

FreeFem++ ノート

桂田 祐史

2012年7月3日, 2016年10月27日

FreeFem++ を見て「なんて便利なんだろう」と思う。自分が解きたい問題ほぼそのままの問題のプログラム例があればとてもハッピー。でも…似てはいるけど、そのままパクればすまない問題に突き当たってから、苦行が始まる。

必要になったときに泥縄式に調べ物をして、後のためにメモを書く。つまり本質的に自分用。

最初、内輪向けに書いた「FreeFem++の紹介」の公開版を作った(アクセス制限をするのは面倒なので)。

(2014/12) 今年、大塚・高石 [4] が出版された。「有限要素法で学ぶ現象と数理」¹ というサポート・ページがある。

FreeFem++ Wiki Manual Index² というサイトも参考になる。

1 実行形式

普通 FreeFem++ を使う。例えば prog.edp を実行するには、

```
FreeFem++ prog.edp
```

とする。拡張子 .edp を推奨しているようだが、(今のところ) 何であっても解釈実行するみたい³。

以前は FreeFem++ は /usr/local/bin の下に置かれたが、今は /usr/local/ff++ の下の、バージョン番号を含んだディレクトリに置かれるようである。今の私の Mac では次のようにして PATH を設定している。

.profile の中でこうやっています

```
export PATH=$PATH:/usr/local/ff++/mpich/3.41/bin:/usr/local/ff++/mpich/bin
```

FreeFem++-x11 — X のライブラリが古いと動かないの…これは最近はなくなったのかな?

FreeFem++-nw — グラフィックス命令は無視したり、ウィンドウを出さない。リモートで接続して計算だけをさせるのに便利。

2 型

int と real (double みたいなもの), complex

bool 気持ちは Boolean で、値は true と false のつもりだけど、中身は int か。

¹<http://comfos.org/jp/ffempp/book/>

²<http://www.um.es/freefemv3/ff++/pmwiki.php?n=FFDoc.FFDoc>

³edp は équation aux dérivées partielles (偏微分方程式, 英語では partial differential equations) の略だとか。

```
bool f=false;
bool t=true;
cout << f << endl;
cout << t << endl;
```

これで 0 と 1 が表示される。

要するに C や C++ と同じである。これを利用すると $(-2, -1) \times (-3, 3)$ の特性関数は

```
func chi=(-2 < x) * (x < -1) * (-3 < y) * (y < 3);
```

で定義出来る。

string というものもある。(+ で連結出来るとか。string を数値にするには atoi(), atof() を使うみたい。逆に数値を string にするには、string に + するとか。)

脱線: これに止まらず、文法のほとんどは C, C++ のそれに近い。簡単な C 言語の計算プログラムは FreeFem++ に書き換えられる (と感している)。論より証拠。差分法のプログラムを書いてみよう。

```

// heat1d-e-freefem.edp
// 実行: FreeFem++ heat1d-e-freefem.edp
// N, x が大域的な識別子を隠すと警告が出る (つまり名前が衝突する)。

int i, N=50, n, nMax;
real h = 1.0 / N, lambda = 0.5, Tmax = 1.0;
real tau = lambda * h^2;
real[int] x(N+1);
real[int] u(N+1);
real[int] newu(N+1);

cout << "h= " << h << endl;
cout << "lambda= " << lambda << endl;
cout << "tau= " << tau << endl;

func real f(real x) {
  if (x < 0.5)
    return x;
  else
    return 1 - x;
}

for (i = 0; i <= N; i++) {
  x[i] = i * h;
  u[i] = f(x[i]);
}
plot([x,u], bb=[[-0.1,-0.1],[1.1,1.1]],aspectratio=true, wait=true);

nMax = rint(Tmax / tau);
cout << "nMax =" << nMax << endl;
for (n = 1; n <= nMax; n++) {
  for (i = 1; i < N; i++)
    newu[i] = (1.0 - 2.0 * lambda) * u[i] + lambda * (u[i+1] + u[i-1]);
  // cout << newu << endl;
  newu[0] = newu[N] = 0;
  u = newu;
  plot([x, u], bb=[[-0.1,-0.1],[1.1,1.1]],aspectratio=true);
}

```

なお、C++ ライクな `cin` も使うことが出来るので、`N` の値をキーボード入力することも可能である。

```

int i, N, n, nMax;
cout << "input N: ";
cin >> N;
real h = 1.0 / N, lambda = 0.5, Tmax = 1.0;

```

(陰解法にも挑戦してみよう。連立1次方程式をうまく解く方法があるか？連立1次方程式のソルバーをたくさん内蔵しているので、それを利用できれば簡単だと思うんだけど…さすがに三項方程式用のはないかな。)

3 配列

添字が整数の普通の配列

```
real[int] x(3);
```

これで `x[0]`, `x[1]`, `x[2]` あるいは `x(0)`, `x(1)`, `x(2)` が使える。

`x[1]` でも `x(1)` でも違いがないのかは不明である。

まるで初心者の C++ みたいな

```
int i,j;
real[int] xx(9),yy(9);
for (i=0; i<9; i++) xx[i]=(i+1);
cout << xx << endl;
for (i=0; i<9; i++) yy(i)=(i+1);
for (i=0; i<9; i++) {
    for (j=0; j<9; j++)
        cout << (xx[i] * yy[j]) << " ";
    cout << endl;
}
```

ところで2次元配列も定義できるようだが、こちらはカギ括弧 `[]` は使えず、丸括弧 `()` を使う必要があるみたい。

2次元配列はこんなふうに

```
real[int,int] a(2,2);
a(1,1)=1; a(1,2)=2;
a(2,1)=3; a(2,2)=4;
```

2次元配列の例 (丸い括弧を使う)

```
real[int,int] a(9,9);
for (int i=1; i<=9; i++) {
    for (int j=1; j<=9; j++) {
        a(i-1,j-1) = i * j;
        cout << a(i-1,j-1) << " ";
    }
    cout << endl;
}
cout << "output by \"cout << a << endl;\"" << endl;
cout << a << endl;
```

2次元配列の例 (丸い括弧を使う)

```
chronos% FreeFem++ freefem-test3.edp
EXEC of the plot : ffglut
-- FreeFem++ v 3.190000 (date Ven 20 avr 2012 08:49:54 CEST)
Load: lg_fem lg_mesh lg_mesh3 eigenvalue
1 : real[int,int] a(9,9);
2 : for (int i=1; i<=9; i++) {
3 :   for (int j=1; j<=9; j++) {
4 :     a(i-1,j-1) = i * j;
5 :     cout << a(i-1,j-1) << " ";
6 :   }
7 :   cout << endl;
8 : }
9 : cout << "output by \"cout << a << endl;\"" << endl;
10 : cout << a << endl;
11 : sizestack + 1024 =1168 ( 144 )

1 2 3 4 5 6 7 8 9
2 4 6 8 10 12 14 16 18
3 6 9 12 15 18 21 24 27
4 8 12 16 20 24 28 32 36
5 10 15 20 25 30 35 40 45
6 12 18 24 30 36 42 48 54
7 14 21 28 35 42 49 56 63
8 16 24 32 40 48 56 64 72
9 18 27 36 45 54 63 72 81
output by "cout << a << endl;"
9 9
 1  2  3  4  5  6  7  8  9
 2  4  6  8 10 12 14 16 18
 3  6  9 12 15 18 21 24 27
 4  8 12 16 20 24 28 32 36
 5 10 15 20 25 30 35 40 45
 6 12 18 24 30 36 42 48 54
 7 14 21 28 35 42 49 56 63
 8 16 24 32 40 48 56 64 72
 9 18 27 36 45 54 63 72 81

times: compile 0.005969s, execution 0.000282s, mpirank:0
Err ReadOnePlot -1
CodeAlloc : nb ptr 2373, size :314416 mpirank: 0
Bien: On a fini Normalement
chronos%
```

3.1 misc

行列について、掛け算や転置、逆転 (逆行列) ができる。
連想配列っぽいのも使える。

```
real[string] a;

a["tako"] = 1.0;
```

配列は [と] でくくって表せる。代入出来るのはもちろん、初期化にも使える。

```
real[int] c=[1,2,3];
cout << c << endl;

real[int] d;
d=[1,2,3,4];
cout << d << endl;
```

配列はソート出来る。

```
a.sort;
```

定義と同時に初期化する場合、MATLAB 風の `a:b` や `a:dx:b` が使える (`dx` が非整数のときは `a` は整数にしないこと)。

```
real[int] a(2:8);
cout << a << endl;

real[int] b(2.0:0.3:10);
cout << b << endl;
```

```
[chronos:~/work] mk% FreeFem++ foobar.edp
EXEC of the plot : ffglut
-- FreeFem++ v 3.190000 (date Ven 20 avr 2012 08:49:54 CEST)
Load: lg_fem lg_mesh lg_mesh3 eigenvalue
  1 : real[int] a(2:8);
  2 : cout << a << endl;
  3 :
  4 : real[int] b(2.0:0.3:10);
  5 : cout << b << endl; sizestack + 1024 =1136 ( 112 )

7
  2  3  4  5  6
  7  8
27
  2 2.3 2.6 2.9 3.2
 3.5 3.8 4.1 4.4 4.7
  5 5.3 5.6 5.9 6.2
 6.5 6.8 7.1 7.4 7.7
  8 8.3 8.6 8.9 9.2
 9.5 9.8
times: compile 0.005558s, execution 0.000107s, mpirank:0
Err ReadOnePlot -1
CodeAlloc : nb ptr 2330, size :313288 mpirank: 0
Bien: On a fini Normalement
[chronos:~/work] mk%
```

4 便利な misc

- 円周率 pi
- `clock()` CPU 時間

経過時間を測る

```
real then=clock();  
...  
cout << clock() - then << endl;
```

- `verbosity=0`; とすると情報の出力を抑制する (そんなに減らないような気もするが…)
- `exec(文字列)`; で外部のコマンドを実行出来る。

```
dirname="datadir";  
exec("mkdir " + dirname);
```

5 境界 border

問題を考える領域の境界曲線 (の一部) を定義するために `border` という命令がある。

円周全体を C とする

```
border C(t=0,2*pi) { x=cos(t); y=sin(t); }
```

```
int C=1;  
...  
border Gamma1(t=0,pi) { x=cos(t); y=sin(t); label=C; }  
border Gamma2(t=pi,2*pi) { x=cos(t); y=sin(t); label=C; }
```

```
border C1(t=0,1) { x=t; y=0; }  
border C2(t=0,1) { x=1; y=t; }  
border C3(t=0,1) { x=1-t; y=1; }  
border C4(t=0,1) { x=0; y=1-t; }
```

6 メッシュ buildmesh(), readmesh(),...

メッシュはかなり奥が深い。少し「変わったこと」をしようと思うと、マニュアル5章を読むことになると思われる。

`buildmesh()` を使ってメッシュを作ることが出来る。

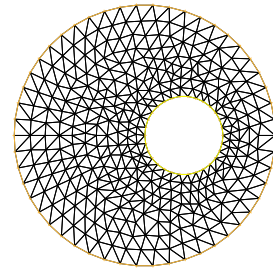
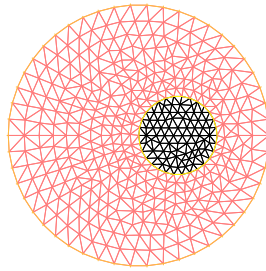
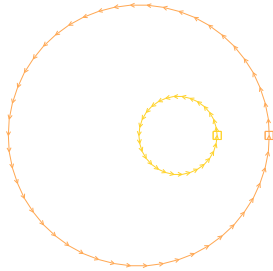
```
mesh 名前 = buildmesh(境界の名前 (分割の指定));
```

```
mesh Th = buildmesh(C(50));
```

```
mesh Th = buildmesh(a(50)+b(-30));
```

sampleMesh.edp

```
border a(t=0,2*pi){ x=cos(t); y=sin(t);label=1;}
border b(t=0,2*pi){ x=0.3+0.3*cos(t); y=0.3*sin(t);label=2;}
plot(a(50)+b(+30),wait=true,ps="border.eps");
mesh ThWithoutHole = buildmesh(a(50)+b(+30));
mesh ThWithHole = buildmesh(a(50)+b(-30));
plot(ThWithoutHole,wait=1,ps="Thwithouthole.eps");
plot(ThWithHole,wait=1,ps="Thwithhole.eps");
```



square() で $[0, 1] \times [0, 1]$ を

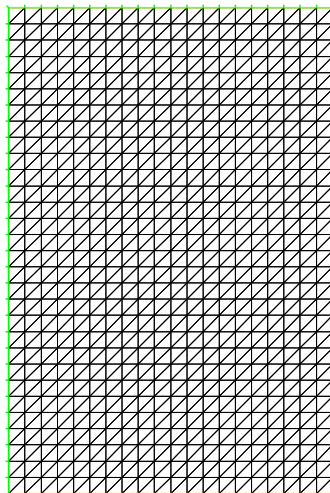
```
mesh Th = square(10,10);
```

実は square() で長方形 $[a, b] \times [c, d]$ も分割できるように、

```
mesh Th = square(m, n, [a+(b-a)*x, c+(d-c)*y])
```

とすれば良い。

```
// [1,3] × [2,5] を 20 × 30 分割
mesh Th = square(20,30, [1+2*x, 2+3*y]);
plot(Th);
```



なお、square() で作ったメッシュは、下の辺、右の辺、上の辺、左の辺 (反時計回り) の順に 1, 2, 3, 4 というラベルがつけられている。

作ったメッシュは savemesh() を使ってファイルに保存出来る。


```
savemesh(Th, "Th.msh");
```

readmesh() を使ってメッシュをファイルから読み込むことが出来る。

```
mesh Th = readmesh("mymesh.sh");
```

region パラメーターとは？

6.1 mesh クラスの詳細

Th をメッシュとすると、Th.nt は三角形の数 (the number of triangles)、Th.nv は節点の数 (the number of vertices) である。

Th(i) は i 番目の節点 ($i = 0, 1, \dots, \text{Th.nv} - 1$) で、その座標は Th(i).x と Th(i).y である。Th(i).label って何だろう？

Th[i] は i 番目の三角形 ($i = 0, 1, \dots, \text{Th.nt} - 1$)、Th[i][j] は i 番目の三角形の j 番目の節点 ($j = 0, 1, 2$)、その座標は Th[i][j].x と Th[i][j].y である。面積は Th[i][j].area である。

(x, y) を含む三角形の番号は Th(x,y).nuTriangle で得られる。

6.2 mesh ファイルの構造

ここは、リーバース・エンジニアリングする。

正方形領域 $(0, 1) \times (0, 1)$ を次のようなコードで分割してみよう。正方形の辺のうち、左と下にあるものに 1 というラベル、右と上にあるものに 2 というラベルをつけている。

```
int Gamma1=1, Gamma2=2;
border Gamma10(t=0,1) { x=0; y=1-t; label=Gamma1; }
border Gamma11(t=0,1) { x=t; y=0; label=Gamma1; }
border Gamma20(t=0,1) { x=1; y=t; label=Gamma2; }
border Gamma21(t=0,1) { x=1-t; y=1; label=Gamma2; }

int m=2;
mesh Th = buildmesh(Gamma10(m)+Gamma11(m)+Gamma20(m)+Gamma21(m));

savemesh(Th, "Th.msh");
```

として Th.msh を作ると

```

9 8 8
0 0 1
0 1 2
0 0.5 1
0.5 0 1
1 0 2
0.4999999999488 0.4999999999488 0
0.5 1 2
1 0.5 2
1 1 2
7 8 9 0
1 4 3 0
4 5 8 0
6 8 7 0
4 6 3 0
4 8 6 0
2 3 7 0
7 3 6 0
9 7 2
7 2 2
5 8 2
8 9 2
1 4 1
4 5 1
2 3 1
3 1 1

```

多分次のようなフォーマットになっているのであろう。

```

総節点数  $n$   総要素数  $m$   境界に属する辺の数  $N$ 
節点  $P_0$  の  $x,y$  座標とラベル (0 は内点)
:
節点  $P_{n-1}$  の  $x,y$  座標とラベル (0 は内点)
要素  $e_0$  の 3 節点の節点番号と 0
要素  $e_1$  の 3 節点の節点番号と 0
:
要素  $e_{m-1}$  の 3 節点の節点番号と 0
境界に属する辺  $Q_0$  の両端の点の節点番号とラベル
:
境界に属する辺  $Q_{N-1}$  の両端の点の節点番号とラベル

```

(FreeFem++ の内部では、番号は 0 からつけるのが基本のようである。エラーメッセージを読むときは、そのことを念頭にすること。)

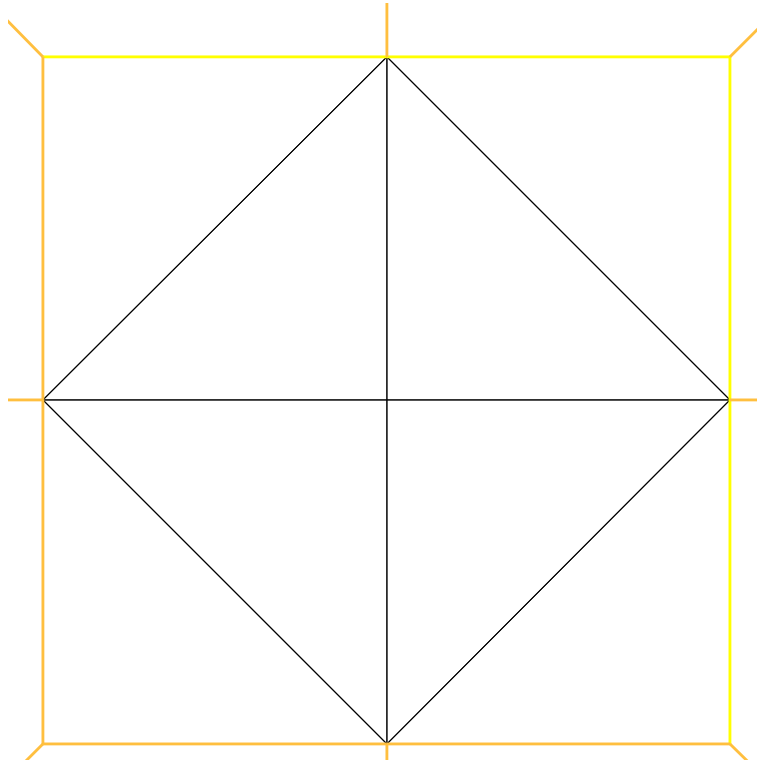


図 1: $m = 2$ の時の三角形分割の様子 (Th.msh に対応)

7 有限要素空間 fespace

既に定義しておいたメッシュと、要素の種類を表す名前 (P1, P2, ...) を用いて、有限要素空間 (数学では V_h などの記号で表すことが多い) を定義する。

有限要素空間 (型) の定義

fespace 名前 (メッシュの名前, 要素の種類を表す名前);

例えば

```
fespace Vh(Th, P1);
```

要素の種類としては、P1, P2, P1b, ... P2Morley (load "Morley"; が必要), P3 (load "Element_P3"; が必要), ... 山のようにある。

有限要素空間は、数学的には (数ベクトルもどきの) 集合であるので、Freefem++ 的には (数ベクトルもどきを表す) 型名である。具体的に変数を宣言するには、定義した型名 変数名; とするわけだ。

有限要素空間の元 (有限要素空間型を持つ変数) の定義

型名 変数名;

例えば

```
Vh u, v;
```

有限要素空間の元は実質的に数ベクトルである (という構造を持っている) から、足したり、実数をかけたりできる。(注: u が有限要素空間の元であるとき、 $u[]$ は配列となる、らしい。)

一方で、有限要素空間の元は、単なる数ベクトルでなく、区分的多項式であり、節点以外での関数値が定義されていて、それが (例えば u が 2 次元の有限要素空間の変数である場合)

$u(x,y)$ のようにして計算できる。

正方形領域での「格子点」上の値を出力

```
mesh Th=square(N,N);
...
fespace Vh(Th,P1);
Vh u;
...
ofstream f("u.dat");
real xi,yj; // x,y だと名前が衝突して警告されるので
real h=1.0/N;
for (int i=0; i<=N; i++) {
    xi=i*h;
    for (int j=0; j<=N; j++) {
        yj=j*h;
        f << u(xi,yj) << " "; // ここに注目
    }
    f << endl;
}
```

x, y という定義済みの名前は、節点の x 座標, y 座標を並べたベクトルになっているので、それを使って関数の値を設定出来る。

```
Vh g = sin(pi*x)+cos(pi*y);
```

メッシュ上の数ベクトルであるから、`plot()` で等高線を描いたり、`int2d()` で数値積分したりも出来る (いずれも後述)。

8 plot()

メッシュを描く

```
Th = buildmesh(...);
...
plot(Th);
```

有限要素空間の元 (メッシュ上の数値ベクトル) の等高線を描く

```
Vh f;
...
plot(f);
```

等高線の高さを指定したい場合は、`viso=` オプションを用いる (等高線の高さを収めた配列の名前を指定する)。

コメントを書きたい場合は `cmm=` オプションを用いる。

```
Vh f;
real [int]level = [0.0]; // 高さ 0 の等高線のみ
real [int]levels = -1.0:0.1:1.0; // -1 から 0.1 刻みで 1 まで
...
plot(f, viso=level, wait=true, cmm="nodal line");
plot(f, viso=levels, value=true, wait=true, cmm="contour lines");
```

$[0, 1] \times [0, 1]$ 上の関数 $x^2 - y^2$ を描く

```
mesh Th=square(20,20);
plot(Th,wait=1);
fespace Vh(Th,P1);
Vh u=x*x-y*y;
plot (u,wait=1);
```

wait= で一時停止するかどうかをコントロール

```
debug=true; // debug=1; でも可
...
plot(f,wait=debug)
```

ps=ファイル名 で描画と同時に PostScript ファイルも出力

```
plot(f,ps="graph.eps");
```

,dim=3 で 3次元の鳥瞰図表示

```
plot(f,dim=3);
```

,fill=true で色を塗る

```
plot(f,fill=true);
```

関数のレベル 0 の等高線を描きたいのに、なぜか等高線が見えなくなるケースに遭遇した。
0 の近くのレベルの範囲 $[-w, w]$ を塗りつぶすことで安直に回避した。

```
real haba=0.0001;
real [int] viso=(-haba:haba:haba);
plot(u,viso=viso,fill=true,greyscale=true);
```

8.1 キーボードからのコマンド

+	ズーム (イン) する
-	ズームアウトする
=	ズームの状態を元に戻す
c	ベクトルの矢印の大きさを短くする
C	ベクトルの矢印の大きさを長くする
r	リフレッシュする
f	カラーを塗りつぶすかどうか
v	
?	help
[Enter]	次のプロットへ
[ESC]	グラフィックスを閉じる

8.2 グラフの鳥瞰図が描きたい場合

,dim=3 という手もあるけれど…以前は、数値データをファイルに出力して、gnuplot で描画する方法が勧められていた。

gnuplot の使い方を説明する文書に書いた、「有限要素法で解いた Poisson 方程式の境界値問題の解の可視化」⁴

medit という可視化ソフトがあるということだが、マニュアルの通りにしても動かない。

```
load "medit"
mesh Th=squqre(10,10,[2*x-1,2*y-1]);
fespace Vh(Th,P1);
Vh u=2-x*x-y*y;
medit("mm",u);
```

8.3 おまけ: 1 変数関数のグラフ

```
real[int] x(0.0:0.01:1.0);
real[int] y=x.*x;
plot([x,y],aspectratio=true);
```

8.4 plot() のオプション

マニュアルの 7.1 節から。

- wait= 描画後に待つかどうか
- nbiso= 等高線の個数
- nbarrow= 等高線の色数の個数
- viso= 等高線のレベル (配列)

⁴<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/howto/intro-gnuplot/node9.html>

- fill= 塗るかどう (線だけの等高線か、等高線と等高線の間を塗りつぶすか)
- value= 等高線の高さの凡例を表示するかどう
- cmm= ウィンドウに文字列を書き込む
- bw= モノクロ (白黒) にする。
- grey= グレースケールにする。
- boundary= 境界を描くかどうか
- dim= 2 または 3 (デフォルトは 2)
- bb= BoundingBox [[x1,y1],[x2,y2]]
- ps= 出力する PostScript ファイルの名前
- coef= 矢印の大きさ

9 int2d()(), int1d(),()

10 弱形式を定義して解く

10.1 solve, problem

一度解けば良い定常問題などは solve() で弱形式を定義すると同時に解いてしまえば良い。

poisson1.edp — solve で定義すると同時に解いてしまう

```
// poisson1.edp
// Freefem++ poisson1.edp
border C(t=0,2*pi) {x=cos(t); y=sin(t);}
mesh Th = buildmesh(C(50));
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
func f=x*y;
solve Poisson(u,v,solver=LU) =
  int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)) - int2d(Th)(f*v) + on(C,u=0);
plot(u);
```

problem で定義しておいて、後で呼び出して解くことも出来る。文法は solve とほとんど同じである。

poisson2.edp — problem で定義しておいて、後から呼び出して解く

```
// poisson2.edp
// Freefem++ poisson1.edp
border C(t=0,2*pi) {x=cos(t); y=sin(t);}
mesh Th = buildmesh(C(50));
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
func f=x*y;
problem Poisson(u,v,solver=LU) =
  int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)) - int2d(Th)(f*v) + on(C,u=0);
Poisson;
plot(u);
```

熱方程式を解く場合などは、何度も弱形式を解く必要があるので、problem の利用は有効である。各ステップで解く連立1次方程式の係数行列は共通であるので、LU分解は一度だけやっておけば良い。次の例では、init=i によって、そのあたりを制御している(iが0のときだけ init が false になり、そうでないとき init は true である。init は「初期化済み」を意味するのでしょう。)

heat.edp — problem で定義しておいて…

```
// heat.edp --- 正方形領域で熱方程式  $u_t = u_{xx} + u_{yy} + f$  を解く
int i,m=100;
real Tmax=1, tau=0.01, t;
func f=1;
func g1=0;
func g2=0;
func u0=sin(pi*x)*sin(pi*y);
mesh Th=square(m,m);
plot(Th,wait=true);
fespace Vh(Th,P1);
//
Vh u=u0,up,v;
problem heat(u,v,solver=UMFPACK,init=i)=
  int2d(Th)(u*v/tau+dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
  -int2d(Th)(f*v)
  -int1d(Th,2,3)(g2*v)
  -int2d(Th)(up*v/tau)
  +on(1,4,u=g1);
for (i=0; i < Tmax/tau; i++) {
  up=u;
  t=(i+1)*tau;
  heat;
  // plot(u,cmm="t="+t,wait=0,ps="heat"+i+".ps");
  plot(u,cmm="t="+t,wait=0);
}
plot(u,cmm="t="+t,wait=1,ps="heat.ps");
```


10.2 varf, matrix を用いて、連立1次方程式を作って解く

solve, problem を使うと、連立1次方程式 $Au = f$ が「見えない」けれど、以下のようにして varf を用いると係数行列 A 、右辺の既知ベクトル f が得られる。そうするのがお勧めなのだそうだ。

(おまけ: この辺の説明を読んでいて、ようやく固有値問題を解くコードが理解出来るようになった。)

```
poisson3.edp
// poisson2.edp
// Freefem++ poisson2.edp
border C(t=0,2*pi) {x=cos(t); y=sin(t);}
mesh Th = buildmesh(C(50));
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
func f=x*y;

varf a(u,v)= int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)) + on(C,u=0);
matrix A=a(Vh,Vh);

varf L(unused,v) = int2d(Th)(f*v) + on(C,unused=0);
Vh F; F[] = L(0,Vh);

u[]=A^-1*F[];

plot(u);
```

このプログラムでは F は V_h の元としたが、次のように配列にしても良い。

```
real [int] F=L(0,Vh);
u[] = A^-1 * F;
```

連立1次方程式のソルバーとしては、次のようなものがある、とのことであるが、普通は UMFPACK を使うのだそうだ。どういように使い分けるのかは、良く知らない(個々の用語は良く使われるものなので、一応は意味が分かるのだけれど、実際にどういう条件の下でどちらを選ぶかの判断が出来ない)。

solver=		対象とする行列
UMFPACK	multi-frontal LU	疎
CG	CG 法	疎, 正値対称
LU		skyline, 非対称
Crout	Crout 法	skyline, 対称
Cholesky	Cholesky 法	skyline, 対称, 正値
GMRES	GMRES 法	疎
sparsesolver		疎

反復法では、 $\text{eps}=\varepsilon$ で停止則を指定する。 $\varepsilon > 0$ のときは

$$\|Ax - b\| < \frac{\varepsilon}{\|Ax_0 - b\|}$$

$\varepsilon < 0$ のときは

$$\|Ax - b\| < |\varepsilon|.$$

11 convect()

(準備中)

```
border C(t=0, 2*pi) { x=cos(t); y=sin(t); }
mesh Th = buildmesh(C(100));
fespace Uh(Th,P1);
Uh cold, c = exp(-10*((x-0.3)^2+(y-0.3)^2));
real dt = 0.17,t=0;
Uh u1 = y, u2 = -x;
for (int m=0; m<2*pi/dt ; m++) {
  t += dt;
  cold=c;
  c=convect([u1,u2],-dt,cold);
  plot(c,cmm=" t="+t + ", min=" + c[].min + ", max=" + c[].max, dim=3);
}
```

12 ファイル入出力 ofstream(), ifstream()

マニュアルの §4.11 に詳しい説明があるが、非常に簡単である (嬉しい)。

- ofstream 変数名 (ファイル名文字列);
- ofstream 変数名 (ファイル名文字列, append);
- ifstream 変数名 (ファイル名文字列);

マニュアルの例では、カッコ { } でくくってブロックを作って、その中で変数を宣言している。ブロックを抜けるときにファイルがクローズされるということである (出力の場合は、書き出しが完了するわけだ)。なるほどとは思うけれど、気付かない人が多いんじゃないかな。まあ、プログラムが終了時にクローズされるんだろうけど。

プログラム例: BiharmonicEigenvalues4.edp

```
// BiharmonicEigenvalues4.edp
// 2012/8/2

load "Morley"
verbosity=1;
int i,NN;

cout << "input N: ";
cin >> NN;
cout << "N=" << NN << endl;

real sigma=0.3;
mesh Th=square(NN,NN);
fespace Vh(Th, P2Morley);
Vh [u,ux,uy], [v,vx,vy];

macro lap2(u,v) ((dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v))) // EOM
varf aa([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)
  (lap2(u,v)-(1-sigma)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v)));

varf bb([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v);

matrix A=aa(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
matrix B=bb(Vh,Vh,solver=UMFPACK);

int nev=40;
real[int] ev(nev); // Stockage des valeurs propres
Vh[int] [eVu,eVux,eVuy](nev); // Stockage des vecteurs propres

int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eVu,tol=1e-10,maxit=0,ncv=0);

{
  ofstream f("BiharmonicEigenvalues-" + NN + ".txt");
  f.precision(15);
  for (i = 0; i < nev; i++) {
    f << ev[i] << endl;
  }
}

for (i=0;i<nev;i++) {
  cout << ev[i] << endl;
  // plot(eVu[i], [eVux[i],eVuy[i]],nbiso=64,fill=true,wait=true);
  plot(eVu[i],nbiso=64,fill=true,wait=true);
}
```

この例では `f.precision(15);` で表示桁数を指定している。

`f.scientific;`, `f.fixed;`, `f.showbase;`, `f.noshowbase;`, `f.showpos;`, `f.noshowpos;`, `f.default;` などが使える (C++ を知っていれば意味は想像出来るであろう)。

12.1 有限要素空間の元 (変数) の内容の入出力

有限要素空間 `Vh` の変数 `u` に記録されているデータをファイル (ファイル名を “`u.dat`” とする) に出力するには、

```

mesh Th;
...
fespace Vh(Th, 何か);
Vh u;
...
savemesh(Th, "Th.msh");
ofstream f("u.dat");
...
f << u[];

```

とする。メッシュデータ Th も保存しておくことを忘れずに。
読むときは

```

mesh Th=readmesh("Th.msh");
fespace Vh(Th, 何か);
Vh u;
ifstream f("output.dat");
f >> u[];

```

とすれば良い。

```

// 境界の定義 (単位円), いわゆる正の向き
border Gamma(t=0,2*pi) { x=cos(t); y=sin(t); }
// 三角形要素分割を生成 (境界を 50 に分割)
mesh Th = buildmesh(Gamma(50));
savemesh(Th, "poisson.msh");
plot(Th, wait=1, ps="poisson-mesh.eps");
// 有限要素空間は P1 (区分的 1 次多項式) 要素
fespace Vh(Th, P1);
Vh u, v;
// Poisson 方程式  $-\Delta u=f$  の右辺
func f = x*y;
// 現在時刻をメモ
real start = clock();
// 問題を解く
solve Poisson(u, v)
  = int2d(Th) (dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))-int2d(Th) (f*v)
  +on(Gamma, u=0);
// 可視化
plot(u, ps="poisson.eps");

ofstream f("poisson.dat");
f << u[];
// 計算時間を表示
cout << " CPU time= " << clock() - start << endl;

```

```

mesh Th=readmesh("poisson.msh");
fespace Vh(Th,P1);
Vh u;

ifstream f("poisson.dat");
f >> u[];

plot(u,ps="poisson2.eps");

```

13 関数定義

```

func real f(real x)
{
  if (x<0.5)
    return x;
  else
    return 1-x;
}

```

14 疑似乱数

メルセンヌツイスター

randinit()

randint32(), randint31(), randreal1(), randreal2(), randreal3(), randres53()

15 ARGV

C や C++ を知っていると使いたくなる `argc`, `argv[]` に相当する ARGV がある。

ARGV.n が `argc` の代わりになる。また、ARGV[] が `argv[]` の代わりになる。ただし ARGV[0] は FreeFem++ プログラムを実行しているプログラムの名前 (FreeFem++ であることが多い)。

mytest.edp

```

int i;
for (i=0; i< ARGV.n; i++)
  cout << i << " " << ARGV[i] << endl;

```

というプログラム mytest.edp があるとき

```
[katsurada-no-MacBook-Air:~/work] mk% FreeFem++ mytest.edp two 3 yon
```

とすると

```
0 FreeFem++
1 mytest.edp
2 two
3 3
4 yon
```

という出力を得る。

$\text{ARGV}[n]$ は string であるが、数値に変換するには、 $\text{atoi}()$, $\text{atof}()$ を使えば良い。

```
int n;
real mu;
n = atoi(ARGV[2]);
mu = atof(ARGV[2]);
```

オプション -某 何とかの解析は $\text{getARGV}()$ で出来る。

```
include "getARGV.idp";
...
int n=getARGV("-n", 10);
```

つまり $-n\ 20$ のような指定が出来て、変数 n に代入が出来る。指定が無かった場合は 10 がデフォルト値として変数 n に代入される。

16 菊地 [3] の Poisson 方程式の例題を解く

菊地 [3] に載っている Poisson 方程式の例題

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \\ (2) \quad & u = g_1 \quad \text{in } \Gamma_1, \\ (3) \quad & \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad \text{in } \Gamma_2 \end{aligned}$$

(ただし、 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\} \times (0, 1] \cup (0, 1] \times \{1\}$, $f = 1$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$) を FreeFem++ を用いて解くとどうなるか。

kikuchi-poisson.edp

```
// kikuchi-poisson.edp
int Gamma1=1, Gamma2=2;
border Gamma10(t=0,1) { x=0; y=1-t; label=Gamma1; }
border Gamma11(t=0,1) { x=t; y=0; label=Gamma1; }
border Gamma20(t=0,1) { x=1; y=t; label=Gamma2; }
border Gamma21(t=0,1) { x=1-t; y=1; label=Gamma2; }
int m=10;
mesh Th = buildmesh(Gamma10(m)+Gamma11(m)+Gamma20(m)+Gamma21(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
savemesh(Th, "Th.msh"); // optional
fespace Vh(Th, P1);
Vh u, v;
func f=1;
func g1=0;
func g2=0;
solve Poisson(u, v) =
  int2d(Th) (dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
  -int2d(Th) (f*v)
  -int1d(Th, Gamma2) (g2*v)
  +on(Gamma1, u=g1);
plot(u, ps="contour.eps");
```

問 同じ問題を `square()` を使って解くプログラムを作成せよ (そうすると菊地先生の本と同じ三角形分割になる?)。

A MPI対応バージョン

MacOS X 10.6, 10.7 に対しては、それぞれ

- <http://www.ljll.math.upmc.fr/~hecht/ftp/FF-conf/InstallMac10.6.html>
- <http://www.ljll.math.upmc.fr/~hecht/ftp/FF-conf/InstallMac10.7.html>

にインストール法が書いてある。

余談 2012/10/6, 電通大に Frederic Hecht がやってきて、MPI 対応バージョンの説明&デモをしてくれた。他の人の講演中も MacBook で FreeFem++ のコンパイルをしていた (ちなみに Mac で Windows 用の FreeFem++ をコンパイルしていました)。

B Changelog

遅ればせながら記録を書くことに。

- (2012/7/1) 一念発起マニュアルを読んで言語仕様を調べ始める。
- (2012/7/3) 数理計算特論の授業で解説。その後のこのファイルを作成する。
- (2012/8/2) 修士のゼミでプログラムを作っていて、`ofstream`, `cin`, `f.precision(15)`; 等々、色々細かいことが分かる。とりあえずサンプル・プログラムの形でこの文書に取り込む。
- (2012/11/30) MPI 版についての情報を書く。

- (2012/11/30) 有限要素空間の元を表す変数があるとき、領域内の任意の点における値を補間して計算してくれる (便利です) ことを書き足す。
- (2012/11/30) アクセスフリーな場所に置くことにした。
- (2015/2/14) メッシュの説明を書いていたなかったので、[2] から持って来る (少し加筆)。
- (2015/5/15) string を数値に変換しようとしてはまる。atoi(), atof() があつた。こういうのマニュアルを見ても、ネットを検索しても分からない。どうにかなんないのかな。
- 有限要素空間の変数の入出力。オブジェクト指向は楽だ。

参考文献

- [1] 桂田祐史, ポアソン方程式に対する有限要素法, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/members/fem.pdf> (2001~).
これは菊地 [3] の読書ノートの性格が強いので、一般公開はしていません。
- [2] 桂田祐史, FreeFem++ の紹介 <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/welcome-to-freefem.pdf> (2007/9/26~, 2012/12/10 公開版作成).
- [3] 菊地文雄, 有限要素法概説, サイエンス社 (1980, 新訂版 1999).
- [4] 大塚 厚二, 高石 武史, 有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++ 数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014).