

# Kepler の法則

桂田 祐史

2003 年 10 月～2017 年 2 月 22 日

藤田宏『応用数学』第 4 章「惑星運動の数理」の読書ノート(これは第 3 法則が一般の場合に証明されていないなど、物足りない部分がある)。そのうちに、一から書き直すつもり。最近書かれた本では、高桑 [1] に書いてあった。

2017 年度の卒研で、福島他 [2] を読んだ人がいるので、その結果をこちらに反映すべきかもしれない。

## 目次

1	惑星の運動とニュートン	2
2	惑星の運動方程式	2
2.1	.....	2
2.2	保存量	3
2.3	円運動の場合	4
3	一般の場合の解析	5
3.1	Kepler の第二法則 (面積測度一定の法則)	5
3.2	Kepler の第一法則	6
A	2 体問題全体像	7
B	歴史メモ	8
C	円錐曲線 (2 次曲線)	8
C.1	高校数学の復習	8
C.1.1	2 定点からの距離の関係	9
C.2	離心率と準線	9
C.3	2 次曲線の極形式	10
C.3.1	$e = 1$ の場合	10
C.3.2	$e \neq 1$ の場合	10
D	太陽は動かないという仮定について	11
D.1	太陽は動かないとすると	11
D.2	太陽は動かないという仮定をおかない厳密なモデル	11
D.3	太陽を座標系の原点とした方程式	12
D.4	重心を座標系の原点とした方程式	12

E	平面運動であることの証明	13
F	エネルギーと角運動量の保存 — ベクトル解析を用いた証明	14
F.1	エネルギー保存	14
F.2	角運動量保存	15
F.3	衝突解	16
G	高野 [3] 第 1 章 §2 から	16
H	Kepler の方程式とその解法	19
H.1	ボウマン [4] 第 7 章から	19
H.1.1	離心近点距離 $\phi$ を平均近点距離 $\psi$ の関数として表す	20
H.1.2	距離 $r$ を平均近点距離 $\psi$ の関数として表す	21
H.1.3	真近点距離 $\theta$ を平均近点距離 $\psi$ の関数として表す	21
H.1.4	おまけ	22
H.1.5	Kepler の方程式を数値計算で解く	22
H.2	Bessel 関数の歴史メモ	23
H.3	軌道要素 — 用語	24
I	掃く面積の計算	24
J	Kepler の第 3 法則と Napier	25

## 1 惑星の運動とニュートン

## 2 惑星の運動方程式

### 2.1

万有引力 (universal gravitation) の大きさは

$$GmM\frac{1}{r^2}.$$

ただし、 $G$  は万有引力定数と呼ばれる正定数である。SI 単位系で

$$G = 6.6720 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}].$$

ここでは太陽は静止しているとする。という説明に何の疑問も抱かない学生が多い。うーん。二つの言い訳がある。

1. 太陽は惑星と比べて質量が大きいのので、太陽の動きは無視できる。  
(太陽の質量は、地球の質量の 33 万倍で、共有重心は太陽の中)
2. 共有重心のまわりの運動とすれば...

地球が受ける力  $\mathbf{f}$  は、

$$\mathbf{f} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

運動方程式に代入して

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

$m$  で割って

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

以下、関数の時間微分を  $\dot{\phantom{x}}$  をつけて表すことにする。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)$  と成分表示すれば、

$$\ddot{x} = -GM \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -GM \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -GM \frac{z}{r^3}.$$

初期時刻  $t = 0$  における惑星の位置ベクトル

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

とする。また速度ベクトルを  $\mathbf{v}_0$  とする。初期条件は

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0.$$

## 2.2 保存量

$$(1) \quad \alpha := GM$$

とおく。

惑星は平面運動をする。このことの証明は後回しにする。

$$\mathbf{r} = (x, y, 0), \quad \mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0).$$

となる。

座標軸は、太陽を原点に、また  $t = 0$  における OP が  $x$  軸に含まれるようにする。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\ddot{x} = -\alpha \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\alpha \frac{y}{r^3}.$$

$x$  と  $y$  という、2つの成分だけに注目すれば良い。

$E$  と  $L$  を次式で定める:

$$E = E(t) := \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\alpha}{r},$$

$$L = L(t) := x\dot{y} - \dot{x}y.$$

解析に入る前に

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} x & \dot{x} & \mathbf{e}_1 \\ y & \dot{y} & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathbf{e}_3 = L\mathbf{e}_3$$

となることを注意しておく。要するに、 $L$  は本質的には角運動量である。

以下、実は  $E$  も  $L$  も時間に依らないことを示そう。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{1}{r} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d}{dt} \left[ (x^2 + y^2)^{-1/2} \right] = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-3/2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot 2(x\dot{x} - y\dot{y}) = -\frac{x\dot{x} - y\dot{y}}{r^3}\end{aligned}$$

であるから、

$$\dot{E} = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \alpha \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^3} = \dot{x} \left( -\alpha \frac{x}{r^3} \right) + \dot{y} \left( -\alpha \frac{y}{r^3} \right) + \alpha \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^3} = 0.$$

ゆえに  $E$  は定数である。

$$E_0 := E(0) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_0|^2 - \frac{\alpha}{r_0}$$

とおけば

$$E(t) \equiv E_0.$$

一方、 $L$  についても

$$\dot{L} = \dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - (\ddot{x}y + \dot{x}\dot{y}) = x\ddot{y} - \ddot{x}y = x \left( -\frac{\alpha y}{r^3} \right) - \left( -\frac{\alpha x}{r^3} \right) y = 0.$$

ゆえに  $L_0 := L(0)$  とおくと、

$$L(t) \equiv L_0.$$

## 2.3 円運動の場合

$$-\omega^2 \mathbf{r} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{R^3}.$$

ゆえに

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{R^3}$$

ところで

$$|v_0| = |v| = R\omega^2$$

であるから

$$|\mathbf{v}_0|^2 R = \alpha.$$

逆にこの関係と、 $\mathbf{v}_0$  が半径と垂直ならば円運動になる。

Why?

ところでエネルギー  $E$  は

$$E = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 - \frac{\alpha}{R}$$

で与えられる。

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{R}.$$

これから  $E$  は保存されることが分かる。

周期  $T$  は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} R^{3/2}.$$

Kepler の第三法則が証明できた (円運動という特殊な場合だけであるが)。

角運動量 (angular momentum) は、一般に、位置ベクトル  $\vec{r}$  と運動量  $p$  のベクトル積として定義される:

$$L = r \times p.$$

中心力を受けて運動する惑星の角運動量は定数ベクトルであることが証明できる。

初期時刻における角運動量を  $L_0$  とする。 $L_0 = 0$  の場合、.. 衝突解と呼ばれる。これは周期解にはならない。この場合は、いわゆる Kepler の法則は成り立たない。それに対して、 $L_0 \neq 0$  ならば Kepler の法則が成り立つ。それを以下に見る。

### 3 一般の場合の解析

すでに見たように、エネルギーと角運動量は保存される。

$$(2) \quad E = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 - \frac{\alpha}{r} \equiv E_0,$$

$$(3) \quad L = xy - \dot{x}y \equiv L_0.$$

極座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を導入すると、

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta.$$

$$|\mathbf{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

を (2) に代入すると

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} \equiv E_0.$$

さて、角運動量を極座標で表現すると

$$L = xy - \dot{x}y = r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) - r \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) = r^2 \dot{\theta}$$

であるから、(3) に代入して

$$r^2 \dot{\theta} \equiv L_0.$$

これは円運動の場合にすでに得られていた  $L = R^2 \dot{\theta}$  の一般化である。

#### 3.1 Kepler の第二法則 (面積測度一定の法則)

時刻  $t$  から微小時間  $\Delta t$  が経過したとき、原点と  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  を三角形と見なして ( $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  という初等数学の公式を用いると)

$$\Delta S \doteq \frac{1}{2}r(r + \Delta r) \sin \Delta \theta.$$

$$\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} = 1$$

であるから

$$\Delta S \doteq \frac{1}{2}r^2 \Delta \theta$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}$$

ところで Kepler 運動の場合、これは角運動量  $L_0$  を使って

$$\dot{S} \equiv \frac{1}{2}L_0$$

と表わされる。

### 3.2 Kepler の第一法則

以下、Kepler の第一法則を証明する。すなわち軌道が楕円であることを証明するが、得られるのは、 $\mathbf{r}$  の軌跡であって、 $\mathbf{r}(t)$  そのものではない。細かい注意になるが、これは微分方程式を解いたのとは少し異なる。

軌道の解析に戻る。 $r$  を従属変数、 $\theta$  を独立変数と考えることになる。

' を  $\theta$  に関する微分を表わす記号とする。

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = r'\dot{\theta}.$$

エネルギー保存則 (2) に代入して

$$\frac{1}{2}(r'^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} \equiv E_0.$$

すでに得られている  $r^2\dot{\theta} \equiv L_0$  を使って、 $\dot{\theta}$  を消去すると

$$\frac{1}{2}(r'^2 + r^2) \left( \frac{L_0}{r^2} \right)^2 - \frac{\alpha}{r} = E_0.$$

これは  $r$  に関する一階常微分方程式である。 $k = L_0$  とおくと、

$$\frac{k^2}{2} \left[ \left( \frac{r'}{r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\alpha}{r} = E_0.$$

$u = 1/r$  とおくと、

$$u' = -\frac{r'}{r^2}, \quad r' = -r^2 u'$$

であるから

$$\frac{k^2}{2}(u'^2 + u^2) - \alpha u = E_0.$$

$$(u')^2 + u^2 - \frac{2\alpha}{k^2} = \frac{2E_0}{k^2}.$$

$$w = u - \frac{\alpha}{k^2}$$

とおくと、

$$(4) \quad (w')^2 + w^2 = \beta_0^2, \quad \beta_0 := \sqrt{\frac{2E_0}{k^2} + \frac{\alpha^2}{k^4}}.$$

$\theta$  で一度微分すると

$$2w'w'' + 2ww' = 0.$$

すなわち

$$w'(w'' + w) = 0.$$

$w' \equiv 0$  の場合を考えると  $w$  は定数。 $u$  も定数。 $r$  も定数。これは円軌道の場合であり、前節で解析済みである (等速円運動になる)。

$w'' + w = 0$  の場合。一般解は

$$w = A \cos(\theta + \delta_0) \quad (A, \delta_0 \text{ は任意定数}).$$

必要ならば  $\delta_0$  を取り替えることで ( $A < 0$  ならば、 $\delta_0 + \pi$  を新たに  $\delta$  とする)、 $A > 0$  としてよい。

(4) に代入すると  $A^2 = \beta_0^2$  となるので、 $A = \beta_0$ .

極座標の原線を  $r$  が最小になる点を通るように取れば  $\delta_0$  となる (必ず最小になるのか? 単に座標系を取り直すことでくらいにしておく方がよいな)。

2 次曲線の極座標表示の標準形と見比べよう。

$$(5) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$e$  は離心率 ( $0 < e$  で、 $e = 0$  は円,  $0 \leq e < 1$  は楕円,  $e = 1$  は放物線,  $e > 1$  は双曲線),  $p$  は  $\cos \theta = 0$  のときの  $r$  の値。

$$p = \frac{k^2}{\alpha}, \quad e = \frac{k^2 \beta_0}{\alpha} = \frac{k^2}{\alpha} \sqrt{\frac{2E_0}{k^2} + \frac{\alpha^2}{k^4}} = \sqrt{\frac{2k^2 E_0}{\alpha^2} + 1}$$

とすると 2 次曲線の方程式 (5) に一致する。

$$E_0 < 0 \Leftrightarrow e < 1, \quad E_0 = 0 \Leftrightarrow e = 1, \quad E_0 > 0 \Leftrightarrow e > 1.$$

## A 2 体問題全体像

- 大ざっぱな歴史 (B 節を見よ)
- 結果が円錐曲線なので、円錐曲線のイロハが必要である (C に書いた程度)。
- 質量が 1 点に集中している質点系の話に帰着されること (これは良く物理の本にあったと思うが…正確にはどこまで言えるのか)
- 2 体問題で、各天体の運動は系の重心を座標系の原点にして、 $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}$  という微分方程式に従うこと (D 「太陽は動かないという仮定について」)。
- 2 体問題が平面運動になること (Kepler の第 0 法則と呼ぶこともあるらしい。E 節で証明する。)
- Kepler の第 1 法則の証明  
正直なかなか分かりづらい。藤田先生の証明は、面積速度一定の法則から  $\dot{\theta} = \text{定数}/r^2$  が得られ、これをエネルギー保存則に代入することで、 $r(\theta)$  についての 1 階微分方程式が得られるが、さらに従属変数  $u := 1/r$  を導入して、原点移動すると、単振動の方程式が得られる、というもので、比較的道が見やすい。  
いずれにせよ、位置を時間の関数として表しているのではないので、通常の意味で微分方程式を解いたことにはなっていない。
- Kepler の第 2 法則 (面積速度一定の法則) の証明
  - 面積速度は、 $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$  あるいは  $\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  で表される。
  - 物理で言ういわゆる角運動量の定数倍であるので、この法則は角運動量保存則に相当する。
  - 少し脱線になるが、これは万有引力が中心力であることが本質的で、距離の 2 乗に反比例することは重要でない。

- ベクトル解析的な手短な証明は F.2 節にあるが、極座標を用いれば、面積速度の微分は加速度の偏角方向の成分であり、中心力ではそれがゼロになるので、自ずと明らかである (G 節を見よ)。
- Kepler の第 3 法則  
(発見に対数が役立ったことについて、J 節を見よ。証明は G 節を見よ。藤田先生のように円運動の場合に限るのも授業としてはアリか。)
- 逆に Kepler の法則から万有引力の法則が導出されること (溝畑 [5] にあったはずで、そのうち勉強しよう)
- 位置  $r$  を時間の関数として表わすこと (久賀 [6] or [7] に授業中に失敗した話が出ていた。Bessel 関数が必要になる。ボウマン [4] など Bessel 関数のテキストに載っている。H.2 を見よ。)

## B 歴史メモ

- Tycho Brahe ((1546–1601, ティコ・ブラーエ) はデンマークの貴族。肉眼による最高の観測といわれた<sup>1</sup>、高精度のデータを長期間に渡って蓄えた。晩年にチェコスロバキアのプラハで観測を続けたが、そこで Yohannes Kepler (1571–1630, ヨハネス・ケプラー) を助手に雇う。掛け算、割り算を足し算、引き算を用いて計算する方法を、、、
- Yohannes Kepler (1571–1630) は、偉大な天文観測家である Ticho Brahe (1546–1601) の助手であったが、Brahe の死後に彼から観測データをもらい受け、データを整理分析することで有名な Kepler の法則を発見した。第一、第二法則は 1609 年に、第三法則は 1619 年に発表された。
- Sir Isaac Newton (1642–1727) の *Philosophia naturalis principia mathematica* (1687) では、万有引力から Kepler の法則、Kepler の法則から万有引力の法則 (距離の二乗に反比例する引力) を導いている (もともと、ほとんどの結果は 24 歳頃の一年半の間に、生まれ故郷である、ロンドン郊外の農村ウールズソープでなされた、と言われている。)

## C 円錐曲線 (2次曲線)

### C.1 高校数学の復習

円錐曲線については、高等学校の数学の教科書に結構載っている。しかし、きちんと授業がされているかという心許無い状況であるようだ (あくまでも学生からの聞取調査に基づく信頼性の高くない観測)。

---

<sup>1</sup>望遠鏡は 1608 年にオランダの眼鏡職人 Hans Lippershey (1570–1619, ハンス・リッペルスハイ) が発明したと言われている (1600 年を少し過ぎた頃には知っていたとも言われるが、1608 年 10 月 2 日特許を申請した — が受理されなかったとか)。有名な Galileo Galilei (1564–1642, イタリアのピサに生まれ) は、1581 年振子の等時性を発見、1604 年に落体の法則を発見、1609 年に (リッペルスハイの望遠鏡の話聞いて) 望遠鏡による天体観測をした (1610 年に『星界の報告』、1632 年に『天文対話』を発表)。

### C.1.1 2 定点からの距離の関係

(ここは工事中。あまり信じないこと。)

平面上の 2 定点からの距離の和、差、積、商が一定である点の軌跡を求める問題は有名である。

- 和が一定 … 楕円
- 差が一定 … 双曲線
- 積が一定 … Cassini の楕形
- 商 (比) が一定 … Apollonius<sup>2</sup> の円 (特別な場合として垂直二等分線)

定理 C.1 2 定点  $(\pm c, 0)$  (ただし  $c > 0$ ) からの距離の和が一定値  $2a$  (ただし  $a > c$ ) である点の軌跡の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

ただし  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

証明

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a. \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ cx + a^2 &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2[(x+c)^2 + y^2] \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2).\end{aligned}$$

$b := \sqrt{a^2 - c^2}$  とおくと、

$$\begin{aligned}b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2. \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1. \blacksquare\end{aligned}$$

### C.2 離心率と準線

楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a \geq b$ ) の場合は、

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

で定まる  $e$  を楕円の離心率と呼ぶ。

楕円の焦点は  $(\pm c, 0)$  ( $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ) であったが、これは離心率を用いると  $(\pm ae, 0)$  と書ける。

<sup>2</sup>Apollonius (Απολλωνιος, B.C.262(245?)–190 頃.), Pergaeus, 小アジアの南海岸にあるパンフィリア (Pamphylia) のペルガに生まれ、アレキサンドリアで没す。アレキサンドリアで (ユークリッドに?) 学ぶ。円錐曲線について 8 冊の著作を著わす (ある種の座標系を利用していたため、「解析幾何の要素がある」という評もある)。記数法の改良も行った。

### C.3 2次曲線の極形式

$p > 0, e \geq 0$  を定数とするとき、極座標で

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

という方程式で表わされる曲線を調べよう。

分母を払って移項すると

$$r = p - er \cos \theta.$$

デカルト座標  $(x, y)$  を使うと

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - ex.$$

両辺を二乗して

$$x^2 + y^2 = (p - ex)^2 = p^2 - 2pex + e^2x^2, \quad ex \leq p.$$

まとめると

$$(6) \quad (1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2, \quad x \leq \frac{p}{e}.$$

#### C.3.1 $e = 1$ の場合

(6) に  $e = 1$  を代入すると

$$2px + y^2 = p^2, \quad x \leq p$$

となるから

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}.$$

この方程式が表わすのは  $x$  軸を軸とする放物線である。

#### C.3.2 $e \neq 1$ の場合

$$\begin{aligned} (1 - e^2) \left( x^2 + \frac{2pe}{1 - e^2}x \right) + y^2 &= p^2. \\ (1 - e^2) \left( x + \frac{pe}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= p^2 + (1 - e^2) \left( \frac{pe}{1 - e^2} \right)^2. \\ \text{右辺} &= p^2 + \frac{p^2e^2}{1 - e^2} = \frac{(p^2 - p^2e^2) + p^2e^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (1 - e^2) \left( x + \frac{pe}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{p^2}{1 - e^2} \\ \frac{(1 - e^2)^2}{p^2} \left( x + \frac{pe}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{1 - e^2}{p^2} y^2 &= 1. \end{aligned}$$

$e < 1$  の場合  $1 - e^2 > 0$  であるから、

$$a := \frac{p}{1 - e^2}, \quad b := \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad x_0 := \frac{pe}{1 - e^2}$$

とおくと、 $x_0 > 0, 0 < b < a$  で

$$\frac{(x + x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

これは  $(-x_0, 0)$  を中心として、長軸が  $x$  軸に含まれ、短軸が  $y$  軸に平行な楕円である。

$e > 1$  の場合

$$\frac{(e^2 - 1)^2}{p^2} \left( x - \frac{pe}{e^2 - 1} \right)^2 - \frac{e^2 - 1}{p^2} y^2 = 1$$

と書き直せる。

$e^2 - 1 > 0$  であるから、

$$a := \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b := \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}, \quad x_0 := \frac{pe}{e^2 - 1}$$

とおくと、 $a, b, x_0$  はいずれも正数で

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

## D 太陽は動かないという仮定について

### D.1 太陽は動かないとすると

藤田 [8] では、太陽は静止していると見なした。その結果得られる微分方程式は以下のようになる。太陽の位置を原点として、惑星の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とすると、惑星の運動方程式は、

$$(7) \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}.$$

ただし  $m, M$  はそれぞれ惑星、太陽の質量で、 $G$  は万有引力定数である。実際には、(反作用として) 太陽も惑星からの万有引力を受けるので、太陽も (わずかながら) 動くから、この運動方程式は厳密には正しくない。太陽の質量が惑星と比較してかなり大きいので許される仮定とも言える<sup>3</sup>が、太陽が動いたとしても、方程式中の量の意味を少し読み替えれば済むという意味で良い近似になっている (詳しいことは以下の説明を読んで下さい)。

(7) から微分方程式

$$(8) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GM}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}$$

が得られる。

脱線: これによると、惑星の運動は惑星の質量には依らないことが分かる (地球がダイエットに励んでも、1年の長さは変わらない)。

### D.2 太陽は動かないという仮定をおかない厳密なモデル

運動方程式は

$$(9) \quad m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = - \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$(10) \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = - \frac{Gm_2 m_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

<sup>3</sup>太陽、地球、木星 (太陽系最大の惑星) の質量をそれぞれ  $m_S, m_E, m_J$  とするとき、

$$\frac{m_S}{m_E} \doteq 3.3 \times 10^5, \quad \frac{m_S}{m_J} \doteq 1.1 \times 10^3.$$

これから次の微分方程式が導かれる。

$$(11) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$(12) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

### D.3 太陽を座標系の原点とした方程式

(11) から (12) を、辺々引き算すると

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{G}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} [m_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)].$$

整理して

$$(13) \quad \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

ここで

$$\tilde{\mathbf{r}} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \tilde{M} := m_1 + m_2$$

とおくと ( $\tilde{\mathbf{r}}$  は太陽を原点とした惑星の位置ベクトルである! )、

$$(14) \quad \frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{G\tilde{M}}{|\tilde{\mathbf{r}}|^3} \tilde{\mathbf{r}}.$$

形の上では (8) と同じである。  $m_2 \gg m_1$  のとき、  $\tilde{M} = m_1 + m_2 \approx m_2 =$  太陽の質量 なので、 (8) は (14) の良い近似になっていると言える。

### D.4 重心を座標系の原点とした方程式

命題 D.1 (重心は等速直線運動する)  $\mathbf{g} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$  とおくと、  $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}$ . (これから、  $\exists \mathbf{a}, \mathbf{b}$  s.t.  $\mathbf{g} = \mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}$  が導かれる。)

証明 2つの運動方程式 (9), (10) を辺々加えると、

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = \mathbf{0}.$$

(右辺がきれいに消えるのは、作用反作用の法則のため、とも言えるだろう。) これを  $m_1 + m_2$  で割れば良い。 ■

$\mathbf{g}$  は、太陽と惑星からなる系の重心と呼ばれる。(すぐ上で見たように) これが等速直線運動するので、もともとの座標系が物理で言うところの慣性系である場合、重心を中心とする座標系も慣性系になる。前項の太陽を座標系の中心とするのよりは望ましいであろう。

重心を原点とした場合の惑星の位置ベクトルは

$$\mathbf{R} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{g}.$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  で表すと

$$\mathbf{R} := \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{r}_1 - (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

これから、

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{R}, \quad \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^3 \frac{1}{|\mathbf{R}|^3}$$

であるから、(13) に代入して

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{R}|^3} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^3 \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{R} = -\frac{G \frac{m_2^2}{m_1 + m_2}}{|\mathbf{R}|^3} \mathbf{R}.$$

そこで

$$\widehat{M} := \frac{m_2^2}{m_1 + m_2}$$

とおくと、

$$(15) \quad \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{G\widehat{M}}{|\mathbf{R}|^3} \mathbf{R}.$$

こうして (8) と同じ形の微分方程式を導くことができた。

$m_2 \gg m_1$  ならば、

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \doteq 0, \quad \frac{m_2}{m_1 + m_2} \doteq 1$$

とみなして、

$$\mathbf{g} \doteq \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} \doteq \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \widehat{M} \doteq m_2 = \text{太陽の質量}.$$

(8) は (15) の良い近似になっていると考えられる。

## E 平面運動であることの証明

基本的な仮定のおさらい

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  は、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$$

という微分方程式の初期値問題の解である。速度  $\mathbf{v}$  は

$$\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t)$$

で導入され、もちろん

$$\mathbf{v}(0) := \mathbf{v}_0, \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$$

が成り立つ。

$\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$  として良い (惑星は最初に太陽とぶつかっていない)。

$\mathbf{v}_0$  は  $\mathbf{r}_0$  と 1 次独立とする。もし 1 次従属の場合は、 $\exists k \in \mathbf{R}$  s.t.  $\mathbf{v}_0 = k\mathbf{r}_0$ 。この場合、「まっすぐの解」が比較的簡単に見つかる (直観的に明らかであろう)。解の一意性はあるので、問題が解けたことになる。

問  $\mathbf{v}_0 = k\mathbf{r}_0$  の場合に解を求めよ。  
 $\mathbf{r}_0$  と  $\mathbf{v}_0$  が1次独立という仮定から、

$$\mathbf{e} := \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$$

とおくと<sup>4</sup>、 $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$  である。

$$\mathbf{a}(t) := \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$$

とおく。

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0) = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{e}.$$

また、積の微分法と、 $\mathbf{v}$  の定義、万有引力の法則を表す微分方程式から

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}(t) &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t) \\ &= \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \left( -\frac{GM\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|^3} \right) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(ここで一般に  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  であることを用いた。)

ゆえに  $\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{a}(0) = \mathbf{e}$ . これから

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{a}(t)) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) = 0.$$

(ここで一般に  $(\mathbf{A}, \mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$  であることを用いた。)

これは  $\mathbf{r}(t)$  が平面  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3; \mathbf{x} \cdot \mathbf{e} = 0\}$  (これは  $\mathbf{r}_0$  と  $\mathbf{v}_0$  を含む平面としても特徴づけられる) に含まれていることを意味する。

## F エネルギーと角運動量の保存 — ベクトル解析を用いた証明

ベクトル解析を使って良ければ、次のように説明出来る。

### F.1 エネルギー保存

太陽の質量を  $M$ , 万有引力定数を  $G$  とすると、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  は次の微分方程式を満たす:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t) = -\frac{GM}{|\mathbf{r}(t)|^3}\mathbf{r}(t).$$

この等式の両辺と  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$  との内積を取ると

$$(*) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t) = -\frac{GM}{|\mathbf{r}(t)|^3}\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t).$$

さて、

$$\text{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) = -\frac{1}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

であるから、

$$U(\mathbf{r}) := -\frac{GM}{|\mathbf{r}|}$$

<sup>4</sup>後で  $\mathbf{r}_0$  と  $\mathbf{v}_0$  を含む平面を  $xy$  平面であるように座標系を定めるので、 $\mathbf{e}$  は  $(0, 0, e)$  という形をしているが、ここではそのことは必要ない。

とおくと、

$$-\text{grad } U(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}.$$

すなわち、万有引力の場は、 $U(\mathbf{r})$  をポテンシャル・エネルギーに持つ。ゆえに万有引力は保存力である。

これから (\*) の右辺は

$$-\frac{GM}{|\mathbf{r}(t)|^3}\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = -\text{grad } U(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = -\frac{d}{dt}U(\mathbf{r}(t))$$

と表される。ゆえに (\*) は次のように書き換えられる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|^2 \right) = -\frac{d}{dt}U(\mathbf{r}(t)).$$

移項すると、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|^2 + U(\mathbf{r}(t)) \right) = 0.$$

これから力学的エネルギー

$$E(t) := \frac{1}{2}m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|^2 + mU(\mathbf{r}(t))$$

は定数であることが分かる。

## F.2 角運動量保存

角運動量  $\vec{L}$  は、運動量を  $\vec{p}$  として、

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$$

で定義される。ところで  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$  であるから、

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

であることに注意しよう。

また万有引力  $\vec{F}$  は、いわゆる中心力であるから、 $\vec{F} = F(\vec{r})\vec{r}$  の形をしている。このことから

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{0} + \vec{r} \times F(\vec{r})\vec{r} = \vec{0}.$$

これから  $\vec{L}$  は定数であることが分かる。

ゆえに万有引力に従って運動する惑星の角運動量は保存されることが分かった (証明を見れば分かるように、これは一般に中心力場の場合に成立する)。

### F.3 衝突解

ある時刻における角運動量が  $\vec{0}$  であるとき、常に角運動量が  $\vec{0}$  である:

$$\vec{0} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

これから、速度ベクトルはつねに位置ベクトルに平行である。

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = c(t)\vec{r}.$$

これは

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp\left(\int_0^t c(s)ds\right)$$

と解ける。これは原点を通る直線の上を運動する。

## G 高野 [3] 第1章 §2 から

藤田先生とは少し異なったやり方で Kepler の法則を証明している。周期の計算がしてあるところが参考になる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{pmatrix}.$$

第2式の両辺に左から  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  をかけることで、

$$(16) \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta \\ \ddot{y} \cos \theta - \ddot{x} \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

この等式は、物理と関係無く一般に成り立つことを注意しておく。

思いの外簡単になった気がするが、多分、動径方向の加速度と接線方向の加速度を計算しているせいだと思う(それが極座標で簡単になるのは自然であろう)。さらに、ここで  $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$  であることも注意しておく(面積速度  $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$  が顔を出す)。  
万有引力の法則

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{kx}{r^3} \\ \frac{ky}{r^3} \end{pmatrix}$$

を仮定すると

$$\begin{aligned} \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta &= -\frac{k}{r^2}, \\ \ddot{y} \cos \theta - \ddot{x} \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

が得られるので (2 つ目が 0 になるのは、万有引力がいわゆる中心力であるからである)、(16) に代入して

$$(17) \quad \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

新しい従属変数

$$(18) \quad p_r(t) := \dot{r}(t), \quad p_\theta(t) := r(t)^2\dot{\theta}(t)$$

を導入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= p_r, \\ \frac{dp_r}{dt} &= \frac{d^2r}{dt^2} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{k}{r^2} \right] + \frac{1}{r^3} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{k}{r^2} \\ &= \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{k}{r^2} \right] + \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{p_\theta}{r^2}, \\ \frac{dp_\theta}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \end{aligned}$$

であるから、(17) は次と同値である。

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ p_r \\ \theta \\ p_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r \\ \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{k}{r^2} \\ \frac{p_\theta}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

このうち  $\frac{dp_\theta}{dt} = 0$  より

$$p_\theta(t) \equiv \text{const.} =: h.$$

さて、 $H: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$H(r, p_r, \theta, p_\theta) := \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r}$$

で定めるとき (この式の  $r, p_r, \theta, p_\theta$  は独立変数である)、

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \quad -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \quad -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

であるから、(19) は次と同値である。

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r}, & \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, & \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

(注: いずれの方程式も右辺は  $(r(t), p_r(t), \theta(t), p_\theta(t))$  での値)

要するにいわゆる Hamilton 系である。すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(r(t), p_r(t), \theta(t), p_\theta(t)) &= \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{dp_r}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \frac{dp_\theta}{dt} \\ &= -\frac{dp_r}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dp_r}{dt} - \frac{dp_\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dp_\theta}{dt} = 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$H(r(t), p_r(t), \theta(t), p_\theta(t)) \equiv \text{const.} =: E.$$

( $H$  を定義してから、このエネルギー保存則を導くまでは、率直に言って、術学的な気がする？ いや、そもそも、あの従属変数の導入は、Hamilton 系であることから来たものだ。)

$p_\theta(t) \equiv h$  を代入すると

$$\frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{h^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r} = E.$$

これを  $\frac{1}{r}$  と  $p_r$  の関係と見て整理すると、

$$(*) \quad \left( \frac{1}{r} - \frac{k}{h^2} \right)^2 + \frac{p_r^2}{h^2} = \frac{2E}{h^2} + \left( \frac{k}{h^2} \right)^2.$$

以下、 $E$  は

$$(20) \quad -\frac{k^2}{2h^2} \leq E < 0$$

を満たすと仮定する。左の不等式から  $(*)$  の右辺は非負である。するとこの右辺は

$$\frac{2E}{h^2} + \left( \frac{k}{h^2} \right)^2 = \left( \frac{k}{h^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{2E}{h^2} \cdot \frac{h^4}{k^2} \right) = \left( \frac{k}{h^2} \right)^2 e^2 = \left( \frac{ke}{h^2} \right)^2,$$

ただし

$$e := \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{k^2}}$$

と書ける。 $E$  についての仮定から、 $0 \leq e < 1$  である。 $e > 0$  のとき、 $(*)$  は

$$\frac{\left( \frac{1}{r} - \frac{k}{h^2} \right)^2}{\left( \frac{ke}{h^2} \right)^2} + \frac{p_r^2}{\left( \frac{ke}{h} \right)^2} = 1$$

と同値である。ゆえに連続関数  $\phi = \phi(t)$  が存在して、

$$(\#) \quad \frac{1}{r} - \frac{k}{h^2} = \frac{ke}{h^2} \cos \phi, \quad p_r = \frac{ke}{h} \sin \phi$$

となる。この式は  $e = 0$  のときも成立する。第 1 式を微分して、 $\dot{r} = p_r$  を用いると、

$$-\frac{p_r}{r^2} = \frac{ke}{h^2} (-\sin \phi) \dot{\phi}.$$

左辺に  $(\#)$  の第 2 式を代入して

$$-\frac{1}{r^2} \frac{ke}{h} \sin \phi = \frac{ke}{h^2} (-\sin \phi) \dot{\phi}.$$

整理して

$$\dot{\phi} = \frac{h^2}{r^2 h} = \frac{h}{r^2}.$$

一方、 $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2} = \frac{h}{r^2}$  であるから、

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\theta}} = 1.$$

ゆえに  $\exists \theta_0 \in \mathbf{R}$  s.t.

$$\phi(t) = \theta(t) + \theta_0 \quad (t \in \mathbf{R}).$$

(#) の第 1 式に代入して

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{h^2} + \frac{ke}{h^2} \cos(\theta + \theta_0) = \frac{k}{h^2} (1 + e \cos(\theta + \theta_0)).$$

ゆえに

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos(\theta + \theta_0)}.$$

これから軌跡は原点を一つの焦点とする楕円である。 $e$  は離心率で、楕円の長径を  $a$  とすると、

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2/k}{1-e} + \frac{h^2/k}{1+e} \right) = \frac{h^2/k}{1-e^2}.$$

ここで

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{r^2}{h} = \frac{\left( \frac{h^2/k}{1 + e \cos(\theta + \theta_0)} \right)^2}{h} = \frac{h^3}{k^2} \frac{1}{(1 + e \cos(\theta + \theta_0))^2}.$$

であるから、周期を  $T$  とすると、

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \frac{h^3}{k^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{h^3}{k^2} \cdot \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

(最後の等式は、微積でも解けるが、複素関数論ネタかも知れない。)

これから Kepler の第 3 法則が得られる:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 h^6}{k^4 (1 - e^2)^3} \cdot \frac{(1 - e^2)^3}{h^6/k^3} = \frac{(2\pi)^2}{k}.$$

## H Kepler の方程式とその解法

### H.1 ボウマン [4] 第 7 章から

2 体問題では、Kepler の第 1, 第 2 法則によって、惑星 P は、太陽 S を一つの焦点とする楕円軌道を描き、任意の時刻に動径 SP の掃く面積は、その時間に比例する。

P の描く楕円を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

とし、焦点  $(c, 0)$  ( $c := \sqrt{a^2 - b^2}$ ) に太陽 S があり、惑星 P は「反時計回り」にまわるとする。離心率  $e$  は、

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

である。

次のような「平均惑星」M を考える (これはここで作った用語で、「平均太陽」のもじりである)。

(i) 円  $x^2 + y^2 = a^2$  上を等速に移動する。

(ii) P が近日点  $A(a, 0)$ , 遠日点  $A'(-a, 0)$  にあるときは、M は P と一致する。

P が近日点を通る瞬間を時刻  $t = 0$  とする。また点 P の、S を極とする極座標を  $r, \theta$  とする:

$$r := \overline{SP}, \quad \theta := \angle ASP.$$

P の座標を  $(x, y)$  とするとき、円  $x^2 + y^2 = a^2$  上の点 Q を  $Q := (x, ay/b)$  で定める。

惑星 P の、太陽 S を極とする極座標の角度である  $\theta$  は、天文用語では、近日点  $(a, 0)$  から惑星までの角距離という意味で、**真近点距離 (true anomaly)** と呼ばれる<sup>5</sup>。

離心近点距離 (eccentric anomaly)  $\phi$ , 平均近点距離 (mean anomaly)  $\psi$  を

$$\phi := \angle AOQ, \quad \psi := \angle AOM$$

で定める。ちなみに

$$P(c + r \cos \theta, r \sin \theta), \quad M(a \cos \psi, a \sin \psi), \quad Q(a \cos \phi, a \sin \phi).$$

### Kepler の問題

$r, \theta, \psi$  などの変数を、時刻  $t$  あるいは平均近点距離  $\psi$  の関数として表せ、という問題を **Kepler の問題** という。

#### H.1.1 離心近点距離 $\phi$ を平均近点距離 $\psi$ の関数として表す

周期を  $T$  とするとき、

$$\frac{t}{T} = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\text{面積 ASP}}{\pi ab} = \frac{\text{面積 ASQ}}{\pi a^2}$$

である (面積 ASQ =  $\frac{a}{b} \times$  面積 ASP に注意する)。

$$\text{面積 ASQ} = \text{扇形 AOQ} - \triangle SOQ = \frac{1}{2}a^2\phi - \frac{1}{2}ae \cdot a \sin \phi = \frac{a^2}{2}(\phi - e \sin \phi)$$

であるから、

$$\frac{\psi}{2\pi} = \frac{a^2(\phi - e \sin \phi)}{2 \cdot \pi a^2}.$$

ゆえに

$$(21) \quad \psi = \phi - e \sin \phi.$$

$\phi - \psi$  は、変数  $\psi$  について、周期  $2\pi$  の周期奇関数であるから、

$$\phi - \psi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\psi,$$

<sup>5</sup>anomaly とは、変則、例外、変態というような意味だが、偏差、「近点離角」という意味で使われる。後者はいわゆる角距離というものである。

ただし

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\phi - \psi) \sin n\psi \, d\psi \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ -(\phi - \psi) \frac{\cos n\psi}{n} \right]_{\psi=0}^{\psi=\pi} + \int_0^\pi \frac{\cos n\psi}{n} \frac{d}{d\psi} (\phi - \psi) \, d\psi \right\} \\
 &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos n\psi \frac{d\phi}{d\psi} \, d\psi = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - ne \sin \phi) \, d\phi.
 \end{aligned}$$

ゆえに

$$B_n = \frac{2}{n} J_n(ne).$$

すなわち

$$\phi = \psi + 2 \left( J_1(e) \frac{\sin \psi}{1} + J_2(2e) \frac{\sin 2\psi}{2} + J_3(3e) \frac{\sin 3\psi}{3} + \dots \right) = \psi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \frac{\sin n\psi}{n}.$$

おまけ こうして、離心近点距離  $\phi$  が求まったとき、真近点距離  $\theta$  が知りたければ、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\phi}{2}$$

を解けばよい…というけれど (堀源一郎) 何故?

余談 H.1 杉浦 [9] の第 XI 章 §8 の問題 3) に「 $a \neq n\pi$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) であるとき、ケプラーの方程式  $z = a + w \sin z$  から定まる  $z$  を  $w$  の整級数に展開せよ。」という問題があり、「定理 8.9 (これは逆関数の定理) により  $z = a + \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} w^n d^{n-1} (\sin a)^n / da^{n-1}$ . ( $n$  次ベッセル関数  $J_n$  を用いると  $z = a + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(nw) \frac{\sin(na)}{a}$  となる)」という解答がついている。こちらでいうと、

$$\begin{aligned}
 \phi &= \psi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{d\psi} \right)^{n-1} [(\sin \psi)^n] e^n \\
 &= \phi + (\sin \psi) e + (\cos \phi \sin \phi) e^2 + \frac{1}{6} (4 \cos^2 \phi \sin \phi - 3 \sin^3 \phi) e^3 + \dots
 \end{aligned}$$

ということで、変数とは考えにくい離心率  $e$  についての冪級数として表すのはどうなのだろう…円軌道に近い場合は  $e$  が 0 に近くて級数の収束が速いのか? ■

### H.1.2 距離 $r$ を平均近点距離 $\psi$ の関数として表す

$r = a(1 - e \cos \phi)$  であることを用いると、

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \left( J_1'(e) \frac{\cos \psi}{1} + J_2'(2e) \frac{\cos 2\psi}{2} + \dots \right)$$

が得られる (そうである)。

### H.1.3 真近点距離 $\theta$ を平均近点距離 $\psi$ の関数として表す

Watson [10] の p.554 を見よ、という意味のことが書いてある。

## H.1.4 おまけ

ボウマン [4] にある問題。何か見えそうな気がするので。

$$\frac{1}{1 - e \cos \theta} = 1 + 2(J_1(e) \cos \theta + J_2(2e) \cos 2\theta + \dots)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} = 1 + 2(J_1(e)^2 + J_2(2e)^2 + J_3(3e)^2 + \dots)$$

## H.1.5 Kepler の方程式を数値計算で解く

Kepler の方程式は文献に現れた初めての超越方程式であり、これまでに何百という解法が考えられてきたそうである (平凡社百科事典の記述 (by 堀 源一郎) による)。

私の記憶が確かならば、中野主一氏の天文計算プログラムでも、反復法で解いていた。今度、チェックしよう。

$M$  (平均近点角),  $e$  (離心率) が与えられているとき、

$$E = M + e \sin E$$

を満たす  $E$  (離心近点角) を求めよ。

反復法で解く場合、初期値が必要になるが、よほど離心率が大きく (1 に近く) ない限り、 $M$  を初期値に選ぶので良いと思われる。

$M = 0.8$ ,  $e = 0.2$  とすると、 $E = 0.9643338876952228 \dots$   $E = 0.964333887695222658b$

Mathematica で

```
EE=2/10
m=8/10
FindRoot[x==m+EE*Sin[x],{x,1},WorkingPrecision->100]
0.96433388769522264457506271899845052028615328006880 (改行)
70848686011389985763852645291991226699739659693633
```

C で

```
/*
 * solve-kepler.c
 */

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int verbose = 1;

int maxcount = 0;
double M, e;

double f(double E)
{
    return E - e * sin(E) - M;
}

double df(double E)
{
    return 1.0 - e * cos(E);
}
```

```

typedef double func(double);

#define MAX_ITER 100

// Newton 法で f(x)=0 の x0 の近くの解を求める
double newton(func f, double x0, double eps)
{
    int i;
    double x, dx;
    x = x0;
    for (i = 0; i <= MAX_ITER; i++) {
        dx = f(x) / df(x);
        x -= dx;
        if (fabs(dx) < eps)
            break;
    }
    if (i > maxcount)
        maxcount = i;
    /* 簡単に報告 */
    if (fabs(dx) > eps)
        printf("%d 回で収束しなかった。dx=%g\n", MAX_ITER, dx);
    else if (verbose)
        printf("x0=%g, count=%d, dx=%g\n", x0, i, dx);
    /* 最後にもう 1 回反復 */
    x -= f(x) / df(x);
    return x;
}

int main(void)
{
    double E;
    int i, n;
    double pi, dM;
    pi = 4.0 * atan(1.0);
    /* 区間 [0, 2π] を 100 等分 */
    n = 100;
    dM = 2 * pi / n;
    /* 離心率 */
    printf("e="); scanf("%lf", &e);
    for (i = 0; i <= n; i++) {
        M = i * dM;
        /* M = E - e * sin(E) を解く */
        /* f(E) = E - e * sin(E) - M */
        E = newton(f, M, 1e-14);
        printf("%f %f\n", M, E);
    }
    printf("max count=%d\n", maxcount);

    M = 0.8; e = 0.2;
    E = newton(f, M, 1e-12);
    printf("e=%g, M=%g, E=%17.15f\n", e, M, E);
    return 0;
}

```

## H.2 Bessel 関数の歴史メモ

自分のノート「Bessel 関数の数値計算」<sup>6</sup>

ネットで見つけた文書 <http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/iohara/doc/Bessel.pdf>

<sup>6</sup><http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/computing-bessel-function.pdf>

Bessel 関数は、数学の様々なところに登場するので、Bessel による導入以前にも、色々なところで顔を出している。

1. 1738 年 J. Bernoulli の論文で重い鎖の振動
2. 1764 年 L. Euler の論文で膜の振動
3. 1777 年 Lagrange の論文で Kepler 問題
4. 1822 年 Fourier の論文で円筒形の固体の対称な熱伝導
5. 1823 年 Poisson の論文で円筒形の固体の非対称な熱伝導

Bessel (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846) は、1824 年に “Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht” で Kepler 問題について考察し、整数次 Bessel 関数の

### H.3 軌道要素 — 用語

1. The Ecliptic (黄道面) — 基準平面
2. A Standard Direction (基準方向)
3. Longitude of the Ascending Node (昇交点黄経)
4. Inclination (軌道傾斜角)
5. Longitude of Periapse (近点黄経)
6. Semimajor Axis (長半径) — 楕円の歳台形の半分
7. Eccentricity (離心率)
8. Time of Periapse Passage (近点通過時刻)
9. Masses of the Bodies (質点の質量)

## I 掃く面積の計算

楕円の方程式は

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

近日点 ( $\theta = 0$ ) から  $\theta = \theta_0$  までの面積

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{p^2}{2} \cdot \frac{1}{(e^2 - 1)^{3/2} (1 + e \cos \theta_0)} \left( e\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta_0 - 2(1 + e \cos \theta_0) \tanh^{-1} \left( \frac{(e - 1) \tan(\theta_0/2)}{\sqrt{e^2 - 1}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}, x_0 = \frac{pe}{e^2 - 1}$$

## J Kepler の第 3 法則と Napier

Kepler が第 1, 第 2 法則を発見してから (1609)、第 3 法則を発見するまで (1619) 長い時間がかかった。その間に Napier による対数の発見があった。この辺の事情は日本語ではあまり書かれていないが、英語ではわんさと書かれている。

例えば <http://www.mathpages.com/rr/s8-01/8-01.htm>

### 8.1 Kepler, Napier, and the Third Law

There is special providence in the fall of a sparrow.

Shakespeare

By the year 1605 Johannes Kepler, working with the relativistic/inertial view of the solar system suggested by Copernicus, had already discerned two important mathematical regularities in the orbital motions of the planets:

- I. Planets move in ellipses with the Sun at one focus.
- II. The radius vector describes equal areas in equal times.

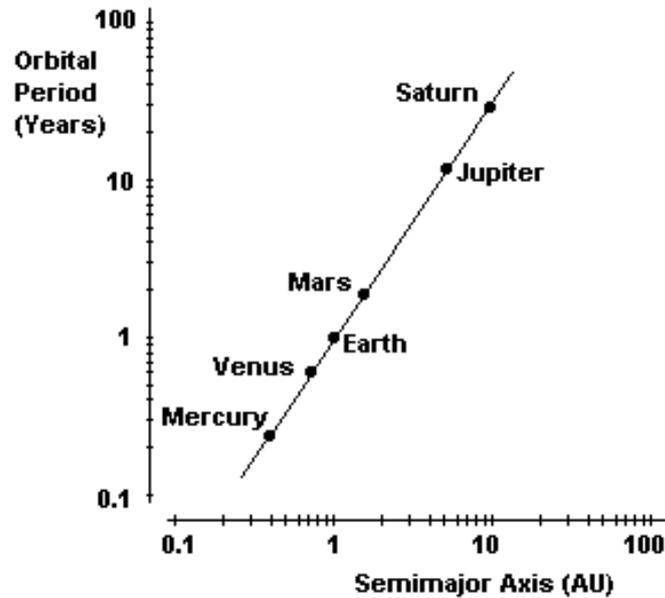
This shows the crucial role that interpretations and models sometimes play in the progress of science, because it's obvious that these profoundly important observations could never even have been formulated in terms of the Ptolemaic earth-centered model.

Oddly enough, Kepler arrived at these conclusions in reverse order, i.e., he first determined that the radius vector of a planet's "oval shaped" path sweeps out equal areas in equal times, and only subsequently determined that the "ovals" were actually ellipses. It's often been remarked that Kepler's ability to identify this precise shape from its analytic properties was partly due to the careful study of conic sections by the ancient Greeks, particularly Apollonius of Perga, even though this study was conducted before there was even any concept of planetary orbits. Kepler's first law is often cited as an example of how purely mathematical ideas (e.g., the geometrical properties of conic sections) can sometimes find significant applications in the descriptions of physical phenomena.

After painstakingly extracting the above two "laws" of planetary motion (first published in 1609) from the observational data of Tycho Brahe, there followed a period of more than twelve years during which Kepler exercised his ample imagination searching for any further patterns or regularities in the data. He seems to have been motivated by the idea that the orbits of the planets must satisfy a common set of simple mathematical relations, analogous to the mathematical relations which the Pythagoreans had discovered between harmonious musical tones. However, despite all his ingenious efforts during these years, he was unable to discern any significant new pattern beyond the two empirical laws which he had found in 1605. Then, as Kepler later recalled, on the 8th of March in the year 1618, something marvelous "appeared in my head". He suddenly realized that

- III. The proportion between the periodic times of any two planets is precisely one and a half times the proportion of the mean distances.

In the form of a diagram, his insight looks like this:



At first it may seem surprising that it took a mathematically insightful man like Kepler over twelve years of intensive study to notice this simple linear relationship between the logarithms of the orbital periods and radii. In modern data analysis the log-log plot is a standard format for analyzing physical data. However, we should remember that logarithmic scales had not yet been invented in 1605. A more interesting question is why, after twelve years of struggle, this way of viewing the data suddenly "appeared in his head" early in 1618. (By the way, Kepler made some errors in the calculations in March, and decided the data didn't fit, but two months later, on May 15 the idea "came into his head" again, and this time he got the computations right.)

Is it just coincidental that John Napier's "Mirifici Logarithmorum Canonis Descripto" (published in 1614) was first seen by Kepler towards the end of the year 1616? We know that Kepler was immediately enthusiastic about logarithms, which is not surprising, considering the masses of computation involved in preparing the Rudolphine Tables. Indeed, he even wrote a book of his own on the subject in 1621. It's also interesting that Kepler initially described his "Third Law" in terms of a 1.5 ratio of proportions, exactly as it would appear in a log-log plot, rather than in the more familiar terms of squared periods and cubed distances. It seems as if a purely mathematical invention, namely logarithms, whose intent was simply to ease the burden of manual arithmetical computations, may have led directly to the discovery/formulation of an important physical law, i.e., Kepler's third law of planetary motion. (Ironically, Kepler's academic mentor, Michael Maestlin, chided him - perhaps in jest? - for even taking an interest in logarithms, remarking that "it is not seemly for a professor of mathematics to be childishly pleased about any shortening of the calculations".) By the 18th of May, 1618, Kepler had fully grasped the logarithmic pattern in the planetary orbits:

Now, because 18 months ago the first dawn, three months ago the broad daylight,

but a very few days ago the full Sun of a most highly remarkable spectacle has risen, nothing holds me back.

It's interesting to compare this with Einstein's famous comment about "...years of anxious searching in the dark, with their intense longing, the final emergence into the light—only those who have experienced it can understand it".

Kepler announced his Third Law in *Harmonices Mundi*, published in 1619, and also included it in his "Ephemerides" of 1620. The latter was actually /dedicated/ to Napier, who had died in 1617. The cover illustration showed one of Galileo's telescopes, the figure of an elliptical orbit, and an allegorical female (Nature?) crowned with a wreath consisting of the Napierian logarithm of half the radius of a circle. It has usually been supposed that this work was dedicated to Napier in gratitude for the "shortening of the calculations", but Kepler obviously recognized that it went deeper than this, i.e., that the Third Law is purely a logarithmic harmony. In a sense, logarithms played a role in Kepler's formulation of the Third Law analogous to the role of Apollonius' conics in his discovery of the First Law, and with the role that tensor analysis and Riemannian geometry played in Einstein's development of the field equations of general relativity. In each of these cases we could ask whether the mathematical structure provided the tool with which the scientist was able to describe some particular phenomenon, or whether the mathematical structure effectively selected an aspect of the phenomena for the scientist to discern.

Just as we can trace Kepler's Third Law of planetary motion back to Napier's invention of logarithms, we can also trace Napier's invention back to even earlier insights. It's no accident that logarithms have applications in the description of Nature. Indeed in his introduction to the tables, Napier wrote

A logarithmic table is a small table by the use of which we can obtain a knowledge of all geometrical dimensions and motions in space...

The reference to motions in space is very appropriate, because Napier originally conceived of his "artificial numbers" (later renamed logarithms, meaning number of the ratio) in purely kinematical terms. In fact, his idea can be expressed in a form that Zeno of Elea would have immediately recognized. Suppose two runners leave the starting gate, travelling at the same speed, and one of them maintains that speed, whereas the speed of the other drops in proportion to his distance from the finish line. The closer the second runner gets to the finish line, the slower he runs. Thus, although he is always moving forward, the second runner never reaches the finish line. As discussed in Section 3.7, this is exactly the kind of scenario that Zeno exploited to illustrate paradoxes of motion. Here, 2000 years later, we find Napier making very different use of it, creating a continuous mapping from the real numbers to his "artificial numbers". With an appropriate choice of units we can express the position  $x$  of the first runner as a function of time by  $x(t) = t$ , and the position  $X$  of the second runner is defined by the differential equation  $dX/dt = 1 - X$  where the position "1" represents the finish line. The solution of this equation is  $X(t) = 1 - e^{-t}$ , where  $e^x$  is the function that equals its own derivative. Then Napier defined  $x(t)$  as the "logarithm" of  $1 - X(t)$ , which is to say, he defined  $t$  as the "logarithm" of  $e^{-t}$ . Of course, the definition of logarithm was subsequently

revised so that we now define  $t$  as the logarithm of  $e^t$ , the latter being the function that equals its own derivative.

The logarithm was one of many examples throughout history of ideas that were "in the air" at a certain time. It had been known since antiquity that the exponents of numbers in a geometric sequence are additive when terms are multiplied together, i.e., we have  $a^n a^m = a^{(m+n)}$ . In fact, there are ancient Babylonian tablets containing sequences of powers and problems involving the determination of the exponents of given numbers. In the 1540's Stifel's "Arithmetica integra" included tables of the successive powers of numbers, which was very suggestive for Napier and others searching for ways to reduce the labor involved in precise manual computations.

In the 1580's Viete derived several trigonometric formulas such as

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

If we have a table of cosine values this formula enables us to perform multiplication simply by means of addition. For example, to find the product of 0.7831 and 0.9348 we can set  $\cos(x) = 0.7831$  and  $\cos(y) = 0.9348$  and then look up the angles  $x, y$  with these cosines in the table. We find  $x = 0.67116$  and  $y = 0.36310$ , from which we have the sum  $x + y = 1.03426$  and the difference  $x - y = 0.30806$ . The cosines of the sum and difference can then be looked up in the table, giving  $\cos(x + y) = 0.51116$  and  $\cos(x - y) = 0.95292$ . Half the sum of these two numbers equals the product 0.73204 of the original two numbers. This technique was called prosthaphaeresis (the Greek word for addition and subtraction), and was quickly adopted by scientists such as the Dane Tycho Brahe for performing astronomical calculations. Of course, today we recognize that the above formula is just a disguised version of the simple exponent addition rule, noting that  $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ .

At about this same time (1594), John Napier was inventing his logarithms, whose purpose was also to reduce multiplication and division to simple addition and subtraction by means of a suitable transformation. However, Napier might never have set aside his anti-Catholic polemics to work on producing his table of logarithms had it not been for an off-hand comment made by Dr. John Craig, who was the physician to James VI of Scotland (later James I of England and Ireland). In 1590 Craig accompanied James and his entourage bound for Norway to meet his prospective bride Anne, who was supposed to have journeyed from Denmark to Scotland the previous year, but had been diverted by a terrible storm and ended up in Norway. (The storm was so severe that several supposed witches were held responsible and were burned.) James' party, too, encountered severe weather, but eventually he met Anne in Oslo and the two were married. On the journey home the royal party visited Tycho Brahe's observatory on the island of Hven, and were entertained by the famous astronomer, well known as the discoverer of the "new star" in the constellation Cassiopeia. During this stay at Brahe's lavish Uraniborg ("castle in the sky") Dr. Craig observed the technique of prosthaphaeresis that Brahe and his assistants used to ease the burden of calculation. When he returned to Scotland, Craig mentioned this to his friend the Baron of Murchiston

(aka John Napier), and this seems to have motivated Napier to devote himself to the development of his logarithms and the generation of his tables, on which he spent the remaining 25 years of his life. During this time Napier occasionally sent preliminary results to Brahe for comment.

Several other people had similar ideas about exploiting the exponential mapping for purposes of computation. Indeed, Kepler's friend and assistant Jost Burgi evidently devised a set of "progress tables" (basically anti-logarithm tables) around 1600, based on the indices of geometric progressions, and made some use of these in his calculations. However, he didn't fully perceive the potential of this correspondence, and didn't develop it very far.

Incidentally, if the story of a group of storm-tossed nobles finding themselves on a mysterious island ruled over by a magician sounds familiar, it may be because of Shakespeare's "The Tempest", written in 1610. This was Shakespeare's last complete play and, along with *Love's Labor's Lost*, his only original plot, i.e., these are the only two of his plays whose plots are not known to have been based on pre-existing works. It is commonly believed that the plot of "The Tempest" was inspired by reports of a group of colonists bound for Virginia who were shipwrecked in Bermudain 1609. However, it's also possible that Shakespeare had in mind the story of James VI (who by 1610 was James I, King of England) and his marriage expedition, arriving after a series of violent storms on the island of the Danish astronomer and astrologer Tycho Brahe and his castle in the sky (which, we may recall, included a menagerie of exotic animals). We know "The Tempest" was produced at the royal court in 1611 and again in 1612 as part of the festivities preceding the marriage of the King's daughter, and it certainly seems likely that James and Anne would associate any story involving a tempest with their memories of the great storms of 1589 and 1590 that delayed Anne's voyage to Scotland and prompted James' journey to meet her. The providential aspects of Shakespeare's "The Tempest" and its parallels with their own experiences could hardly have been lost on them.

Shakespeare's choice of the peculiar names Rosencrantz and Guildenstern for two minor characters in "Hamlet, Prince of Denmark" gives further support to the idea that he was familiar with Tycho, since those were the names of two of Tycho's ancestors appearing on his coat of arms. There is also evidence that Shakespeare was personally close to the Digges family (e.g., Leonard Digges contributed a sonnet to the first Folio), and Thomas Digges was an English astronomer and mathematician who, along with John Dee, was well acquainted with Tycho. Digges was an early supporter and interpreter of Copernicus' relativistic ideas, and was apparently the first to suggest that our Sun was just an ordinary star in an infinite universe of stars.

Considering all this, it is surely not too farfetched to suggest that Tycho may have been the model for Prospero, whose name, being composed of Providence and sparrow, is an example of Shakespeare's remarkable ability to weave a variety of ideas, influences, and connotations into the fabric of his plays, just as we can see in Kepler's three laws the synthesis of the heliocentric model of Copernicus, Apollonius' conics, and the logarithms of Napier.

## 参考文献

- [1] 高桑昇一郎：微分方程式と変分法, 共立出版 (2003).
- [2] 福島登志夫編集：天体の位置と運動, シリーズ現代の天文学 13, 日本評論社 (2009), 伊藤孝士, 大坪俊通, 片山真人, 福島登志夫, 細川瑞彦, 本間希樹, 矢野太平, 吉川真 執筆.
- [3] 高野恭一：常微分方程式, 朝倉書店 (1994), 線形微分方程式のモノドロミー表現やフックス型微分方程式等、複素領域における微分方程式の話が載っているのが特徴.
- [4] フランク・ボウマン：ベッセル関数入門, 日新出版 (1963), 平野鉄太郎訳.
- [5] 溝畑茂：解析学小景, 岩波書店 (1997).
- [6] 久賀道郎：ドクトル・クーガーの数学講座 1, 日本評論社 (1992).
- [7] 久賀道郎：ドクトル・クーガーの数学講座 2, 日本評論社 (1992).
- [8] 藤田宏：三訂版 応用数学, 放送大学出版協会 (2000), 第 7 章『発展系の数値解析』は <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-0.pdf> から入手できる.
- [9] 杉浦光夫：解析入門 II, 東京大学出版会 (1985).
- [10] Watson, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edition, Cambridge University Press (1944, 1995).