等角写像

桂田 祐史

2005 年月日

「Joukovski 変換」という文書もあって、そのうちにマージする。

1　記号・用語

$\mathbf{C}$ に ∞ を合わせたものを拡大複素平面と呼び、$\widehat{\mathbf{C}}$ で表す。

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

($P^1(\mathbf{C})$ と書いたりする人もいるけれど、なんかペダンティック風で嫌だ。)

辻・小松 [1] では、単に複素平面と呼ぶと冒頭で宣言している。途中で密輸入して、混乱を引き起こしかねない本よりはいさぎが良くて好感が持てるが、私は踏ん切りが着かないので、$\mathbf{C}$ を複素平面、$\widehat{\mathbf{C}}$ を「拡大複素平面」と呼ぶことにしておく。

2　等角写像

2.1　より道

等角写像とは、広義には 2 次元領域から 2 次元領域への写像で、任意の点で角を保つもののことをいう。例えば

> 地図投影法 (球面である地球表面を平面上に映して「地図」を作る方法) のうち等角写像であるものが正角 (conformal) 図法と呼ばれる。

経度 (longitude) を λ, 緯度 (latitude) を ϕ と書くとき、$(\phi, \lambda) \mapsto (x, y)$ が等角であるためには、

$$\exists a > 0, \exists \theta \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} x_\phi & \dfrac{1}{\cos\phi} x_\lambda \\ y_\phi & \dfrac{1}{\cos\phi} y_\lambda \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

が必要十分条件だとか。これはウィキペディアに書いてあったことだけれど、ヤコビ行列が矛盾していたりして、これが本当に正しいかはわからない (経度が増加する方向と緯度が増加する方向が正の向きになるには、(ϕ, λ) でなくて、(λ, ϕ) とすべきのような気がする…)。一度まともな本をみないと。後、a の符号についても明言していない。負にすると裏返しを許容することになるけれど、それは排除しているような気がする。相変わらず脇がゆるゆるですね。

2.2　関数論で

$\mathbf{C}$ 内の領域 D, Δ との間の全単射 $f\colon D \to \Delta$ で、$u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ が全微分可能であるとする。D 内の点 z_0 に対して、z_0 を通る任意の滑らかな二つの曲線のなす角が、f で保たれるならば、f は z_0 で等角であるという。

命題 2.1 f が z_0 で正則で、$f'(z_0) \neq 0$ ならば、$w = f(z)$ は z_0 で等角である。

命題 2.2 全単射かつ全微分可能な関数 f が z_0 の近傍で等角ならば、f は z_0 で正則で $f'(z_0) \neq 0$.

関数論としては正則関数しか考えないので、等角というのは $f' \neq 0$ を満たすことと定義するのが普通である。

2.3　いわゆる「等角写像」とは

我々が今後、次に述べる双正則な関数を考察の対象とするが、それを単に等角写像と呼んですませている人が多い。そのことについて考察してみる。

等角写像は単射ではないが (例: $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$)、単射な正則関数 (単葉関数というのかな) は等角であり、実は双正則である。単射という条件をつねに付けるようにしとけ、というのが結論である。

定義 2.3 (双正則) U, V を $\mathbf{C}$ 内の (空でない) 領域とする。$f\colon U \to V$ が双正則であるとは、f が全単射かつ、f と f^{-1} がともに正則であることをいう。

補題 2.4 (f が双正則ならば f も f^{-1} も等角) U, V を $\mathbf{C}$ 内の (空でない) 領域とする。$f\colon U \to V$ が双正則ならば、f も f^{-1} も等角である。

証明 f^{-1} を g と書くことにする。$\forall z \in U$ に対して、$g(f(z)) = z$ であるから、$g'(f(z))f'(z) = 1$. 特に $f'(z) \neq 0$, $g'(f(z)) \neq 0$. ■

補題 2.5 (単射な正則関数は双正則) Ω は $\mathbf{C}$ の領域で、$f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ は正則するとき、以下の (1), (2) が成り立つ。

(1) f が定数関数でなければ、$f(\Omega)$ は $\mathbf{C}$ の領域である。

(2) f が単射であれば、$f' \neq 0$ in Ω, $f^{-1}\colon f(\Omega) \to \Omega$ は正則である。言い換えると、正則関数は単射ならば、等角写像であり、その逆関数も正則である。

証明

(1) 領域とは連結な開集合のことであるから、Ω は連結かつ開集合である。

「連結空間の連続写像による像は連結空間である」という定理によって、$f(\Omega)$ は連結である。

f が正則であることから、$\forall c \in \Omega$, $\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n \quad (|z-c| < \varepsilon).$$

$\forall m \in \mathbf{N}$ $f^{(m)}(c) = 0$ であれば f は定数関数となるので、$\exists m \in \mathbf{N}$ s.t. $f^{(n)}(c) = 0$ $(1 \leq n \leq m-1)$, $f^{(m)}(c) \neq 0$. このとき

$$f(z) - f(c) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n = (z-c)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(m+k)}(c)}{(m+k)!}(z-c)^k.$$

(2) f が単射であれば、(1) の証明中の m は 1 でなければならない。ゆえに $f' \neq 0$ in Ω. 逆関数定理から、$f(\Omega)$ の各点の近傍で、局所的で正則な逆関数があることが分かるが、それは全体での逆関数 f^{-1} の制限である。ゆえに f^{-1} は各点で微分可能であることが分かる。 ■

定理 2.6 単射な正則関数 f は双正則で、f と f^{-1} ともに等角写像である。

Riemann の写像定理を、「$\Omega \subsetneqq \mathbf{C}$ が単連結な領域ならば、Ω を単位円盤 $D := \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$ に写す等角写像 φ が存在する」と言う人がいて、一見単射性を主張していないような気がするが (全射性の方は「に」という助詞が $\varphi(\Omega) = D$ という気分を醸している？)、「領域を領域に写す」というときは全単射であることを含めることにする、という暗黙のルールを適用するのだそうだ (小平邦彦「複素解析」に明記されている。そういうルールを書かない本が多い中で、小平先生が書いてあるのはさすがだと思うけれど、前時代的な気がする)。

3 1次分数変換

単位円盤 D, 上半平面 H を次のように定義する。

$$D := \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}, \quad C := \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}, \quad H := \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > 0\}.$$

3.1 定義

$ad - bc \neq 0$ を満たす $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ を用いて

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

と表せる写像 $f\colon \mathbf{C} \cup \{\infty\} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を 1 次分数変換と呼ぶ。

3.1.1

任意の 1 次分数変換 φ は、任意の広義の円 C_1 を広義の円 C_2 に写す。また z_1 と z_2 が C_1 に関して互いに鏡像の位置にあるならば、$w_1 = \varphi(z_1)$ と $w_2 = \varphi(z_2)$ は C_2 に関して互いに鏡像の位置にある。

1 次分数変換は、

3.2 非調和比と 1 次分数変換

相異なる $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ に対して、α, β, γ をそれぞれ $1, 0, \infty$ に写す 1 次分数変換 $\varphi(z;\alpha,\beta,\gamma)$ が存在する。具体的に式で書くと[1]

$$\varphi(z;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{z-\beta}{z-\gamma} \cdot \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}.$$

これを z, α, β, γ の**非調和比** (複比, cross ratio) と呼び、(z,α,β,γ) と表す:

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{z-\beta}{z-\gamma} \cdot \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}.$$

3.2.1 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換

z 平面上の相異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 を、w 平面上の相異なる 3 点 w_1, w_2, w_3 に写す 1 次分数変換は

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

で与えられる。

($\varphi(w;w_1,w_2,w_3) = \varphi(z;z_1,z_2,z_3)$ と書いてから、少し考えると分かる。$w = \varphi^{-1}(\cdot;w_1,w_2,w_3) \circ \varphi(\cdot;z_1,z_2,z_3)(z)$ ということですね。私に関数論を教えてくれた演習担当の某先生は、非調和比という言葉を使わずに、与えられた 3 点を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換というので通しました。なるほどなあ、という感じです。)

3.3 単位円盤を単位円盤に写す 1 次分数変換

$z_0, \varepsilon \in \mathbf{C}$, $|z_0| < 1$, $|\varepsilon| = 1$ を満たす z_0, ε に対して

$$f(z) = \varepsilon \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$$

は D を D に、C を C に、$\{z; |z| > 1\}$ を $\{w; |w| > 1\}$ に写す。

実はこの逆が成立する。

[1] これは目で見ながら書き下ろせる。β を 0 に写すには、$z-\beta$ が因数にあれば良い。γ を ∞ に移すには、分母に $z-\gamma$ という因子があれば良い。後は α を 1 に写すように定数因子の調節をする。

3.4 上半平面を単位円盤に写す 1 次分数変換

$\varphi\colon H \to D$ が双正則ならば、$\exists \alpha, c \in \mathbf{C}$ s.t.

$$\operatorname{Im}\alpha > 0, \quad |c| = 1, \tag{1}$$

$$\varphi(z) = c\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \quad (z \in H). \tag{2}$$

0 に写る点を α とすると、$\overline{\alpha}$ は ∞ に写る。また 1 に写る点は上半平面の境界、すなわち実軸上に存在するので、それを t とすると、

$$w = \frac{t-\overline{\alpha}}{t-\alpha} \cdot \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} = c\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}, \quad c := \frac{\overline{t-\alpha}}{t-\alpha}.$$

$|c| = 1$ であることは明らかである。

余談: Cayley 変換

4 $w = z + 1/z$

5 $w = \exp z$

6 初等関数

7 Riemann の写像定理

定理 7.1 (Riemann の写像定理) Ω を $\mathbf{C}$ の領域で、単連結かつ $\mathbf{C}$ とは異なるものとする。このとき、Ω を単位円盤 D に写す双正則な関数 $\varphi\colon \Omega \to D$ が存在する。

命題 7.2 複素平面 $\mathbf{C}$ を単位円盤 $D = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$ に写す双正則写像 $\varphi\colon \mathbf{C} \to D$ は存在しない。

証明 そのような φ が存在したとすると、φ は $\mathbf{C}$ で正則であり、$|\varphi(z)| < 1$ $(z \in \mathbf{C})$ であることから有界である。Liouville の定理から φ は定数関数であるが、これは双正則ではない (単射でもないし、全射でもない)。ゆえに条件を満たす φ は存在しない。 ■

命題 7.3 複素平面内の任意の単連結領域 Ω は、単位円盤 D と同相である。

証明 $\Omega \subsetneqq \mathbf{C}$ であれば、Riemann の写像定理から、Ω を D に写す双正則関数が存在するので、Ω と D は同相である。$\Omega = \mathbf{C}$ のとき、

$$\varphi(re^{i\theta}) = \tan\frac{\pi r}{2} e^{i\theta} \quad (r \in [0,1),\, \theta \in \mathbf{R})$$

と定めれば、$\varphi\colon D \to \Omega$ は同相写像であるので、Ω と D は同相である。 ■

定理 7.4 (Carathéodory の定理)

8 具体的な等角写像

参考文献

[1] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、祐乗坊瑞満、 水本久夫。