

COVID-19の実効再生産数の簡易推定方法

桂田 祐史

2022年5月3日, 2022年5月6日

1 はじめに

ネットで(「COVID」も「コロナ」も省略して)“実効再生産数 計算”として検索すると、国立感染症研究所のメンバーが中心となって書かれた高・有馬・鈴木・島田・古瀬・中島 [1] がヒットする。

一方、「東洋経済 ONLINE 新型コロナウイルス 国内感染の状況」¹の「よくあるご質問」には、西浦博の提案したとされる計算法が紹介されている。

この文書では、この2つの方法について説明する。

1.1 予備知識の確認

1.1.1 新規感染者数の変化の仕方 (指数関数的増加)

しばしば「感染者数は指数関数的に増加する」と言われる。実際、感染者数が急激に増えているときは、新規感染者数 (検査で陽性になった人の数) が1週間で2倍とか、2日で2倍とか、の倍々ゲームで増えていくことがおなじみである。

このことは感染症の数理モデルの解についても、一定の条件下で成り立つことが確認できる。

指数関数 $y = a^x$ は、現在では高校の数学IIで学ぶ事項であるが(昔は数学Iだった?)、変数である時間 x として、日ごとで考えることにすると、等比数列 (古い言い方をすると幾何級数) ということになる。ある日の数を a とすると、1日後は ar , 2日後は ar^2 , \dots , n 日後には ar^n (r^n は n 個の r をかけた結果という意味) になる、ということである。 r のことを公比と呼ぶ。

1.1.2 用語

incubation period (潜伏期間) 感染してから発病するまでに要する時間

serial interval (発病間隔) 感染源の発病から2次感染者の発病までに要する時間

generation time (世代時間) 感染源の感染から2次感染者の感染までに要する時間

世代時間より発病間隔の方が調べやすいので、前者が分からないうちは後方で代用することも行われる。

実際には、感染者は約10日間程度、他の人にうつす可能性を持つので、平均的なものを考える必要がある。そこで「平均世代時間」という言葉を使うことになる。

¹<https://toyokeizai.net/sp/visual/tko/covid19/>

単に「世代時間」と呼んで、感染した人はちょうどそれだけの時間が経過したときに、一気に R_t 人の人にうつす、という“単純化”をして議論することが少なくない(というか「簡易推定方法」というのはそういう単純化をしているという意味がある)。

1.1.3 感染症数理モデルとの関係 (知っている人向けの注意)

SIR モデルであれば、 $R_t = \frac{\beta S(t)}{\gamma}$ となる ($t=0$ のとき $S=N$ と仮定すると、基本再生産数 R_0 と一致する— 記号は筋が通っている)。

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = (R_t - 1)\gamma I$$

であるので、時刻 t から短い時間 h の間は (R_t が定数とみなして微分方程式を解いて)

$$I(t+h) \doteq I(t)e^{(R_t-1)\gamma h}.$$

$I(t)$ は時刻 t における感染者の総数であるが、この文書では新規感染者数を扱うことが多く、それは $I(t)$ とは異なることに注意が必要である。

例えば、時間が平均世代時間 μ だけ経過すると、新規感染者数は R_t 倍になるが、感染者の総数 I は $e^{(R_t-1)\gamma\mu} = e^{R_t-1}$ 倍になる ($\because \gamma = \frac{1}{\mu}$)。

2 国立感染症研究所の簡易実効再生産数推定方法

実効再生産数は「(ある時刻 t における、一定の対策下での)1人の感染者による二次感染者数」と定義される。

とあるが、これは西浦・稲葉 [2] の p. 468 から抜き出したものであろう。もう少し長く引用すると

そこで、効果的再生産数 (Effective reproduction number, R_t) が定義される：これは「(ある時刻 t における、一定の対策下での) 1人の感染者による 2次感染者数」を意味する概念である。重要な R_0 との違いが () 付きで書かれるのは、必ずしも時刻 t の関数ではなく、また必ずしも明白に一定の対策下という外因的な要素を考慮したものでもない、という曖昧な R_t の定義による (むしろ R_0 でないことを意味する場合に R_t が用いられることが多い)。

[2] には、 R_t を求めるために綿密な調査を行った事例も紹介されているが、そのようなことが実行可能なことは稀で、簡易的な計算法の必要性が高い。

[1] では、そのような簡易的な方法を2つ紹介している。

(a) ドイツのロベルト・コッホ研究所 (Robert Koch Institut) が用いている方法 ([3])

$$R_t = \frac{\text{その日の新規陽性者数}}{\text{世代時間前の新規陽性者数}}$$

(彼らは世代時間を4日と考えているので、分母は「4日前の新規陽性者数」になる。)

(b) Bonifazi ら ([4]) の推奨する方法

$$R_t = \frac{\text{その日の直近7日間の新規陽性者数}}{\text{世代時間前の日の直近7日間の新規陽性者数}}$$

(週末の検査数の減少など週内変動を考慮した(よくある「移動平均」と似た考え方)。世代時間を4日とすると、分母は「4日前~10日前の新規陽性者数」となる。)

[1] では、この Bonifazi の方法を「簡易 R_t 推定法」と呼び、世代時間を 3,4,5,6,7 日として計算した結果を、より精密な方法 (Cori et. al [5]) で計算した結果と比較することで、その有効性を検証し、世代時間を 5 日とするのが優れている、と結論した。

その方法では、例えば 4 月 15 日の実効再生産数 $R_{4月15日}$ は

$$R_{4月15日} = \frac{4月9日\sim 4月15日の新規陽性者数}{4月4日\sim 4月10日の新規陽性者数}$$

として計算する。

世代時間がコッホ研究所の採用した 4 日でなく、5 日が良いというのは、(武漢株で) 世代時間は分からないが、発病間隔は 4.8 日と推定されるので、それで代用しよう、という西浦博の提案とも合致するので、うなずける。

もっとも、世代時間は 5 日とするのが良いというのは、2021 年中頃までに通用した話で、オミクロン株が優占している最近では 2 日とするべきであろう。

3 西浦博提案(?)の方法

東洋経済オンライン (<https://toyokeizai.net/sp/visual/tko/covid19/>) から引用する。

Q. 実効再生産数とは何ですか？

A. 「1 人の感染者が平均して何人に感染させるか」を示す指標です。この数字が高いほど感染が急速に拡大していることを意味し、逆に 1 未満の期間が続けば「感染が収束しつつある」といえます。計算式は「(直近 7 日間の新規陽性者数 / その前 7 日間の新規陽性者数) ^ (平均世代時間 / 報告間隔)」です。平均世代時間は 2 日、報告間隔は 7 日と仮定しています (2021 年 12 月 31 日以前では平均世代時間を 5 日と仮定)。リアルタイム性を重視して流行動態を把握するため、報告日ベースによる簡易的な計算式を用いています。精密な計算ではないこと、報告の遅れに影響を受けること、陽性者が少ない都道府県では数人の差で大きく実効再生産数に変動する場合がありますことにご注意ください。北海道大学大学院医学研究院・西浦博教授のモデルと監修を基にしています。計算式の詳細は西浦教授の公開する GitHub リポジトリをご覧ください。ただし、たとえば直近 7 日間の新規陽性者が 1 人でも 1 万人でも同じ「実効再生産数 1」となる場合があります。現在の感染状況を把握するには、陽性者数など他の指標もあわせてご確認ください。

2022-2-10 New

2022 年 1 月 1 日からの実効再生産数について、主流となったオミクロン株の状況を反映するため、計算式の「平均世代時間」を従来の 5 日間から 2 日間に変更しました。

ところが西浦博が発表したものを探しても、ピッタリのものは(私には)見つからなかった。

2020/5/12 のニコニコビデオでの西浦の講演 (<https://blog.nicovideo.jp/niconews/132897.html>) で使ったスライド資料 (西浦 [6]) にそれに近い式が出て来るが、これは 2010 年の論文 Nishiura-Chowell-Heesterbeek-Wallinga [7] から“コピペ”したものであろう (スライド資料にその論文があげられていないので、そのことが分かるのに時間がかかった)。

[7] では、報告間隔 Δt が世代時間 μ の n 倍 (n は正の整数) の場合は、

$$R_t = \left(\frac{\text{その報告での新規陽性者数}}{\text{一つ前の報告での新規陽性者数}} \right)^{1/n}$$

で R_t が推定される、 $\Delta t = \mu$ とするのが望ましい、と述べられている。

筆者は、東洋経済 ONLINE の式をはじめて見たときにかなり困惑したのだが(報告間隔というのは7日間とされているようだがなぜ? 毎日報告されているのに。訳が分からない)、[7] を読んで疑問が解消した。[7] では、今回の COVID-19 のように頻繁に(毎日!) 報告が行われることは想定していなくて、例えば平均世代時間が15日程度の感染症で、月ごとに報告された場合のことを論じていたりする(その場合は、 $\mu = 15$, $\Delta t = 30$, $n = 2$ となる)。しかし、[7] の考え方は、毎日新規陽性者数が報告される現在の状況にも、容易に応用できる。

曜日による変動を除去するために、(Bonifazi et. al [4] と同様に考えて) 報告間隔 Δt を7日とみなす。 n は、定義式はこれまで通りの

$$n = \frac{\text{報告間隔}}{\text{平均世代時間}} = \frac{7 \text{ 日}}{5 \text{ 日}} = \frac{7}{5}$$

を採用する。 n の値は整数にはならないが、それは実は問題にならない。

$$(1) \quad R_t = \left(\frac{\text{その日の直近7日間の新規陽性者数}}{\text{7日前の日の直近7日間の新規陽性者数}} \right)^{5/7}$$

とすればよい。この方法では、例えば4月15日の実効再生産数 $R_{4 \text{ 月 } 15 \text{ 日}}$ は

$$R_{4 \text{ 月 } 15 \text{ 日}} = \left(\frac{\text{4月9日~4月15日の新規陽性者数}}{\text{4月2日~4月8日の新規陽性者数}} \right)^{5/7}$$

として計算する。 $\boxed{x^y}$ というキーがついている電卓ならば(Google 電卓にはある)、 $\frac{5}{7}$ 乗 (0.714 乗) を計算することは出来る。

式 (1) の根拠は次にまとめておく。

ノート (指数関数に慣れている人向け) —————

指数関数 $I(t) = Ce^{at}$ と μ が与えられたとき、 $R := \frac{I(t+\mu)}{I(t)} = e^{a\mu}$ の値が知りたいが、 $I(t)$ と $I(t - \Delta t)$ の値が知られている。どうすれば良いか。

$$\frac{I(t)}{I(t - \Delta t)} = \frac{Ce^{at}}{Ce^{a(t-\Delta t)}} = e^{a\Delta t} = e^{a\mu \cdot \frac{\Delta t}{\mu}} = R^{\frac{\Delta t}{\mu}}$$

であるから

$$R = \left(\frac{I(t)}{I(t - \Delta t)} \right)^{\frac{\mu}{\Delta t}}.$$

R を実効再生産数、 $I(t)$ を時刻 t における新規陽性者数、 μ を平均世代時間 (5日あるいは4.8日)、 Δt を“報告の間隔” (7日) とする訳である。

指数関数は知らない人向けの説明

例えば、新規陽性者数が1週間で2倍のペースで増えているときの、実効再生産数はいくつか。実際に報告される新規陽性者数は色々な理由で凸凹だけれど、一定の時間ごとに一定の数をかけるように増える。1日で r 倍になるとすると、1週間で2倍になるのだから

$$r \times r \times r \times r \times r \times r \times r = r^7 = 2.$$

ゆえに r は、2 の 7 乗根 $\sqrt[7]{2}$ (これを $2^{\frac{1}{7}}$ と書く) である。

$$r = \sqrt[7]{2} = 2^{\frac{1}{7}} = 1.10408951367381233764 \dots (\text{無理数なので無限に続く}).$$

実効再生産数 R_t は、世代時間だけ時間が経過すると何倍になるかだから、世代時間が5日の場合は

$$R_t = r \times r \times r \times r \times r = r^5 \doteq 1.64.$$

以上を一つの式で書くと、

$$R_t = 2^{\frac{5}{7}} \doteq 1.64$$

となる。 $\boxed{x^y}$ というキーがついている電卓では、 $2 \boxed{x^y} 0.714$ (0.714 は $\frac{5}{7}$ の近似値) とすれば計算できる。

7日で2倍になるけれど、5日しか経っていないので、2よりも小さい値 1.64 になっている。

オミクロン株の場合は、世代時間が2日とされているので、もし上と同じように1週間で2倍というペースであれば、

$$R_t = r^2 \doteq 1.22.$$

意外と大したことがない、となる。オミクロン株は最初は非常に恐れられたが、それは平均世代時間をそれ以前と同じ5日と見積もって R_t を計算したからである。

参考文献

- [1] 高勇羅, 有馬雄三, 鈴木基, 島田智恵, 古瀬祐気, 中島一敏: COVID-19 感染報告者数に基づく簡易実効再生産数推定方法, Infectious Agents Surveillance Report (病原微生物検出情報, IASR), Vol. 42, No. 6, pp. 128–129 (2021/6/29), <https://www.niid.go.jp/niid/ja/2019-ncov/2502-idsc/iasr-in/10465-496d04.html>.
- [2] 西浦博, 稲葉寿: 感染症流行の予測: 感染症数理モデルにおける定量的課題, 統計数理, Vol. 54, No. 2, pp. 461–480 (2006), <https://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/54-2-461.pdf>.
- [3] Institut, R. K.: Erläuterung der Schätzung der zeitlich variierenden Reproduktionszahl R_t , https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Projekte_RKI/R-Wert-Erlaeuterung.pdf?__blob=publicationFile (2020/5/15).
- [4] Bonifazi, G., Lista, L., Menasce, D., Pedrini, M. M. D., Spighi, R. and Zoccoli, A.: A simplified estimate of the effective reproduction number R_t using its relation with the doubling time and application to Italian COVID-19 data, *The European Physical Journal Plus*, Vol. 136, No. 4, pp. 1–14 (2021), <https://link.springer.com/content/pdf/10.1140/epjp/s13360-021-01339-6.pdf>.

- [5] Cori, A., Ferguson, N. M., Fraser, C. and Cauchemez, S.: A New Framework and Software to Estimate Time-Varying Reproduction Numbers During Epidemics, *American Journal of Epidemiology*, Vol. 178, No. 9, pp. 1505–1512 (2013), <https://academic.oup.com/aje/article/178/9/1505/89262>.
- [6] 西浦博:実効再生産数とその周辺, https://github.com/contactmodel/COVID19-Japan-Reff/blob/master/nishiura_Rt%E4%BC%9A%E8%AD%B0_12May2020.pdf. 2020/5/12 のニコニコビデオでの講演で使ったスライド (2020/5/12).
- [7] Nishiura, H., Chowell, G., Heesterbeek, H. and Wallinga, J.: The ideal reporting interval for an epidemic to objectively interpret the epidemiological time course, *Journal of the Royal Society Interface*, Vol. 7, pp. 297–307 (2010).