d=%25.20Lf\n", n, n, pin);
  }
  return 0;
}
```

実行結果

```
oyabun% ./agmpi
n=0 B 0=   2.91421356237309431808
n=1 B 1=   3.14057925052216728822
n=2 B 2=   3.14159264621354140157
n=3 B 3=   3.14159265358979240891
n=4 B 4=   3.14159265358979235763
oyabun%
```

π_3 で達成した精度をそれ以上改善できていないことが分かる。

5.2 計算法の背景

「発掘」された方法の基礎となっているのは、19 世紀数学の華とも呼ばれる楕円関数論からの次の二つの事実である。

(i) 第一種完全楕円積分

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (0 \le k < 1)$$

と第二種完全楕円積分

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \quad (0 \le k \le)$$

の間に成り立つ **Legendre**(ルジャンドル) **の関係式** (Legendre's relation) と呼ばれる

(21) $$K(k)E(k') + K(k')E(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2} \quad (\text{ただし } k' := \sqrt{1-k^2})$$

という式の、特に $k=1/\sqrt{2}$ の場合の

$$2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

(ii) $K(k)$, $E(k)$ はいわゆる**算術幾何平均** (arithmetic geometric mean) アルゴリズムで計算できる。第一種完全楕円積分、第二種完全楕円積分の二変数版 $I(a,b)$, $J(a,b)$ を

$$I(a,b) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}, \quad J(a,b) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

で定めるとき、

$$I(a,b)M(a,b) = \frac{\pi}{2}, \quad J(a,b) = \left(a - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) I(a,b)$$

が成り立つ。ここで $M(a,b)$ は a, b の算術幾何平均と呼ばれる量で、(19) で定義される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の共通の極限として定義される:

$$M(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

また数列 $\{c_n\}$ は

$$c_n := \sqrt{|a_n^2 - b_n^2|}$$

で定義される。容易に

$$K(k) = I(1,k'), \quad E(k) = J(1,k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

であることが分かるので、

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,1/\sqrt{2})}, \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right)\frac{1}{M(1,1/\sqrt{2})}. \tag{23}$$

(23) を (22) に代入して整理すると

$$\pi = \frac{2M\left(1,1/\sqrt{2}\right)^2}{1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}.$$

ここで述べたことはすべて 19 世紀の段階で分かっていたわけであるが、π の計算法として、ここに述べたアルゴリズムが 1976 年という時点で初めて注目（「発掘」）されるようになった理由は、この方法が最初から長い桁の数の掛け算、平方根を必要とするため、arctan の級数展開を利用する方法と比べてむしろ不利だと考えられたせいであろう。1971 年の Strassen と Schönhage による**高速乗算法**の発見により、その立場が逆転してしまった。ちなみに、ごくごく最近になって発見された **DRM 法**によって、また arctan 法が AGM を用いる方法に追い付いた (ある意味で現在の世界記録は arctan + DRM によるものなので、抜き返したと言えるかもしれない)。

5.3 AGM1

$$a_0 = a, \quad b_0 = b,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

で $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定義すると、両者は共通の極限を持つ (収束はかなり速い)。

それを $M(a,b)$, $AGM(a,b)$, $\mathrm{agm}(a,b)$ などと表わし、arithmetic–geometric mean (算術幾何平均) と呼ぶ:

$$M(a,b) = \mathrm{AGM}(a,b) = \mathrm{agm}(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\frac{\partial}{\partial b} M(a,b) = \frac{M(a,b)}{(a-b)b\pi}(2M(a,b)E(k) - b\pi) = \frac{\pi}{8kb}\frac{(a+b)E(k) - 2bK(k)}{K(k)^2}, \quad k = \frac{a-b}{a+b}.$$

$K(k)$, $E(k)$ は第一種, 第二種の完全楕円積分

$$K(k) =$$

$$E(k) =$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(1,\sqrt{2})} &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\pi^{3/2}\sqrt{2}} \\ &= 0.84721308479397908660649912348219163648144591032694218 5\cdots\end{aligned}$$

は Gauss の定数と呼ばれる。

$$M(a,b) = \frac{(a+b)\pi}{4K\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)}$$

$$M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b),$$
$$M(a,b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right),$$
$$M(1, \sqrt{1-x^2}) = M(1+x, 1-x)$$
$$M(1,b) = \frac{1+b}{2} M\left(1, \frac{\sqrt{2\sqrt{b}}}{1+b}\right)$$
$$M(1,x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1+k_n), \quad k_0 = x, \quad k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}$$

5.4 Gauss–Legendre, Salamin–Brent

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t_0 = \frac{1}{4},$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad t_n = t_{n-1} - 2^{n-1}(a_n - a_{n-1})^2$$

$$\pi \fallingdotseq \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}.$$

5.5 Borwein

4 次の公式
$a_0 = 1$, $b_0 = 2^{-1/4}$, $t_0 = (5 - 2^{1/2})/8$,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-2}}{2}, \quad b_n = \left(\frac{a_{n-1}b_{n-1}(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2)}{2}\right)^{1/4}, \quad t_n = t_{n-1} + 4^n \left(a_n^4 - \left[\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right]^2\right)$$

$p = \log_2 N$ まで

$$\pi \fallingdotseq a_{p+1}^4/(1 - 2t_p)$$

6 DRM 法

後(うしろ) 保範(やすのり)の発見した**分割有理数化法** (DRM, Divide and Rationalize Method) は、π 計算記録ホルダーとして有名な金田氏に注目されて 2002 年 12 月の世界新記録の達成のためのプログラムに採用された。

後 [5], 後 [6], 後 [7] を見よ。

7 Ramanujan

7.1 Chudonovsky

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{n=0}^{p} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(6k-5)(6k-1)}{9k^3 106720^3} (-1)^n (545140134n + 13591408) \right)$$

A　十進BASICで

A.1　プログラム

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_high
DECLARE EXTERNAL FUNCTION arctan
DECLARE EXTERNAL SUB disp
LET  fmt$="-%.##^^^^^^"
LET  EPS=1e-100

print "グレゴリー・マーダヴァ・ライプニッツ"
CALL disp(4*arctan(1,EPS))

PRINT "シャープ"
CALL disp(6*arctan(1/SQR(3),EPS))

print "マチン"
CALL disp(4*(4*arctan(1/5,EPS)-arctan(1/239,EPS)))

print "Gauss 3項公式"
CALL disp(4*(12*arctan(1/18,EPS)+8*arctan(1/57,EPS)-5*arctan(1/239,EPS)))

PRINT "Gauss 4項公式"
CALL disp(4*(12*arctan(1/38,EPS)+20*arctan(1/57,EPS)+7*arctan(1/239,EPS)+24*arctan(1/26

PRINT "Gauss 9項公式"
CALL disp(4*(2805*arctan(1/5257,EPS)-398*arctan(1/9466,EPS)+1950*arctan(1/12943,EPS)+18

PRINT "高野喜久雄の公式"
CALL disp(4*(12*arctan(1/49,EPS)+32*arctan(1/57,EPS)-5*arctan(1/239,EPS)+12*arctan(1/11

PRINT "Stormer"
CALL disp(4*(44*arctan(1/57,EPS)+7*arctan(1/239,EPS)-12*arctan(1/682,EPS)+24*arctan(1/1
END

EXTERNAL SUB disp(x)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
PRINT x
LET  fmt$="-%.##^^^^^"
PRINT USING fmt$:ABS(x-PI)
END SUB
```

```
EXTERNAL FUNCTION arctan(x,EPS)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
LET  f=-x*x
LET  t=x
LET  s=0
LET  ok=0
FOR j=1 TO 1000
   LET  a=t/(2*j-1)
   LET  s=s+a
   LET  t=f*t
   IF ABS(a)<EPS THEN
      LET  ok=1
      EXIT FOR
   END IF
NEXT j
IF ok=0 THEN
   PRINT USING "arctan(##.### -%.##^^^^^) は失敗":x,EPS
   PRINT USING "-%.#^^^^^^ 程度の精度":ABS(a)
ELSE
   PRINT "第";j;"項まで加えて要求精度を達成しました。"
END IF
LET arctan=s
END FUNCTION
```

A.2 実行結果

```
グレゴリー・マーダヴァ・ライプニッツ
arctan( 1.000  1.00E-100) は失敗
 5.0E-0004 程度の精度
 3.1405926538397929259635965028693959704513893307797244893674577835419079312397476082 65
 1.00E-003
シャープ
第 205 項まで加えて要求精度を達成しました。
 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862 8
 9.81E-101
マチン
第 71 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 22 項まで加えて要求精度を達成しました。
 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862 8
 1.20E-101
```

Gauss 3 項公式
第 40 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 29 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 22 項まで加えて要求精度を達成しました。
 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628
 1.23E-102
Gauss 4 項公式
第 32 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 29 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 22 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 21 項まで加えて要求精度を達成しました。
 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628
 1.09E-103
Gauss 9 項公式
第 14 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 13 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 13 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 12 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 12 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 11 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 11 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 10 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 10 項まで加えて要求精度を達成しました。
 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628
 7.45E-106
高野喜久雄の公式
第 30 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 29 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 22 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 11 項まで加えて要求精度を達成しました。
 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628
 7.29E-105
Stormer
第 29 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 22 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 18 項まで加えて要求精度を達成しました。
第 13 項まで加えて要求精度を達成しました。
 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628
 7.73E-104

B　π の数論的性質

B.1　無理数であること

1761 年、ハインリッヒ・ランベルト (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777, Mülhausen (Mulhouse, 現在のフランス) に生まれ、Berlin にて没する, 物理・数学・地図投影法) により証明される。x が有理数ならば e^x も $\tan x$ も無理数であることを証明した。

ハイラー、ワナーの解析教程 [28] に証明が載っている。

ランベルトは円の連分数表示にも業績がある。また銀河系の形状と階層構造についての仕事も有名である。光の輝度の単位ランベルト。月面図。

B.2　超越数であること

1882 年、リンデマン (Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852–1939, Hilbert の師匠としても有名[10]) が証明に成功した。

π の無理数性, 超越性の証明については、岡本 [15] に色々な情報へのポインターがある。

C　π の数値計算の桁数の記録

C.1　2004 年 1 月現在の世界記録

2002 年金田が日立のコンピューターで記録。

http://www.hitachi.co.jp/Prod/comp/hpc/pdf/todai.pdf

D　円周率の呼び名& π

D.1　呼び方

円周率 (日本)

ルドルフの数 (ドイツ)

D.2　文字 π を使うようになった経緯

π という文字を使うようになったのは、1706 年に William Jones が “A New Introduction to the Mathematics” の中で、円周と直径の比を表わすのに使ったのが始まりである。しかしながら Leonhard Euler (1707–1783, スイスの Basel に生まれ、ロシアの Petersburg に没する) が普及に果たした役割が大きいとか。特に次の二つが有名である。

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

[10]何でも 60 人の博士を出したとか。

D.3　文字 π を使う理由

ギリシャ語で円周率を peripühereia ($\pi\varepsilon\rho\iota\phi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$) (これは「外周 (= periphery)」や perimetros「周辺、外周の長さ (=perimeter)」からきたものだとか) と呼んだためとか。

http://ja0hxv.calico.jp/pai/pietc.html

E　楕円積分と AGM

Salamin-Brent 公式を理解するために最低限必要な事項をまとめよう (工事中)。事実 (命題) の選択には Borwein-Borwein [36] を参考にした。証明には、梅村 [9], 和田 [34], 安藤 [?] なども参考にした。

E.1　AGM

まず高校数学の復習から。

命題 E.1 (相加平均 $\geq$ 相乗平均) a, b が非負実数ならば

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

であり、等号は $a = b$ のとき、そのときだけ成り立つ。

証明　(省略する。) ■

補題 E.2 (AGM 反復の収束) $a, b \geq 0$ のとき、

$$\text{(AGM)} \qquad \begin{cases} a_0 := a, \quad b_0 := b, \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

で $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定めるとき、任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して、

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n, \quad 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n) \tag{24}$$

が成り立つ。特に $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限に収束する。もしも $a \geq b$ ならば (24) は $n = 0$ についても成立する。$a < b$ の場合は $b_0 > a_1 > b_1 > a_0$ となる。

証明　(省略する。確か解析概論の問題になっていたくらい有名な命題である。もっとも収束することそのものは微積分の初等的な問題だが、実は 2 次の収束をすることを示すには、やや面倒な議論が必要になる。どこかできちんと証明を書いておかないと…) ■

定義 E.3 (算術幾何平均) $a,\ b > 0$ に対して、

$$M(a, b) = AG(a, b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

とおき、これを $a,\ b$ の**算術幾何平均**と呼ぶ。ただし $\{a_n\},\ \{b_n\}$ は (AGM) で定めた数列とする。

命題 E.4 (算術幾何平均の基本的な性質) $a, b > 0$ とするとき次の (1)–(4) が成り立つ。

(1) $M(a,b) = M(b,a)$.

(2) 任意の $\lambda > 0$ に対して $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

(3) $M(a,a) = a$.

(4) $M\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = M(a,b)$.

証明

(1) $a+b,\ \sqrt{ab}$ は $a,\ b$ の対称式なので、a と b を入れ替えても $a_1,\ b_1$ は変らない。ゆえに $n \geq 1$ に対して $a_n,\ b_n$ は変らない。当然 $\lim a_n, \lim b_n$ も変らない。

(2) $a,\ b$ を $\lambda(> 0)$ 倍すると、a_n と b_n は λ 倍されるので、$\lim a_n$ と $\lim b_n$ も λ 倍になる。

(3) $a_1 = b_1 = a$ であるから任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n = b_n = a$ となり、$\lim a_n = a$.

(4) a, b から作られる数列を $\{a_n\}, \{b_n\}$ とすると、$(a+b)/2,\ \sqrt{ab}$ から作られる数列は $\{a_{n+1}\}$, $\{b_{n+1}\}$ となる。もちろん極限は一致する。■

定義 E.5 (AGM 反復で定めた数列) $a,\ b > 0$ が与えられたとき、(AGM) と

(AGM2) $$c_n := \sqrt{|a_n^2 - b_n^2|}$$

で定めた $\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=0}^{\infty},\ \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $a,\ b$ から **AGM 反復で定めた数列**と呼ぶことにする。

注意 E.6 (c_n の定義式の絶対値を外す) 通常、$a \geq b$ を仮定することが多く、その場合は $a_n \geq b_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ であるので、絶対値の記号を省略できて

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$$

と定義すれば良いことになる (この形の式が書いてあることが多い)。なお、たとえ $a < b$ であっても、$n \geq 1$ に対しては $a_n \geq b_n$ となる。■

系 E.7 (c_n の計算式) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を a, b から AGM 反復で定めた数列とするとき、任意の $n \geq 0$ に対して、

$$c_{n+1} = \frac{|a_n - b_n|}{2} = |a_n - a_{n+1}| = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}}.$$

特に $a \geq b$ ならば絶対値記号 $|\cdot|$ が取れる。また $a < b$ であっても、$n \geq 1$ に対しては絶対値記号 $|\cdot|$ が取れる。

証明 単純な計算ではあるが、間違えやすいところなので省略せずに書く。

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2} = \sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{a_n b_n}\right)^2} = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2 - 2a_n b_n}{4}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2} = \frac{|a_n - b_n|}{2}. \end{aligned}$$

一方、

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

また

$$\frac{c_n^2}{4a_{n+1}} = \frac{|a_n^2 - b_n^2|}{4} \cdot \frac{2}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)\,|a_n - b_n|}{2(a_n + b_n)} = \frac{|a_n - b_n|}{2}.$$

以上まとめて求める結果を得る。■

注意 E.8 (c_n の数値計算) 数値計算をする場合は、桁落ちが起こり難そうな漸化式 $c_{n+1} = c_n^2/(4a_{n+1})$ を使うのが良いであろう。■

E.2 完全楕円積分 $K(k)$, $E(k)$, $I(a,b)$, $J(a,b)$

定義 E.9 $a, b > 0$ に対して

$$I(a,b) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}},$$

$$J(a,b) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}\, d\theta.$$

注意 E.10 後で述べるように、例外的な場合を除いて、被積分関数の原始関数は初等関数で表わせない。いかにも重要そうなのに名前がついていないのは、すぐ後で示すように完全楕円積分 $K(\cdot)$, $E(\cdot)$ で表されるからであろう。■

例 E.11 (楕円の弧長) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の弧長は $4J(a,b)$ と表わされる。■

命題 E.12 $a, b > 0$ とするとき次の (1)–(3) が成り立つ。

(1) $I(a,b) = I(b,a)$, $J(a,b) = J(b,a)$.

(2) 任意の $\lambda > 0$ に対して $I(\lambda a, \lambda b) = \dfrac{1}{\lambda} I(a,b)$, $J(\lambda a, \lambda b) = \lambda J(a,b)$.

(3) $I(a,a) = \dfrac{\pi}{2a}$, $J(a,a) = \dfrac{\pi a}{2}$.

証明

(1) は $t = \pi/2 - \theta$ と変数変換すればよい。(2) は

$$\sqrt{(\lambda a)^2 \cos^2\theta + (\lambda b)^2 \sin^2\theta} = \lambda \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

による。(3) は

$$\sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = a$$

による。■

定義 E.13 (第 1 種完全楕円積分、第 2 種完全楕円積分)

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (0 \le k < 1)$$

を**母数** (modulus) k の**第 1 種完全楕円積分** (the complete elliptic integral of the first kind)、

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta \quad (0 \le k \le 1)$$

を母数 k の**第 2 種完全楕円積分** (the complete elliptic integral of the second kind) と呼ぶ。

(結局は k を複素数値に拡張することになるが、当面は $0 \le k \le 1$ に限って議論する。)

定義 E.14 () $k \in [0,1]$ に対して k' を

$$k' := \sqrt{1-k^2}$$

によって定義し、k の **complementary variable** と呼ぶ。さらに

$$K'(k) := K(k') = K\left(\sqrt{1-k^2}\right),$$

$$E'(k) := E(k') = E\left(\sqrt{1-k^2}\right)$$

とおき、**complementary integal** とよぶ。また k' をしばしば **complementary modulus** とよぶ。

例 E.15 (単振子の周期) 長さ L, 振幅 α の振子の周期は

$$p = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

$K(0) = \pi/2$ に注意すると、$\alpha \downarrow 0$ のとき $p \to 2\pi\sqrt{\ell/g}$ となることが分かる。 ■

命題 E.16 ($I(\cdot,\cdot)$, $J(\cdot,\cdot)$ と完全楕円積分の関係) (1) $a \ge b > 0$ ならば

$$I(a,b) = \frac{1}{a}K\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right), \quad J(a,b) = aE\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right).$$

(2) $0 < k < 1$ ならば

$$K(k) = I(1,k'), \quad E(k) = J(1,k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

証明 (1) $\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = a\sqrt{cos^2\theta + (b/a)^2\sin^2\theta} = a\sqrt{1-\sin^2\theta + (b/a)^2\sin^2\theta} = a\sqrt{1-\left[1-(b/a)^2\sin^2\theta\right]}$ であることから明らか。

(2) $a = 1$, $b = k'$ とすると $\sqrt{1-(b/a)^2} = \sqrt{1-(k')^2} = k$ であるから、(1) を用いて、$I(1,k') = \dfrac{1}{1}K(k) = K(k)$, $J(1,k') = 1\cdot E(k) = E(k)$. ■

次の定理は結果は簡潔であるが、証明は案外と難しい (白状すると自力ではできなかった)。

補題 E.17 ($I(\cdot,\cdot)$ と算術平均・幾何平均) 任意の a, $b > 0$ に対して

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b).$$

証明 まず

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \tag{25}$$

を示そう。

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}}\cdot\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

で $t = b\tan\theta$ $(0 \le t \le \pi/2)$ とおくと、

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{b}{\cos^2\theta},$$

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{b}dt = \frac{dt}{b\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{dt}{b\sqrt{1+(t/b)^2}} = \frac{dt}{\sqrt{b^2+t^2}}$$

であるから、(25) を得る。

さて、$u=(t-ab/t)/2$ とおくと、

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{ab}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{ab}{t}\right)\frac{dt}{t} = \sqrt{\left[\frac{1}{-}\left(t+\frac{ab}{t}\right)\right]^2}\frac{dt}{t} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{ab}{t}\right)\right]^2+ab}\,\frac{dt}{t} = \sqrt{u^2+ab}\,\frac{dt}{t} \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{dt}{t} = \frac{du}{\sqrt{u^2+ab}}.$$

一方 $4u^2=t^2-2ab+a^2b^2/t^2$ であるから、

$$\begin{aligned} (a^2+t^2)(b^2+t^2) &= t^2\left[t^2+(a^2+b^2)+\frac{a^2b^2}{t^2}\right] \\ &= t^2\left[4u^2+2ab+(a^2+b^2)\right] = t^2\left[4u^2+(a+b)^2\right] \\ &= 4t^2\left[u^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{t^2}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}\frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{4\left[u^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]}}\frac{du}{\sqrt{u^2+ab}} \\ &= \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\left[u^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[u^2+\left(\sqrt{ab}\right)^2\right]}} = I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right).\blacksquare \end{aligned}$$

この補題によって、次の大変に大変に有名な Gauss の定理を得る。

定理 E.18 (Gauss, “the fundamental limit theorem”) $a,\,b>0$ とするとき、

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a,b)}.$$

証明 $a,\,b$ から AGM 反復で定めた $\{a_n\},\,\{b_n\}$ について

$$I(a,b) = I(a_n,b_n) \quad (n\in\mathbf{N})$$

であるから、$n\to\infty$ とすると $a_n,b_n\to M(a,b)$ となることと、$I(c,c)=\pi/(2c)$ $(c>0)$ によって、

$$I(a,b) = I(M(a,b),M(a,b)) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a,b)}.\blacksquare$$

命題 E.19 (完全楕円積分の性質) $0<k<1$ とするとき、

(1) $K(k)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{M(1,k')}$, $k'=\sqrt{1-k^2}$ (第 1 種完全楕円積分の AGM による表現).

(2) $K(k)=\dfrac{1}{k}K\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$.

(3) $K(k)=\dfrac{2}{1+k'}K\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right)$, $k'=\sqrt{1-k^2}$.

(4) $E(k)=\dfrac{1+k}{2}E\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)+\dfrac{(k')^2}{2}K(k)$, $\quad k'=\sqrt{1-k^2}$.

(5) $E(k)=(1+k)E\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right)-k'K(k)$, $\quad k'=\sqrt{1-k^2}$.

証明

(1) 命題 E.16 と定理 E.18 から

$$K(k)=I(1,k')=\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,k')}.$$

(2) (1) を用いて、

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,k')}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,\sqrt{1-k^2})}, \tag{26}$$

$$K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{M\left(1,\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2}\right)}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{M\left(1,\dfrac{1-k}{1+k}\right)}. \tag{27}$$

後者と $M(\cdot,\cdot)$ の同次性 (命題 E.4 (2)) より

$$\frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1+k,1-k)}.$$

ところでこの分母は、命題 E.4 (4) より

$$M(1+k,1-k)=M\left(\frac{(1+k)+(1-k)}{2},\sqrt{(1+k)(1-k)}\right)=M\left(1,\sqrt{1-k^2}\right)$$

となるから、

$$\frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{M\left(1,\sqrt{1-k^2}\right)}.$$

ゆえに (26) によって

$$K(k)=\frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right).$$

(3)

$$\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)' = \sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2} = \frac{\sqrt{(1+k')^2-(1-k')^2}}{1+k'} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$$

であるから、(1) と $M(\cdot,\cdot)$ の同次性、命題 E.4 (4) により

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+k'}K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) &= \frac{2}{1+k'}\frac{\pi}{2}\frac{1}{M\left(1,\dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M\left(\dfrac{1+k'}{2},\sqrt{k'}\right)} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,k')} = K(k).\blacksquare\end{aligned}$$

(4) (準備中)

(5) (準備中) ■

$I(\cdot,\cdot)$ でやったのと同様、$J\left((a+b)/2,\sqrt{ab}\right)$ を考えるのは自然であろう。次の命題が成り立つ。

補題 E.20 **($J(\cdot,\cdot)$ と算術平均・幾何平均)** $a,\,b>0$ に対して、

$$2J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right) - J(a,b) = ab\,I(a,b).$$

証明 $k=\sqrt{1-(b/2)^2}$ とおくと $k'=\sqrt{1-k^2}=\dfrac{b}{a}$ であるから、命題 E.16 を用いて

$$I(a,b) = \frac{1}{a}K\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right) = \frac{1}{a}K(k), \quad J(a,b) = aE\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right) = aE(k).$$

同様に命題 E.16 を用いて

$$\begin{aligned}2J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right) &= 2\frac{a+b}{2}E\left(\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^2}\right) = (a+b)E\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \\ &= a\left(1+\frac{b}{a}\right)E\left(\frac{1-b/a}{1+b/a}\right) = a(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}2J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right) - J(a,b) &= a(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - aE(k) \\ &= a\left[(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - E(k)\right] \\ &\overset{(\heartsuit)}{=} a\cdot k'K(k) = bK(k) = abI(a,b).\end{aligned}$$

ただし (♡) では命題 E.19 の (5) を用いた。 ■

定理 E.21 $a > b > 0$ とするとき、a, b から AGM 反復 (AGM), (AGM2) で $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定めるとき、

$$J(a,b) = \left(a - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) I(a,b).$$

証明 $J(\cdot,\cdot)$ の性質と $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の定義から

$$2J(a_{n+1},b_{n+1}) - J(a_n,b_n) = a_n b_n I(a_n,b_n).$$

ところで $J(a_n,b_n)$ は $a_n^2 I(a_n,b_n)$ に非常に近い (後で具体的に示す)。このことを念頭において

$$\begin{aligned}
&2\left[J(a_{n+1},b_{n+1}) - a_{n+1}^2 I(a_{n+1},b_{n+1})\right] - \left[J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n)\right] \\
&= 2J(a_{n+1},b_{n+1}) - J(a_n,b_n) + (a_n^2 - a_{n+1}^2) I(a_0,b_0) \\
&= (a_n b_n + a_n^2 - a_{n+1}^2) I(a_0,b_0).
\end{aligned}$$

ここで

$$a_n b_n + a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n b_n + a_n^2 - 2\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(a_n^2 - b_n^2) = \frac{1}{2} c_n^2$$

であるから、

$$2\left[J(a_{n+1},b_{n+1}) - a_{n+1}^2 I(a_{n+1},b_{n+1})\right] - \left[J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n)\right] = \frac{1}{2} c_n^2 I(a_0,b_0).$$

両辺に 2^n をかけると、左辺は階差の形になる。

$$2^{n+1}\left[J(a_{n+1},b_{n+1}) - a_{n+1}^2 I(a_{n+1},b_{n+1})\right] - 2^n\left[J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n)\right] = 2^{n-1} c_n^2 I(a_0,b_0). \tag{28}$$

さて、

$$\begin{aligned}
a_n^2 I(a_n,b_n) - J(a_n,b_n) &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}} - \sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{(a_n^2 - b_n^2)\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}} = c_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}
\end{aligned}$$

であるから、

$$0 \le 2^n\left[a_n^2 I(a_n,b_n) - J(a_n,b_n) \le c_n^2 I(a_n,b_n)\right] = 2^n c_n^2 I(a_0,b_0) \to 0.$$

(c_n が 0 に 2 次収束するから明らかである。)

(28) を $n=0,1,2,\cdots$ について和を取ると、

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) I(a_0,b_0)\\
&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2^{n+1}\left[J(a_{n+1},b_{n+1})-a_{n+1}^2 I(a_{n+1},b_{n+1})\right]-2^n\left[J(a_n,b_n)-a_n^2 I(a_n,b_n)\right]\right\}\\
&\quad=\lim_{n\to\infty} 2^n\left[a_n^2 I(a_n,b_n)-J(a_n,b_n)\right]-\left[J(a_0,b_0)-a_0^2 I(a_0,b_0)\right]\\
&\quad=a_0^2 I(a_0,b_0)-J(a_0,b_0).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$J(a_0,b_0)=\left(a_0-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}c_n^2\right) I(a_0,b_0).\blacksquare$$

この定理と次の系により、$J(\cdot,\cdot)$, $E(\cdot)$ の数値計算も ($I(\cdot,\cdot)$, $K(\cdot)$ と同様に) 算術幾何平均アルゴリズムで非常に効率的に計算できることが分かる。

系 E.22 $0<k<1$ とするとき、$a=1$, $b=k'=\sqrt{1-k^2}$ から AGM 反復 (AGM), (AGM2) で $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定めるとき、

$$E(k)=\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}c_n^2\right) K(k).$$

証明 $E(k)=J(1,k')$, $K(k)=I(1,k')$ であるから、定理から明らかである。 $\blacksquare$

E.3 Legendre の関係式

定理 E.23 (Legendre の関係式) 任意の $0<k<1$ に対して $k'=\sqrt{1-k^2}$ とおくと

(29) $$K(k)E(k')+K(k')E(k)-K(k)K(k')=\frac{\pi}{2}.$$

証明 (そのうち書きたいと思っているが…楕円関数がらみの大抵の本に載っているようである。例えば梅村 [9], 和田 [34] 等々。) $\blacksquare$

E.4 Gauss-Legendre あるいは Salamin-Brent のアルゴリズム

Legendre の関係式 (29) で $k:=1/\sqrt{2}$ とおくと、$k'=\sqrt{1-k^2}=1/\sqrt{2}$ となるので、

(30) $$2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}.$$

ところで系 E.22 によれば、

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{31}$$

ここで $\{c_n\}$ は $a = 1$, $b = 1/\sqrt{2}$ として AGM をしたときの数列である。(30), (31) より $E(1/\sqrt{2})$ を消去して

$$\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n} c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

ここで Gauss の fundamental limit theorem (定理 E.18) で $k = 1/\sqrt{2}$ とおいた

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{M(1, 1/\sqrt{2})}$$

を代入して $K(1/\sqrt{2})$ を消去すると

$$\pi = \frac{2M\left(1, 1/\sqrt{2}\right)^2}{1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2} \tag{32}$$

を得る。

E.5 misc.

E.5.1 ルーツ

C.F.Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) は 1799 年 5 月 30 日の日記に数値計算によって

$$\frac{1}{M(1, \sqrt{2})} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$

を発見したことを記し、。

E.5.2 楕円積分

$$\int^u R(x, \sqrt{3 \text{ 次または } 4 \text{ 次の多項式}})dx, \quad R(x, y) = x \text{ と } y \text{ の有理式}$$

を楕円積分という。特別の場合を除き初等関数では表わされない (Liouville[11])。特に K, E は初等関数ではない。

$$\int^u \frac{dx}{(1 - \eta x^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

を第 3 種の不完全楕円積分という。

任意の楕円積分は、代数的に、第 1, 2, 3 種の楕円積分の線型結合で書ける (Legendre)。

[11] 一松先生の本か、金子晃先生の本にあったような気がする。参考文献表にあげておこう。

E.5.3　超幾何関数による表示

定義 E.24 (Gauss の超幾何級数 (hypergeometric series))

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) &:= 1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)\cdot b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{a+n}{n}\binom{b+n}{n}}{\binom{c+n}{n}}z^n \end{aligned}$$

を **Gauss の超幾何級数**と呼ぶ。ここで $\dbinom{\alpha}{r}$ は一般 2 項係数であり

$$\binom{\alpha}{r}:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}$$

で定義される (α が正整数のときは通常の 2 項係数に一致する)。

命題 E.25 (完全楕円積分を超幾何級数で表す (完全楕円積分の冪級数展開)) $|k|<1$ なる k に対して

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 k^{2i}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac12,\frac12;1;k^2\right),$$

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2\frac{k^{2i}}{2i-1}\right\}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac12,\frac12;1;k^2\right)$$

が成り立つ。ただし !! は飛び階乗を表わす。

E.5.4　微分方程式

$K(k)$ も $K'(k):=K(\sqrt{1-k^2})$ も微分方程式

$$(k^3-k)\frac{d^2y}{dk^2}+(3k^2-1)\frac{dy}{dk}+ky=0 \tag{33}$$

の解である。 0 はこの方程式の確定特異点であるから、定数 a と 0 の近傍で正則な関数 f が存在して、

$$K'(k)=aK(k)\log k+f(k)$$

が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned} K'(k) &= \frac{2}{\pi}K(k)\log\left(\frac{4}{k}\right)-2\Bigg[\left(\frac12\right)^2\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)k^4 \\ &\qquad +\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}\right)k^6\Bigg]+\cdots. \end{aligned}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
E'(k) \quad &= \quad 1 + \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{4}{k}\right) - \frac{1}{1\cdot 2}\right]k^2 + \left(\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4}\right)\left[\log\left(\frac{4}{k}\right) - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4}\right]k^4 \\
&\quad + \left(\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\right)\left[\log\left(\frac{4}{k}\right) - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6}\right]k^6 + \cdots .
\end{aligned}
$$

E.5.5 Legendre form

$$f(x) = M(1, x)$$

とおくと、f は函数方程式

$$f(x) = \frac{1+x}{2} f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \tag{34}$$

を満たす。

$x \in (0,1)$ に対して

$$k_0 := x, \quad k_{n+1} := \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}$$

で定めた $\{k_n\}$ を用いて

$$g(x) = a\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1+k_n}{2}$$

とおくと g は 0 の近傍で解析的で (34) と $g(1) = a$ を満たす。

F　数値実験

daen.c

```c
/*
 * daen.c --- 完全楕円積分がらみを算術幾何平均で計算
 */

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
{
  int i;
  double t,a,b,c,an,bn,cn,anp1,bnp1,cnp1;
  double pi, AGM, Iab, Jab;
  double power2, s;
  pi = 4 * atan(1.0);

  printf("a,b:"); scanf("%lf%lf", &a, &b);
  if (a <= 0 || b <= 0) {
    fprintf(stderr, "must be positive.\n");
    exit(1);
  }
  if (a < b) {
    t = a; a = b; b = t;
  }

  an = a; bn = b; cn = sqrt(an * an - bn * bn);

  /* s = 2^(n-1) * cn * cn の和 (n=0,1,2,...) */
  power2 = 0.5;
  s = power2 * cn * cn;

  for (i = 0; i <= 100; i++) {
    anp1 = (an + bn) / 2; bnp1 = sqrt(an * bn); cnp1 = (an - bn) / 2;
    an = anp1; bn = bnp1; cn = cnp1;
    printf("%20.15f, %20.15f, %20.15f\n", an, bn, cn);

    power2 *= 2;
    s += power2 * cn * cn;

    if (an == bn) {
      printf("i=%d: converge\n", i);
      break;
    }
  }
  AGM = an;
  Iab = pi / 2 / AGM;
  Jab = (a - s) * Iab;
  printf("M(%f,%f)=%20.15f (算術幾何平均)\n", a, b, AGM);
  printf("I(%f,%f)=%20.15f\n", a, b, Iab);
  printf("J(%f,%f)=%20.15f\n", a, b, Jab);
  printf("楕円 x^2/a^2+y^2/b^2=1 の弧長=%20.15f\n", 4 * a * Jab);
}
```

kanzen.c

```
/*
 * kanzen.c --- 完全楕円積分
 */

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
{
  int i;
  double k,t,a,b,c,an,bn,cn,anp1,bnp1,cnp1;
  double pi, AGM, K, E;
  double power2, s;
  pi = 4 * atan(1.0);

  printf("k:"); scanf("%lf", &k);
  if (k < 0 || k > 1) {
    fprintf(stderr, "k must be in [0,1]\n");
    exit(1);
  }
  a = 1.0; b = sqrt(1.0 - k * k);

  an = a; bn = b; cn = sqrt(an * an - bn * bn);

  /* s = 2^(n-1) * cn * cn の和 (n=0,1,2,...) */
  power2 = 0.5;
  s = power2 * cn * cn;

  for (i = 0; i <= 100; i++) {
    anp1 = (an + bn) / 2; bnp1 = sqrt(an * bn); cnp1 = (an - bn) / 2;
    an = anp1; bn = bnp1; cn = cnp1;
    printf("%20.15f, %20.15f, %20.15f\n", an, bn, cn);

    power2 *= 2;
    s += power2 * cn * cn;

    if (an == bn) {
      printf("i=%d: converge\n", i);
      break;
    }
  }
  AGM = an;
  K = pi / 2 / AGM;
  E = (a - s) * K;
  printf("K(%f)=%20.15f\n", k, K);
  printf("E(%f)=%20.15f\n", k, E);
}
```

参考文献

[1] あっしー, π の桁数の伸び, http://hp.vector.co.jp/authors/VA014765/pi/digit.html

[2] 上野 健爾, 数学 4000 年の歩み, http://ddb.libnet.kulib.kyoto-u.ac.jp/tenjikai/2003/zuroku/pdf/4000.pdf

[3] 上野 健爾, 円周率 π をめぐって, 日本評論社 (1999).

[4] http://www.dept.edu.waseda.ac.jp/math/ushiro/

[5] 後(うしろ) 保範(やすのり), 金田 康正, 高橋 大介, 級数に基づく多数桁計算の演算量削減を実現する分割有理数化法, 情報処理学会論文誌, vol. 41, No. 6, pp. 1811–1819, 2000.

[6] 後 保範,『円周率世界記録の概要』http://www.dept.edu.waseda.ac.jp/math/ushiro/pirecord/pioutline.htm (2002/12/20, 2003/5/11)

[7] 後 保範, 『世界記録のための工夫点』http://www.dept.edu.waseda.ac.jp/math/ushiro/pirecord/pistudy.htm (2002/12/20, 2003/5/12)

[8] 後 保範, 『分割有理数化法 (DRM) による 多数桁関数値計算と 円周率計算の世界記録』, http://www.hucc.hokudai.ac.jp/pdf/Ushiro/20050224gijyutsu/paper4/paper4.pdf

[9] 梅村 浩, 楕円関数論, 東京大学出版会 (1999)?.

[10] 『FFT (高速フーリエ・コサイン・サイン変換) の概略と設計法』http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/fftman/index.html

[11] 大浦 拓哉,『FFT と AGM による円周率計算プログラム』http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/pi_fft-j.html 金田研 Super_PI よりも高速とか。AGM 法についての短い説明もある。

[12] 大浦 拓哉, 円周率公式の改良と高速多倍長計算の実装, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 9, No. 4, 1999.

[13] 大浦 拓哉, “Ooura's Mathematical Software packages,” http://momonga.t.u-tokyo.ac.jp/~ooura/index-j.html

[14] 大浦 拓哉, 円周率の公式と計算法 (200?年), http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/pi04.pdf.

[15] 岡本 久, 数学吉田塾講義メモ, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~okamoto/paper/yoshida.html (2004).

[16] 小川 束(つかね), 平野 葉一, 数学の歴史, 朝倉書店 (2003).

[17] 金田 康正, π のはなし, 東京書籍 (1991).

[18] 柴田 昭彦, π の arctangent 公式集, http://www5f.biglobe.ne.jp/~tsuushin/sub1d.html (2004).