

クラドニ図形の数值解析

明治大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻

小釜 燈台

指導教員 桂田祐史 准教授

2013 年 2 月 22 日

目次

第 1 章 序論	2
第 2 章 板の振動の方程式	4
2.1 板の微小振動の運動方程式	4
2.1.1 単位の変換による無次元化	4
2.1.2 境界条件	5
2.2 固有値問題の方程式	6
第 3 章 有限要素法	7
3.1 固有値問題の変分法的定式化	7
3.2 弱形式の導出	7
第 4 章 円形膜、円形板のクラドニ図形	9
4.1 円形膜の振動	9
4.1.1 固有値問題	9
4.2 円形板 (clampde edge) のクラドニ図形	11
第 5 章 正方形膜、正方形板のクラドニ図形	14
5.1 準備	14
5.1.1 重複度の定義	14
5.1.2 正方形の合同変換群	14
5.2 Chladni によるクラドニ図形	16
5.3 Waller の実験	18
5.3.1 クラドニ図形からクラスと m, n を求める方法	21
5.4 正方形膜のクラドニ図形	21
5.5 M の性質	27
5.5.1 固有値番号、重複度の表示	27
5.6 棒の固有関数を用いた板の固有関数の近似	28
5.7 差分法による正方形板のクラドニ図形の近似	31
5.7.1 3重根の探索	32

5.7.2	固有値の番号、重複度の表示	34
5.7.3	\mathcal{P} の性質	35
5.8	クラドニ図形の比較	36
第 6 章	数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形	38
6.1	Poisson 比=0 ~ 0.5	38
6.2	Poisson 比=-1.0 ~ 0	58
6.3	長方形領域	78
付 録 A	ソース・プログラム	90
A.1	自由な正方形板の固有値問題の差分法による計算	90
A.1.1	plate_f1.m	90
A.1.2	plot_n.m	92
A.1.3	makedata_free.m	93
A.1.4	dividedata.m	94
A.2	Mathematica	95
A.2.1	tools.nb	95
A.2.2	bar_mem.nb	97
A.2.3	square.nb	98
A.2.4	Laplacian_duplicate_ev.nb	98
A.3	有限要素法プログラム	101
A.3.1	正方形板	101
A.3.2	円形板	102
A.3.3	長方形板	104
付 録 B	正方形膜の重根の探索	106
B.1	差分法による固有値計算	108

第1章 序論

クラドニ図形とは、ドイツの物理学者 Ernst Florens Friedrich Chladni (1756～1827) によって発見されたもので、振動している膜や薄い板の上に砂や塩などの細かい粒子を撒いたとき、振動の節の部分にその粒子が集まって現れる幾何学的な模様のことである。節とは振幅が0のところのことをいう。

本論文はこのクラドニ図形がどのような形をしているかを数学的・数値解析的に調べることを目標にする。クラドニ図形を再現するには、適当な境界条件の下に重調和作用素

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

の固有値問題を解くことになる。自由な縁をもつ板の場合には、 u は次の方程式を満たす(板のしめる平面領域を Ω とする)。

$$(1.1) \quad \Delta^2 u = \lambda u \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(1.2) \quad \mu \Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega),$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega),$$

$$(1.4) \quad \text{領域の角点で } \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n} \text{ の片側極限が等しい。}$$

ここで、 μ は板の材質によって定まる無次元定数で Poisson 比と呼ばれる。 n は境界上の点における外向き単位法線ベクトル、 τ は単位接線ベクトルである。考えている領域 Ω が正方形領域の場合、(1.4) は $u_{xy} = 0$ と同値である。

正方形領域であっても、固有値、固有関数は exact に求まらないので数値計算が必要になる。正方形領域に関しては平野 [3] の差分法プログラムを利用した。本論文では、正方形領域以外のクラドニ図形の解析のため、有限要素法によるプログラムも作成して数値実験を行った。

本論文の具体的な内容としては、以下のものが挙げられる。

1. 正方形領域の場合に Poisson 比を動かしたときの節線パターンの変化の観察

2. 長方形領域のアスペクト比を動かしたときの節線パターンの変化の観察
3. 円形膜・円形板のクラドニ図形
4. 実験物理学者 Waller の論文 [9] に述べられている内容の確認・検討
 - (a) 真鍮板のクラドニ図形の実験の写真、膜の固有関数の節線パターン、棒の固有関数を用いた近似節線パターンと、今回数値計算で得た板の近似固有関数の節線パターン (いずれも正方形の場合) の比較
 - (b) 正方形膜の固有関数の、節線パターンの対称性や固有値の重複度に関する性質の数学的な定式化 (これで Chladni の記号 $m|n$ が理解できるとその証明)
 - (c) 正方形板の固有関数・固有値の性質の数値実験による確認

第2章 板の振動の方程式

2.1 板の微小振動の運動方程式

平面上に置かれた板の微小振動の運動方程式は、次のような2次元の波動方程式で表される。

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) + A \Delta^2 u(x, y, t) = 0, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

ここで、

$$A = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \nu = \rho h.$$

t は時間、 (x, y) は板上の点の位置、 $u(x, y)$ は位置 (x, y) の点の時刻 t における変位である。また、 E はヤング率、 h は板厚、 ρ は密度、 μ は Poisson 比である。ヤング率とは固体を1つの方向に張力を加えて引き伸ばした時の応力とひずみの比であり、Poisson 比とは固体を1つの方向に伸ばした時の縦のひずみと横のひずみの比である。Poisson 比は無次元数であり、一般に $-1 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ 、金属の場合は0.3程度の値をとるとされている。

表2.1に材質におけるヤング率、Poisson 比、密度をまとめた。

2.1.1 単位の変換による無次元化

1辺の長さが L の正方形板あるいは半径が L の円形板の場合、

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}$$

という変数変換によって、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x', y', t) + A' \Delta'^2 u(x', y', t) = 0 \quad ((x', y') \in \Omega, t > 0)$$

表 2.1: ヤング率、Poisson 比、密度の一覧表

材質	ヤング率 (kg/ms ²)	Poisson 比	密度 (g/cm ³)
亜鉛	10.84×10^{10}	0.249	7.14
鉄 (鋼)	$20.1 \sim 21.6 \times 10^{10}$	0.28~0.30	7.87
真鍮	10.06×10^{10}	0.35	8.56
アルミ	68.3×10^9	0.345	2.70
鉛	1.61×10^{10}	0.44	11.34
金	7.80×10^{10}	0.44	19.30

と変換される (ここで Ω は $(0,1) \times (0,1)$ または単位円盤領域).

さらに時刻変数の変更をすることで $A' = 1$ とできる. すなわち

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2}(x', y', t') + \Delta'^2 u(x', y', t') = 0 \quad ((x', y') \in \Omega, t' > 0)$$

に変換できる.

ゆえに最初から

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) + \Delta^2 u(x, y, t) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega, t > 0)$$

を考えれば十分である. 膜の振動の方程式の場合も同様で、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega, t > 0)$$

で十分である.

2.1.2 境界条件

板を枠にはめた場合 (clamped edge という)、境界条件の方程式は

$$(2.1) \quad u(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = 0 \quad ((x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty))$$

となり、これは Dirichlet 境界条件と呼ばれる.

その反対に、板の縁をまったく触れない場合 (free edge, 自由な板、という)、境界条件の方程式は

$$\begin{aligned}\mu\Delta u + (1 - \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} &= 0 \quad (\text{on } \partial\Omega), \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta u + (1 - \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) &= 0 \quad (\text{on } \partial\Omega), \\ \text{領域の角点で } \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n} &\text{の片側極限が等しい}\end{aligned}$$

となる. この論文では、自由な板の振動のみ考えることにする.

2.2 固有値問題の方程式

前節の方程式に対して Fourier の変数分離法を考える.

$$u(x, y, t) = \zeta(x, y)\eta(t)$$

とおく. 自由な板の振動の場合は、ある定数 λ が存在して、次の方程式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\Delta^2 \zeta &= \lambda \zeta \quad \text{in } \Omega, \quad \eta'' = -\lambda \eta \quad (t \in (0, \infty)), \\ \mu\Delta \zeta + (1 - \mu)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} &= 0 \quad (\text{on } \partial\Omega), \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta \zeta + (1 - \mu)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} \right) &= 0 \quad (\text{on } \partial\Omega), \\ \text{領域の角点で } \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} &\text{の片側極限が等しい.}\end{aligned}$$

自由な膜の振動の場合は

$$-\Delta \zeta = \lambda \zeta \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

が導かれる.

第3章 有限要素法

3.1 固有値問題の変分法的定式化

$$(3.1) \quad J[u] := \iint_{\Omega} [(\Delta u)^2 - 2(1 - \mu)(u_{xx}v_{yy} - u_{xy}^2)] dx dy,$$

$$(3.2) \quad K[u] := \iint_{\Omega} u^2 dx dy$$

とおく. $K = 1$ という条件での J の停留問題を考えると (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) が導かれる (Rayleigh [7]). (1.2), (1.3), (1.4) は自然境界条件である.

3.2 弱形式の導出

菊地 [6] を参考に汎関数に対応する弱形式を求める.

$$J[u, v] := \frac{1}{2} \{ J[u + v] - J[u] - J[v] \}$$

とおくと

$$\begin{aligned} J[u, v] &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\{ \Delta(u + v) \}^2 - 2(1 - \mu) \{ (u + v)_{xx}(u + v)_{yy} - (u + v)_{xy}^2 \} \right. \\ &\quad - \{ (\Delta u)^2 - 2(1 - \mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) \} \\ &\quad \left. - \{ (\Delta v)^2 - 2(1 - \mu)(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) \} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[2\Delta u \Delta v - 2(1 - \mu) \{ u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy} \} \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[\Delta u \Delta v - (1 - \mu) \{ u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy} \} \right] dx dy \end{aligned}$$

となる. 同様に

$$K[u, v] := \frac{1}{2} \{ K[u + v] - K[u] - K[v] \}$$

とおくと

$$\begin{aligned} K[u, v] &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{(u+v)^2 - u^2 - v^2\} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} uv dx dy \end{aligned}$$

となる. したがって、弱形式は

$$J[u, v] = \lambda K[u, v] \quad (\forall v)$$

である.

この弱形式を用いた有限要素法のプログラムを作成した (A.3 参照). 有限要素としては Fujino-Morley 要素を採用した. 長方形領域や円盤領域の数値実験を行った.

第4章 円形膜、円形板のクラドニ 図形

この章では簡単のため、Dirichlet 境界条件の場合のみ考える。

4.1 円形膜の振動

平面上におかれた半径 1 の円形膜の微小振動の運動方程式は、次のように表される。

$$(4.1) \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}(x, y, t) = \Delta \gamma \quad ((x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}).$$

ここで t は時刻、 (x, y) は膜上の点位置、 $u(x, y, t)$ は位置 (x, y) の点の時刻 t における変位である。

ここでは Dirichlet 境界条件

$$(4.2) \quad \gamma(x, y, t) = 0 \quad ((x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty))$$

を扱う。

4.1.1 固有値問題

方程式 (4.1), (4.2) から固有値問題

$$(4.3) \quad \begin{cases} -\Delta \gamma = \lambda \gamma & \text{in } \Omega, \\ \gamma = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が導かれる。(4.3) に対して極座標変換 ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) を施すと

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} = -\lambda \gamma, \\ \gamma(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

となる. 更に変数分離 ($\gamma(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$) を考えると

$$\frac{r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

この等式の値は定数であるが、 Θ は周期 2π ということから、

$$\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{s.t.} \quad \frac{r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = n^2.$$

$\Theta'' = -n^2\Theta$ の一般解は、 A, B を任意定数として

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} A \cos n\theta + B \sin n\theta & (n \in \mathbb{N}), \\ A & (n = 0). \end{cases}$$

R についての方程式

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0$$

は変数変換 $\rho = \sqrt{\lambda}r$ によって、

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R = 0.$$

これは Bessel の微分方程式であるから

$$R = C_1 J_n(\rho) + C_2 Y_n(\rho) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

という一般解を持つ. ここで J_n, Y_n はそれぞれ n 次の Bessel 関数、 n 次の Neumann 関数である. 特に $\rho = 0 (\Leftrightarrow r = 0)$ の近傍で有界な R として、

$$R = C J_n(\rho) \quad (C \text{ は任意定数 } J_n \text{ は } n \text{ 次の Bessel 関数}).$$

もとの変数に戻すと

$$R = C J_n(\sqrt{\lambda}r).$$

境界条件 $R(1) = 0$ より

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

ゆえに

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{\lambda} = \mu_{n,m}.$$

ただし $\{\mu_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ は J_n の正の零点を小さい方から順に並べたものである.

$$\mu_{n,1} < \mu_{n,2} < \mu_{n,3} < \cdots < \mu_{n,m} < \mu_{n,m+1} < \cdots \rightarrow \infty.$$

ゆえに

$$R = C J_n(\mu_{n,m} r) \quad (C \text{ は任意定数, } n = 0, 1, \cdots, m = 1, 2, \cdots).$$

固有値、固有関数として以下のものが取れる.

$$\lambda = \lambda_{mn} := \mu_{n,m}^2,$$

$$\gamma(r, \theta) = \gamma_{m,n}(\mu_{mn} r) = J_n(\mu_{n,m} r)(A' \cos n\theta + B' \sin n\theta) \quad (A', B' \text{ は任意定数}).$$

また、 $\{\mu_{nm}\}$ の任意の 2 つは異なる. すなわち

$$(n, m) \neq (n', m') \implies \mu_{nm} \neq \mu_{n'm'}$$

であることが分かっているので (金子 [5]), λ_{nm} も相異なっている. 故に、固有値 $\lambda_{m,n}$ に属する固有関数は $\gamma_{m,n}(r, \theta)$ しかなく、節線は同心円と (角度等間隔の) 放射線からなる.

4.2 円形板 (clampde edge) のクラドニ図形

平面上におかれた縁を固定された (clamped edge) 円形板の微小振動から導かれる固有値問題は次のように表される.

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x, y) = \lambda u(x, y) & \text{in } \Omega, \\ u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

clampde edge の境界条件は、Dirichlet 境界条件である.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 u = \lambda u, \\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sqrt{\lambda} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \sqrt{\lambda} \right) u = 0, \\ & \frac{\left[\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 - \lambda r^4 \right] R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \end{aligned}$$

円形膜の場合と同様に

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad s.t. \quad \Theta'' &= -n^2 \Theta, \\ \Theta &= A \cos n\theta + B \sin n\theta \quad (A, B \text{ は任意定数}). \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 R - (\lambda r^4 + n^2) R = 0.$$

$$(4.5) \quad r^2 R'' + r R' + \left(\sqrt{\lambda} r^2 - n^2 \right) R = 0.$$

$$(4.6) \quad r^2 R'' + r R' - \left(\sqrt{\lambda} r^2 + n^2 \right) R = 0.$$

前者は、円形膜の場合の λ が $\sqrt{\lambda}$ になったもので、本質的に同じものである。 $\sqrt{\sqrt{\lambda}} = \sqrt[4]{\lambda}$ が現れるが、簡単にするために、

$$k := \sqrt[4]{\lambda}$$

とおく。(4.5) の一般解は円形膜の場合と全く同様に

$$R = C J_n(kr) \quad (C \text{ は任意定数}).$$

(4.6) の一般解は

$$R = D I_n(kr) \quad (D \text{ は任意定数})$$

となる。

ここで I_n は n 次の変形 Bessel 関数

$$I_n(z) := i^{-n} J_n(iz)$$

であり (i は虚数単位)、微分方程式 (変形 Bessel の微分方程式と呼ばれる) である。

定理 4.2.1. I_n は

$$u'' + \frac{1}{z} u' - \left(1 + \frac{n^2}{z^2} \right) u = 0$$

の $z = 0$ の近傍で正則な解である。 $z \in \mathbb{R}$ のとき $I_n(z) \in \mathbb{R}$ である。

すなわち (4.4) の一般解は

$$(4.7) \quad R = C J_n(kr) + D I_n(kr) \quad (C, D \text{ は任意定数}).$$

Ditichlet 境界条件 $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (on $\partial\Omega$) であれば

$$R(1) = R'(1) = 0.$$

(4.7) を代入して、

$$(4.8) \quad C J_n(k) + D I_n(k) = 0.$$

$$(4.9) \quad C J'_n(k) + D I'_n(k) = 0.$$

非自明解を持つために

$$J_n(k) I'_n(k) - I_n(k) J'_n(k) = 0.$$

この方程式は可算無限個の正の解を持つ。小さい方から順に番号をつけてそれを k とすると

$$k_{n,1} < k_{n,2} < k_{n,3} < \cdots < k_{n,m} < k_{n,m+1} < \cdots \rightarrow \infty$$

となる。このとき方程式 (4.8), (4.9) は

$$C J_n(k) + D I_n(k) = 0$$

と同値である。 $D = -\frac{J_n(k)}{I_n(k)}C$ であるから、

$$\begin{aligned} R &= C J_n(kr) - \frac{J_n(k)}{I_n(k)} C I_n(kr) \\ &= C' (I_n(k) J_n(kr) - J_n(k) I_n(kr)) \quad (C' \text{ は任意定数}). \end{aligned}$$

固有値と固有関数は

$$\lambda = \lambda_{nm}, \quad u(r, \theta) = \varphi_{nm}(r) (A' \cos n\theta + B' \sin n\theta).$$

ただし $n = 0, 1, 2, \cdots, m = 1, 2, \cdots$ のとき

$$\begin{aligned} \lambda_{nm} &:= k_{nm}^4, \\ \varphi_{nm}(r) &:= I_n(k_{nm}) J_n(k_{nm}r) - J_n(k_{nm}) I_n(k_{nm}r) \end{aligned}$$

である。

第5章 正方形膜、正方形板のクラド二図形

5.1 準備

5.1.1 重複度の定義

X_λ は固有値 λ に属する固有空間とする. 膜の場合

$$X_\lambda = \left\{ \varphi \left| \begin{array}{l} -\Delta\varphi = \lambda\varphi \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{array} \right. \right\},$$

板の場合

$$X_\lambda = \{u \mid \Delta^2 u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u \text{ は (1.2), (1.3), (1.4) を満たす}\}$$

である. このとき $\dim X_\lambda$ を λ の重複度と呼ぶ.

$\dim X_\lambda = 1$ のとき λ は simple な固有値と呼び、 $\dim X_\lambda = 2$ のとき λ は double な固有値であるという. λ が double の場合、 X_λ の任意の正規直交基底 ϕ, ψ に対して

$$X_\lambda = \{a\phi + b\psi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

5.1.2 正方形の合同変換群

節線パターンの対称性を表すのに、合同変換群が役に立つ. 正方形の合同変換群 D_4 は二面体群とも呼ばれよく知られている.

正方形を $[0, 1] \times [0, 1]$ とする. 正方形の中心の回りの角 $\frac{\pi}{2}$ の回転を R 、一つの対角線 $y = x$ に関する鏡映変換を S 、恒等変換を I とすると

$$D_4 = \{I, R, R^2, R^3, S, RS, R^2S, R^3S\}.$$

$(x', y') = R(x, y)$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y + \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y + 1 \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (1 - y, x), \\ R^2(x, y) &= R(1 - y, x) = (1 - x, 1 - y), \\ R^3(x, y) &= R(1 - x, 1 - y) = (y, 1 - x), \\ R^4(x, y) &= R(y, 1 - x) = (x, y). \end{aligned}$$

R^2 は 180° の回転移動、すなわち中心に関する対称移動である。一方

$$S(x, y) = (y, x)$$

であるから

$$\begin{aligned} RS(x, y) &= R(y, x) = (1 - x, y), \\ R^2S(x, y) &= R(1 - x, y) = (1 - y, 1 - x), \\ R^3S(x, y) &= R(1 - y, 1 - x) = (x, 1 - y). \end{aligned}$$

S は $y = x$ に関する鏡映、 RS は $x = \frac{1}{2}$ に関する鏡映、 R^2S は $y = 1 - x$ に関する鏡映、 R^3S は $y = \frac{1}{2}$ に関する鏡映である。

定理 5.1.1. 固有値が simple であるならば節線パターンは D_4 に関して対称である。

証明 5.1.1. 固有値問題の方程式は D_4 の任意の変換に関して不変である. 故に ϕ が固有値 λ に属する固有関数であるとき、 $\psi(x, y) = \phi(Q(x, y))$ ($Q \in D_4$) は固有値 λ に属する固有関数である. 仮定より ψ は ϕ の定数倍であることから、 $\psi = \pm\phi$ である. ϕ と ψ の節線パターンは一致する. したがって節線パターンは D_4 に関する対称性をもつ. \square

逆は必ずしも正しくない. 膜の場合の反例を 2 つ挙げる.

- (1) $\phi(x, y) = \cos 5\pi x \cos 5\pi y$ の節線パターンは、 D_4 に関して対称であるが、固有値 $50\pi^2$ は simple ではない ($\cos 7\pi x \cos \pi y$, $\cos \pi x \cos 7\pi y$ は同じ固有値 $50\pi^2$ に属する固有関数である).
- (2) m, n が共に偶数または奇数のとき、後述する固有関数 $\phi_{m,n}$ と $\psi_{m,n}$ の節線パターンは D_4 に関して対称であるが固有値はともに $(m^2 + n^2)\pi^2$ であり重根である.

板の場合も数値実験で (1) に似たような例が見つまっている (5.7.1 節).

定理の対偶として次の系が得られる.

系 5.1.1. 固有関数が D_4 に関して対称性をもっていなければ固有値は simple でない.

5.2 Chladni によるクラドニ図形

Chladni は木の板で実験を行い、節線パターンのスケッチを著書 ([1], [2]) に掲載した. さらに自身の耳で音の高さを聴き取って記録している (音の高さは固有値の平方根に相当することに注意). Chladni は音の高さを節線パターンの類別にも利用している. クラドニの記号 $m|n$, $\overline{m|n}$, $\underline{m|n}$ などの記号を導入して、節線パターンを区別した.

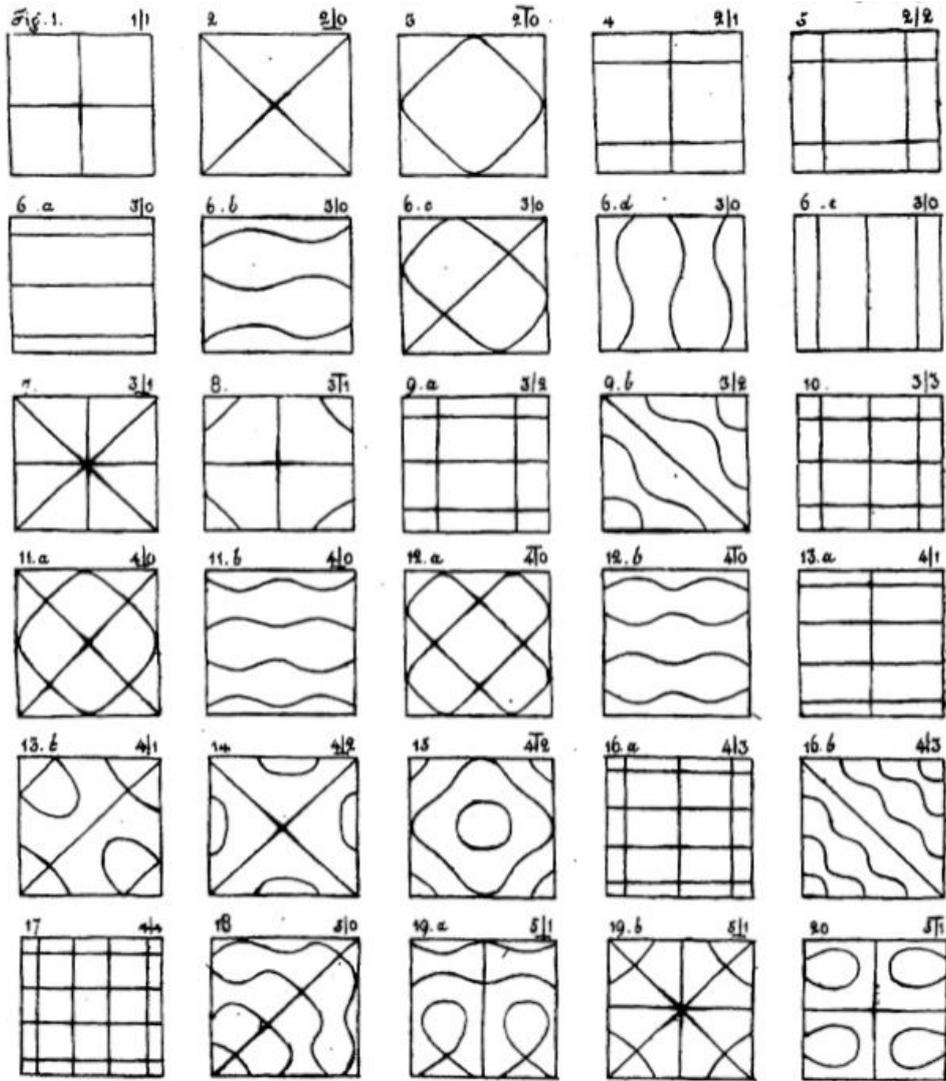


図 5.1: Chladni による節線パターンのスケッチ (Chladni [2])

5.3 Waller の実験

Waller は真鍮 (Poisson 比 = 0.35) 等の金属の板で実験を行った (Waller [9]). クラドニの記号 $m|n$, $\overline{m|n}$, $\underline{m|n}$ に対応するものを $m|n$, $\overline{m|n+}$, $m|n-$ と表した ($\overline{m|n+}$, $m|n-$ は、後述する $\psi_{m,n}$, $\phi_{m,n}$ や, Chladni の記号 $\overline{m|n}$, $\underline{m|n}$ と対応する). Waller はこの記号に従ってクラドニ図形を図 5.2 のように並べた.

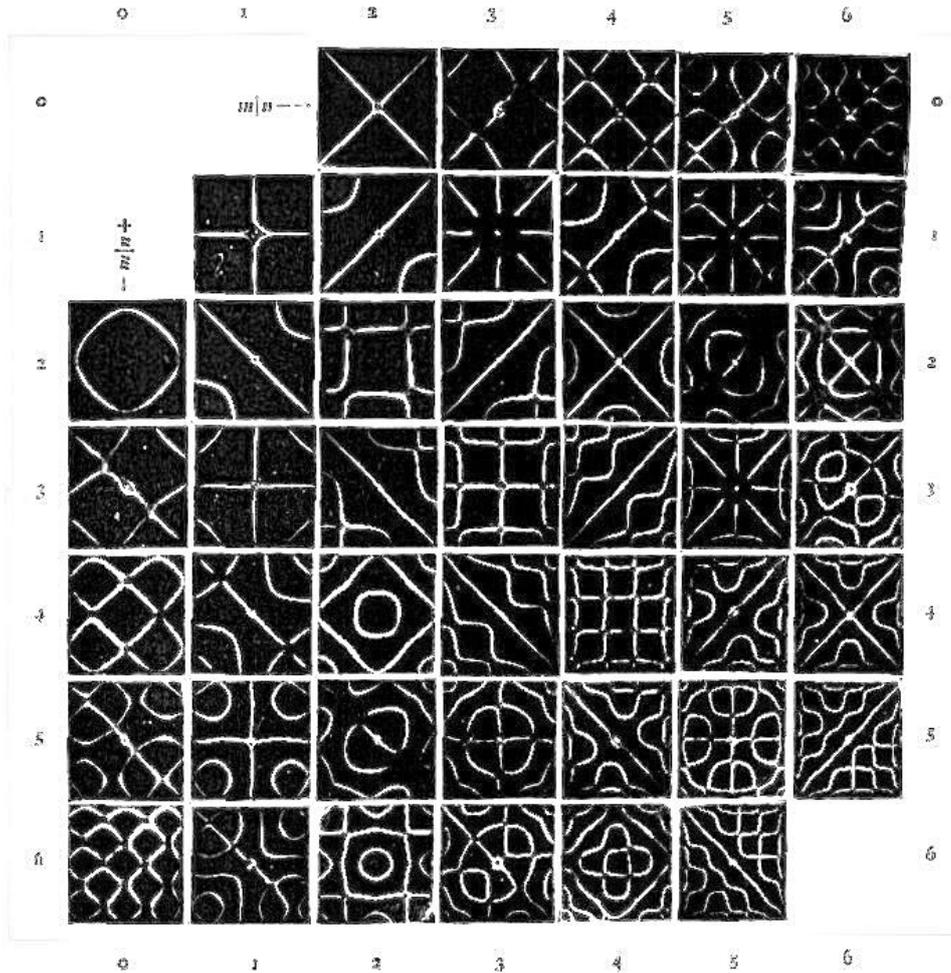


図 5.2: Waller による実験の写真 ([9])

Waller は Chladni のスケッチと比較対称のため図 5.1 を図 5.3 のように並べた.

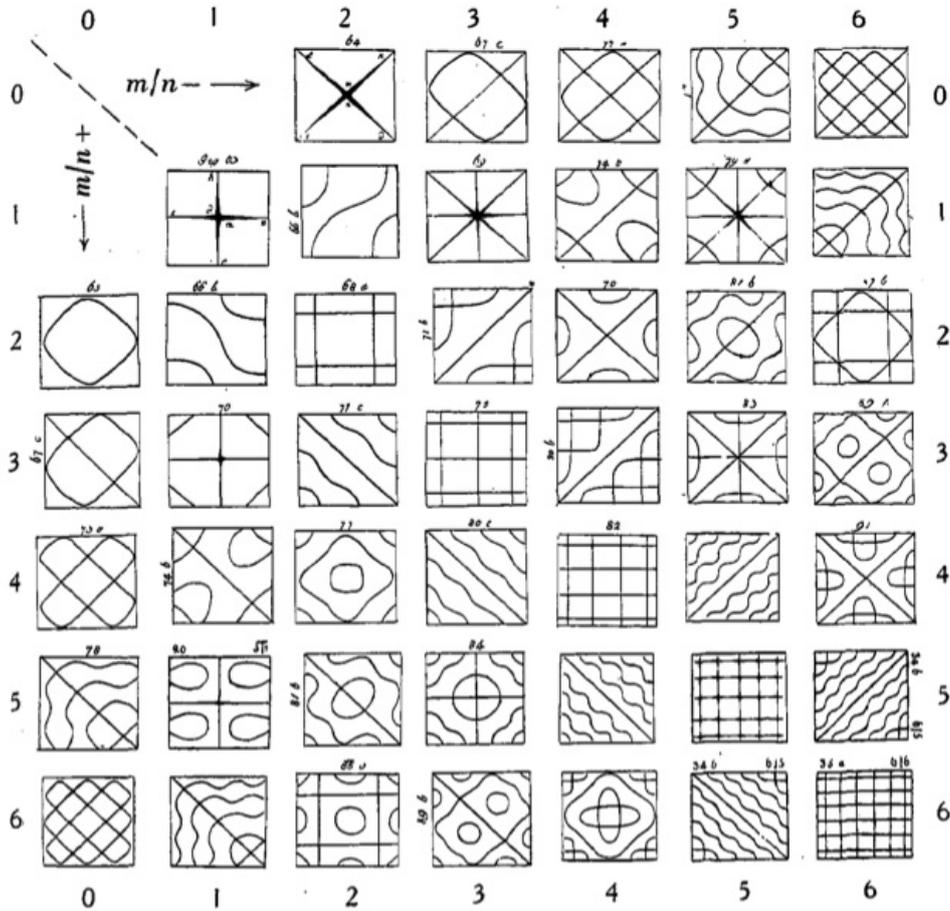


Plate 3. Selection of Chladni's drawings arranged as in plate 2, see § 5.

図 5.3: Chladni による節線パターンのスケッチ (Waller [9] による配置)

Waller は m, n 偶奇性等により、節線パターンを7つのクラスに分類した(表 5.1). このクラス分けを図 5.2 に適用すると、表 5.2 になる.

注意 5.3.1. クラスの分類方法は様々なものが存在する. 本論文では Waller [9] に載っている、7つのクラスを採用する.

クラス番号	m と n	中心	中央の節線の様子	回転対称性	短縮シンボル
1	$m = n$ 奇 奇	節点	辺に平行	90°	+
2	偶 偶	節点でない	辺に平行	90°	□
3	$m \neq n$ 奇 奇-	節点	対角線と中線	90°	*
4	偶 偶-	節点	対角線	90°	×
5	奇 奇+	節点	中線	90°	+
6	偶 偶+	節点でない	閉じた図	90°	○
7	偶 奇- or +	節点	一つの対角線	180°	/ or \

表 5.1: Waller [9] によるクラドニ図形のクラス

	0	1	2	3	4	5	6
0	2	7	4	7	4	7	4
1	7	1	7	3	7	3	7
2	6	7	2	7	4	7	4
3	7	5	7	1	7	3	7
4	6	7	6	7	2	7	4
5	7	5	7	5	7	1	7
6	6	7	6	7	6	7	2

表 5.2: 図 5.2 の各節線パターンのクラス番号

5.3.1 クラドニ図形からクラスと m, n を求める方法

$m \geq n$ とする. m は任意の一つの辺に節線が交わる本数である.

1. 交わる節線の数 m を数えて、 m が奇数であればクラス 1、偶数だったらクラス 2 である. $n = m$ である.
2. 90° の回転対称性がなければクラス 7 である. m, n の数えるために $y = x$ について対称になるようにする (同じ固有値に属する固有関数を求めて、それらの線形結合で対角線 $y = x$ に関して対称なものを見出す). n については、節線でない対角線に節がいくつあるか数えたものが $m + n$ である.
3. 中心が節点でないときクラス 6 である. n の求め方は 2 と同じである.
4. 中心が節点で節線が十文字に交わっている (斜めの節線はない) ときはクラス 5 である. n の求め方は 2 と同じである.
5. 中心が節点で節線が X のように交わっている (十文字はない) ときはクラス 4 である. m の求め方は 2 と同じであるが n の求め方は理解が出来なかった.
6. 中心が節点で節線が米のように交わっているときはクラス 3 である. m の求め方は 2 と同じだが n の求め方は理解出来なかった.

5.4 正方形膜のクラドニ図形

この節では正方形膜のクラドニ図形を扱う. 正方形膜のクラドニ図形は正方形板のクラドニ図形を扱うのに非常に参考になることが知られている.

図 5.2, 図 5.4 を見比べると、自由な正方形膜のクラドニ図形 (理論的計算) が正方形板のクラドニ図形 (実験の写真) とよく似ていることが分かる. (ただし対角線上にある節線パターンは、膜の方がきれいな格子なのに対して、実験の写真の方は境界の付近では格子からのずれが大きくなっている.) この節の内容は物理学者 Waller の論文 [9] に書かれていた内容を数学的に定式化して証明を与えたものである.

領域 Ω を $(0, 1) \times (0, 1)$ とする. 長さ 1 の自由な弦の固有振動は

$$-u'' = \lambda u, \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

で表され、固有関数は

$$u_m(x) := \cos m\pi x \quad (m = 0, 1, \dots).$$

このとき,

$$\{u_m(x)u_n(y); m, n \geq 0\}$$

が正方形膜の固有関数からなる完全系であることは良く知られている.

$$\begin{aligned}\zeta_m^m(x, y) &:= u_m(x)u_m(y), \\ \psi_{m,n}^m(x, y) &:= u_m(x)u_n(y) - u_n(x)u_m(y), \\ \phi_{m,n}^m(x, y) &:= u_m(x)u_n(y) + u_n(x)u_m(y)\end{aligned}$$

とおくと、 ζ_m^m , $\psi_{m,n}^m$, $\phi_{m,n}^m$ はいずれも自由な正方形膜の固有関数となる. すなわち

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

ζ_m^m , $\psi_{m,n}^m$, $\phi_{m,n}^m$ の節線パターンを次の表 5.3 で示したように並べると図 5.4 になる.

	0	1	2	3	4	5	6
0	ζ_0^m	$\psi_{1,0}^m$	$\psi_{2,0}^m$	$\psi_{3,0}^m$	$\psi_{4,0}^m$	$\psi_{5,0}^m$	$\psi_{6,0}^m$
1	$\phi_{1,0}^m$	ζ_1^m	$\psi_{2,1}^m$	$\psi_{3,1}^m$	$\psi_{4,1}^m$	$\psi_{5,1}^m$	$\psi_{6,1}^m$
2	$\phi_{2,0}^m$	$\phi_{2,1}^m$	ζ_2^m	$\psi_{3,2}^m$	$\psi_{4,2}^m$	$\psi_{5,2}^m$	$\psi_{6,2}^m$
3	$\phi_{3,0}^m$	$\phi_{3,1}^m$	$\phi_{3,2}^m$	ζ_3^m	$\psi_{4,3}^m$	$\psi_{5,3}^m$	$\psi_{6,3}^m$
4	$\phi_{4,0}^m$	$\phi_{4,1}^m$	$\phi_{4,2}^m$	$\phi_{4,3}^m$	ζ_4^m	$\psi_{5,4}^m$	$\psi_{6,4}^m$
5	$\phi_{5,0}^m$	$\phi_{5,1}^m$	$\phi_{5,2}^m$	$\phi_{5,3}^m$	$\phi_{5,4}^m$	ζ_5^m	$\psi_{6,5}^m$
6	$\phi_{6,0}^m$	$\phi_{6,1}^m$	$\phi_{6,2}^m$	$\phi_{6,3}^m$	$\phi_{6,4}^m$	$\phi_{6,5}^m$	ζ_6^m

表 5.3: ζ_m^m , $\psi_{m,n}^m$, $\phi_{m,n}^m$ の節線パターンの並べ方

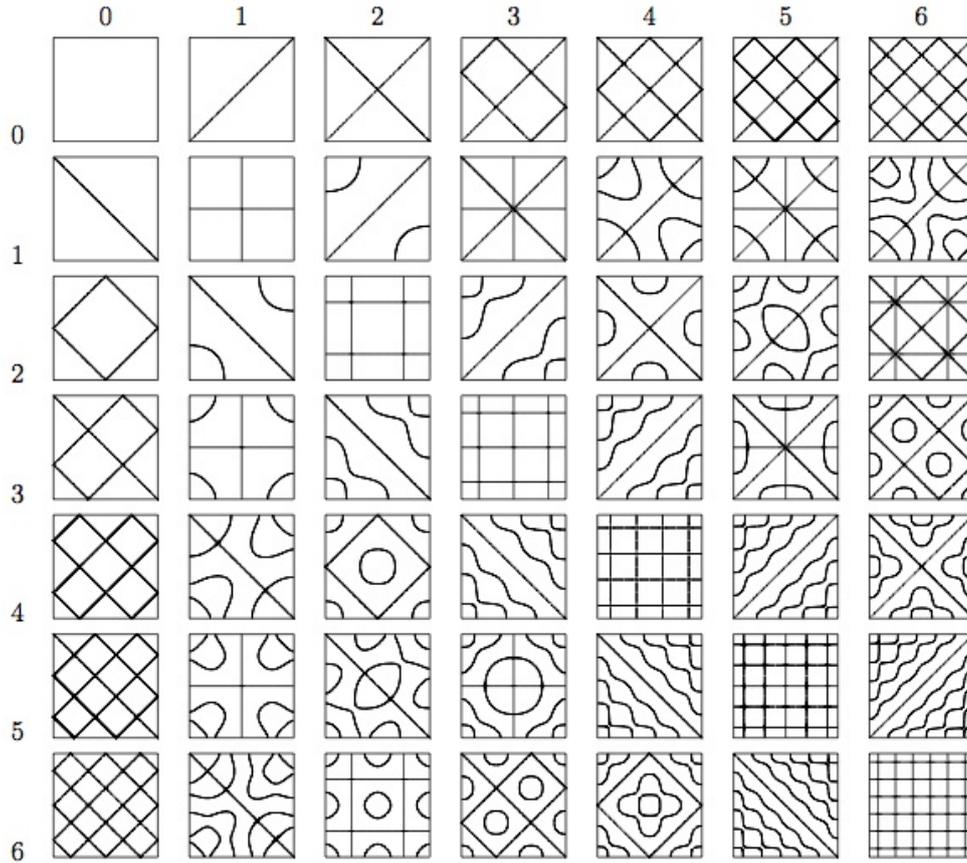


図 5.4: 膜の振動の節線パターン

図 5.4 と図 5.2 を見比べると、膜の固有関数は実際のクラドニ図形を非常に良く近似していることが分かる。 $\psi_{m,n}$, $\phi_{m,n}$, ζ_m が、それぞれ $m|n+$, $m|n-$, $m|m$ に対応していることが分かる。

$\phi_{m,n}^m$, $\psi_{m,n}^m$ について

$$\phi_{m,n}^m = \phi_{nm}^m, \quad \psi_{m,n}^m = -\psi_{nm}^m$$

であるので、 m と n を入れ替えても等しい節線パターンが得られることに注意する。ゆえに $m > n$ となる組 (m, n) だけで十分である。Waller [9] では、 $m|n, m|n+, m|n-$ と記したとき、通常 $m > n$ としてある。 $m \neq n$ のとき、 $\psi_{m,n}$ と $\phi_{m,n}$ の節線パターンは対角線 $m = n$ について対称の位置に置かれる。

定理 5.4.1. $M := \{\zeta_m^m\}_{m \geq 0} \cup \{\psi_{m,n}^m\}_{m > n \geq 0} \cup \{\phi_{m,n}^m\}_{m > n \geq 0}$ は完全系である。

証明 5.4.1. $\{u_m(x)u_n(y); m, n \geq 0\}$ は完全系で、 $\forall m > n$ に対して

$$\text{Span}\langle u_m \otimes u_n, u_n \otimes u_m \rangle = \text{Span}\langle \phi_{m,n}^m, \psi_{m,n}^m \rangle$$

であるから M は完全系である. □

注意 5.4.1. $\psi_{m,n}^m$ と $\phi_{m,n}^m$ の固有値は共に

$$\lambda = (n^2 + m^2)\pi^2$$

である. したがって $\psi_{m,n}^m$ と $\phi_{m,n}^m$ の固有値は等しい.

異なる固有値に属する固有関数は直交するが、 $\phi_{m,n}^m$ と $\psi_{m,n}^m$ は固有値が等しくても直交している.

定理 5.4.2. $\phi_{m,n}^m$ と $\psi_{m,n}^m$ は直交している.

$$\iint_{\Omega} \phi_{m,n}^m \psi_{m,n}^m dx dy = 0$$

証明 5.4.2.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \phi_{m,n}^m \psi_{m,n}^m dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 (\cos m\pi x \cos n\pi y + \cos n\pi x \cos m\pi y) \\ &\quad (\cos m\pi x \cos n\pi y - \cos n\pi x \cos m\pi y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (\cos^2 m\pi x \cos^2 n\pi y - \cos^2 n\pi x \cos^2 m\pi y) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって $\phi_{m,n}^m$ と $\psi_{m,n}^m$ は直交している. □

注意 5.4.2. $\psi_{m,n}^m$ の節線パターン $\psi_{m,n}^m = 0$ を $m|n-$ と表すが、これは $\psi_{nm}^m = 0$ ($n|m-$) と同じものである. Waller [9] 等では、 $m|n-$ と記したとき、通常 $m > n$ としてある. また $\phi_{m,n}^m$ についても同様である.

定理 5.4.3. ζ_m^m の節線パターンは $\forall P \in D_4$ に対して不変である.

証明 5.4.3.

$$\begin{aligned}
 R\zeta_m^m(x, y) &= (-1)^m \cos m\pi x \cos m\pi y \\
 &= (-1)^m \zeta_m^m(x, y). \\
 S\zeta_m^m(x, y) &= \cos m\pi y \cos m\pi x \\
 &= \cos m\pi x \cos m\pi y \\
 &= \zeta_m^m(x, y).
 \end{aligned}$$

ゆえに ζ_m^m の節線パターンは $\forall P \in D_4$ について不変である. □

定理 5.4.4. m, n が共に偶数または共に奇数のとき、 $\phi_{m,n}^m$ の節線パターンは $\forall P \in D_4$ に対して不変である.

証明 5.4.4. $\psi_{m,n}^m$ について

$$\begin{aligned}
 R\psi_{m,n}^m(x, y) &= (-1)^m \cos m\pi x \cos n\pi y - (-1)^n \cos n\pi y \cos m\pi x \\
 &= (-1)^m (\cos m\pi y \cos n\pi x - (-1)^{n-m} \cos n\pi y \cos m\pi x) \\
 &= (-1)^{m+1} \psi_{m,n}^m(x, y). \\
 S\psi_{m,n}^m(x, y) &= \cos m\pi y \cos n\pi x - \cos n\pi y \cos m\pi x \\
 &= -(\cos m\pi x \cos n\pi y - \cos n\pi x \cos m\pi y) \\
 &= -\psi_{m,n}^m(x, y)
 \end{aligned}$$

ゆえに $\psi_{m,n}^m, \phi_{m,n}^m$ の節線パターンは、 $\forall P \in D_4$ について不変である. $\phi_{m,n}^m$ についても同様である. □

定理 5.4.5. m, n の一方が偶数他方が奇数のとき、 $\phi_{m,n}^m, \psi_{m,n}^m$ の節線パターンは $\forall P \in \{I, R^2, S, R^2S\}$ についてのみ不変である.

証明 5.4.5. まず $\psi_{m,n}^m, \phi_{m,n}^m$ の節線パターンが、 R^2, S^2 について不変であることを

示す.

$$\begin{aligned} R\psi_{mn}^m(x, y) &= (-1)^m \cos n\pi x \cos m\pi y - (-1)^n \cos m\pi x \cos n\pi y \\ &= (-1)^m (\cos n\pi x \cos m\pi y + \cos m\pi x \cos n\pi y) \\ &= (-1)^m \phi_{nm}^m(x, y). \end{aligned}$$

$$R^2\psi_{m,n}^m(x, y) = \phi_{m,n}^m(x, y),$$

$$\begin{aligned} S\psi_{m,n}^m(x, y) &= \cos m\pi y \cos n\pi x - \cos n\pi y \cos m\pi x \\ &= \psi_{n,m}^m(x, y) = -\psi_{m,n}^m(x, y). \end{aligned}$$

ゆえに $\psi_{m,n}^m, \phi_{m,n}^m$ の節線パターンは、 $P = I, R^2, S, R^2S$ について不変である。一方

$$R\psi_{m,n}^m = (-1)^m \phi_{n,m}^m = (-1)^m \phi_{m,n}^m, \quad R\phi_{m,n}^m = (-1)^m \psi_{n,m}^m = (-1)^{m+1} \psi_{m,n}^m$$

より

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}^m(0, 0) &= 0, \quad R\psi_{m,n}^m(0, 0) = (-1)^m \phi_{m,n}^m(0, 0) = 2(-1)^m \neq 0, \\ \phi_{m,n}^m(0, 0) &= 2 \neq 0, \quad R\phi_{m,n}^m(0, 0) = (-1)^{m+1} \psi_{m,n}^m(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

であるから $\psi_{m,n}^m$ と $\phi_{m,n}^m$ の節線パターンは R で不変でない。□

$\phi_{m,n}^m$ について次のことがいえる。

命題 5.4.1. m と n がともに偶数または奇数のとき $\phi_{m,n}^m$ の四つ角は 0 でない。

証明 5.4.6. $\phi_{m,n}^m(x, y) = \cos m\pi x \cos n\pi y + \cos n\pi x \cos m\pi y$ について $(-1)^{n-m} = 1, (-1)^{n+m} = 1, (-1)^m + (-1)^n = (-1)^m [1 + (-1)^{n-m}] = 2(-1)^m \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \phi_{m,n}^m(0, 0) &= \cos 0 \cos 0 + \cos 0 \cos 0 = 2 \neq 0, \\ \phi_{m,n}^m(0, 1) &= \cos 0 \cos n\pi + \cos 0 \cos m\pi = (-1)^n + (-1)^m \neq 0, \\ \phi_{m,n}^m(1, 0) &= \cos m\pi \cos 0 + \cos m\pi \cos 0 = (-1)^m + (-1)^n \neq 0, \\ \phi_{m,n}^m(1, 1) &= \cos m\pi \cos n\pi + \cos m\pi \cos n\pi = 2(-1)^{m+n} = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

したがって、 $\phi_{m,n}^m$ の四つ角は 0 ではない。□

$\psi_{m,n}^m$ について次のことがいえる。

命題 5.4.2. $\psi_{m,n}^m(0, 0) = \psi_{m,n}^m(1, 1) = 0$.

m と n が共に偶数または共に奇数のときは $\psi_{m,n}^m(1, 0) = \psi_{m,n}^m(0, 1) = 0$,
そうでないときは $\psi_{m,n}^m(1, 0) \neq 0, \psi_{m,n}^m(0, 1) \neq 0$.

証明 5.4.7.

$$\psi_{m,n}^m(0,0) = 1 - 1 = 0,$$

$$\psi_{m,n}^m(1,1) = (-1)^m \cdot (-1)^n - (-1)^m \cdot (-1)^n = 0,$$

$$\psi_{m,n}^m(1,0) = \cos m\pi \cos n\pi - \cos n\pi \cos m\pi = (-1)^m - (-1)^n,$$

$$\psi_{m,n}^m(0,1) = \cos m\pi \cos n\pi - \cos n\pi \cos m\pi = (-1)^n - (-1)^m$$

であるから、 m と n が共に偶数、または共に奇数のときは 0 である。だからつねに $\psi_{m,n}^m(0,0) = \psi_{m,n}^m(1,1) = 0$ 。 m と n が共に偶数、または共に奇数のときは $\psi_{m,n}^m(1,0) = \psi_{m,n}^m(0,1) = 0$ 。したがって、 $\psi_{m,n}^m(0,0) = \psi_{m,n}^m(1,1) = 0$ ($m \neq n$) である。□

5.5 M の性質

以上より M の性質は以下のである。

- ζ_m の節線パターンは $\forall P \in D_4$ に対して不変である。
- m, n が共に偶数または共に奇数のとき、 $\phi_{m,n}, \psi_{m,n}$ の節線パターンは $\forall P \in D_4$ に対して不変である。
- m, n の一方が偶数他方が奇数のとき、 $\phi_{m,n}, \psi_{m,n}$ の節線パターンは $\forall P \in \{I, R^2, S, R^2S\}$ についてのみ不変である。例えば 90° 回転対称性はない。 $\phi_{m,n}, \psi_{m,n}$ の節線パターンは 90° 回転するとそれぞれ他方に移る。
- $\phi_{m,n}$ と $\psi_{m,n}$ の固有値は等しい ($(m^2 + n^2)\pi^2$)。
- $\phi_{m,n}$ と $\psi_{m,n}$ は

$$\iint_{\Omega} \phi_{m,n} \psi_{m,n} dx dy = 0$$

なので直交している。

5.5.1 固有値番号、重複度の表示

表 5.4 は膜の固有値を小さいものから順に図 5.4 に従って並べたものである。例えば 2_1 と 2_2 は同位の固有値であることを表している。また、 $23_1, 23_2, 23_3, 23_4$ は重複度 4 の固有値であることを表している。 ζ_m^m の固有値以外は全て重根である。つ

まりクラス 1, 2 以外は全て重根である. 膜の固有値の大部分が重根であることがわかる.

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2 ₁	5 ₁	10 ₁	16 ₁	23 ₁	34 ₁
1	2 ₂	4	7 ₁	12 ₁	18 ₁	27 ₁	36 ₁
2	5 ₂	7 ₂	9	14 ₁	21 ₁	29 ₁	38 ₁
3	10 ₂	12 ₂	14 ₂	20	23 ₂	32 ₁	42 ₁
4	16 ₂	18 ₂	21 ₂	23 ₃	31	40 ₁	49 ₁
5	23 ₄	27 ₂	29 ₂	32 ₂	40 ₂	47	55 ₁
6	34 ₂	36 ₂	38 ₂	42 ₂	49 ₂	55 ₂	65

表 5.4: 膜の固有値番号

5.6 棒の固有関数を用いた板の固有関数の近似

この節の内容も、Waller の論文 [9] に書かれていたものである. 膜の固有関数は、弦の固有関数 $u_m(x) = \cos m\pi x$ を用いて、 $u_m \otimes u_n(x, y) = u_m(x)u_n(y)$ として得られるが、弦の固有関数の代わりに、長さ 1 の自由な棒の固有関数、すなわち

$$v''''(x) = \lambda v(x), \quad v''(0) = v'''(0) = v''(1) = v'''(1) = 0$$

を満たす v を用いたものは、正方形膜のクラドニ図形よりも更に正方形板のクラドニ図形に似ていることが分かる (図 5.2, 図 5.4, 図 5.5 を見比べよ).

固有関数は次のようになる (渡部 [8]).

$$v_0(x) = 1, \quad v_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

$m \geq 2$ に対しては

$$v_m(x) := (\sin \nu_m \pi - \sinh \nu_m \pi)(\cos \nu_m x + \cosh \nu_m x) - (\cos \nu_m \pi - \cosh \nu_m \pi)(\sin \nu_m x + \sinh \nu_m x).$$

ここで $\nu_m (m \geq 2)$ は超越方程式

$$\cos \nu \pi = \frac{1}{\cosh \nu \pi}$$

5.6 棒の固有関数を用いた板の固有関数の近似(正方形膜、正方形板のクラドニ図形)

をみたす正の解のうち ν の小さい順に $\nu_2 < \nu_3 < \dots$ とおいたものであり、次の性質を持つ。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu_m = \infty, \quad \nu_m \doteq m - \frac{1}{2}.$$

このとき

$$\begin{aligned} \zeta_m^b(x, y) &:= v_m(\pi x)v_m(\pi y), \\ \psi_{m,n}^b(x, y) &:= v_m(\pi x)v_n(\pi y) - v_n(\pi x)v_m(\pi y), \\ \phi_{m,n}^b(x, y) &:= v_m(\pi x)v_n(\pi y) + v_n(\pi x)v_m(\pi y) \end{aligned}$$

とおく. 次の図 5.5 は、 $\zeta_m^b, \psi_{m,n}^b, \phi_{m,n}^b$ を前節と同様に表 5.3 のように並べたものである。これを見ると $\zeta_m^b, \psi_{m,n}^b, \phi_{m,n}^b$ が自由な縁をもつ板の固有関数の良い近似になっていることが分かる。

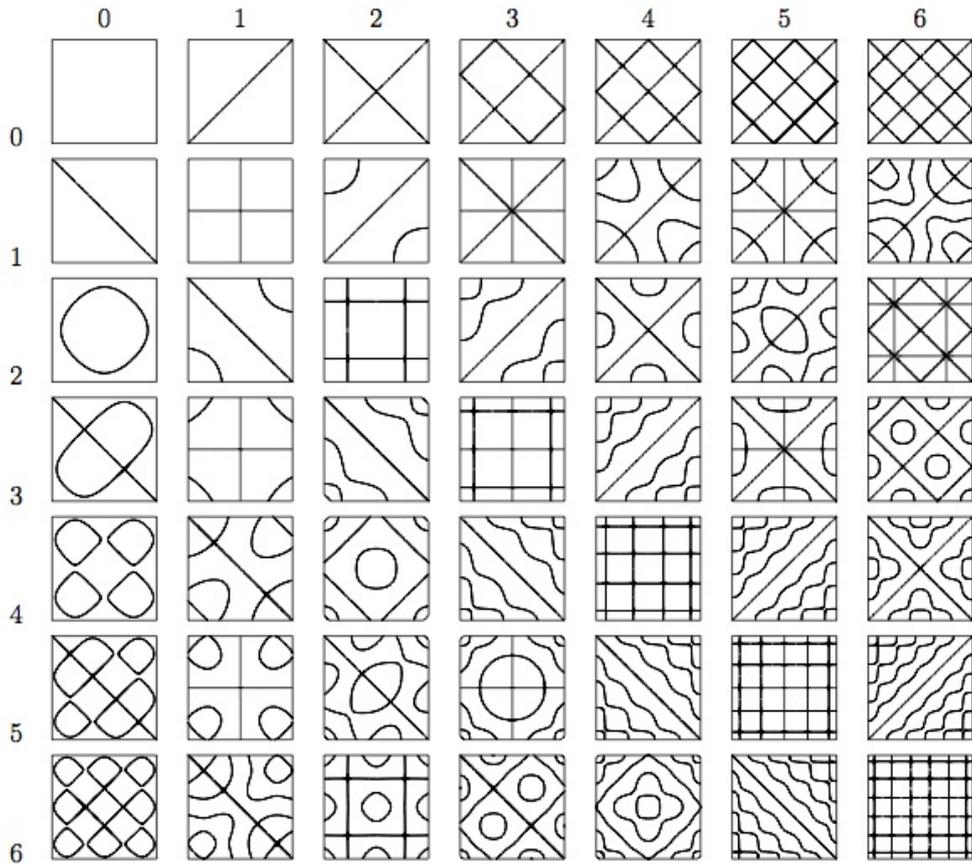


図 5.5: 棒による板の節線パターンの近似

5.6 棒の固有関数を用いた板の固有関数の近似(正方形膜、正方形板のクラドニ図形)

図 5.5 は Waller の実験 (図 5.2) を膜の振動の節線パターン (図 5.4) より更に良く近似していることが分かる. また、 $\zeta_m^b, \psi_{m,n}^b$ が表す節線パターンはそれぞれ膜の固有関数 $\zeta_m^m, \phi_{m,n}^m$ が表す節線パターンと重ねるとほぼ一致することがわかる. $\phi_{m,n}^b$ が表す節線パターンは膜の固有関数 $\phi_{m,n}^m$ が表す節線パターンと比べて Waller の実験 (図 5.2) に近くなっていることが分かる.

$\psi_{m,n}^b, \phi_{m,n}^b$ について

$$\phi_{m,n}^b = \phi_{nm}^b, \quad \psi_{m,n}^b = -\psi_{nm}^b$$

であるので、 m と n を入れ替えても同じ節線パターンが得られる.

5.7 差分法による正方形板のクラドニ図形の近似

板の固有値問題は exact に解けないので、数値計算が必要になる。平野 [3] の差分法プログラムを用いて、数値計算を行なった。

$\zeta_m, \psi_{m,n}, \phi_{m,n}$ に対応する板の固有関数をそれぞれ $Z, \psi_{m,n}, \phi_{m,n}$ とする。 $Z, \psi_{m,n}, \phi_{m,n}$ は表 5.3 のように並べる。

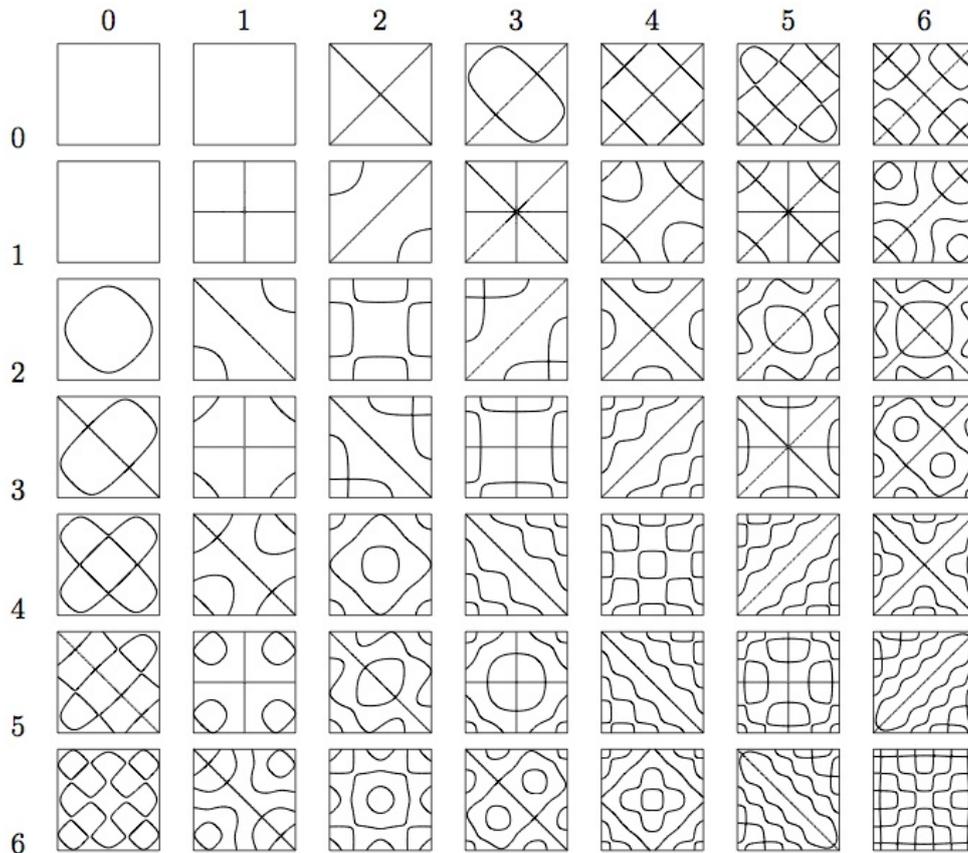


図 5.6: 板の振動の固有関数の節線パターン Poisson 比=0.35

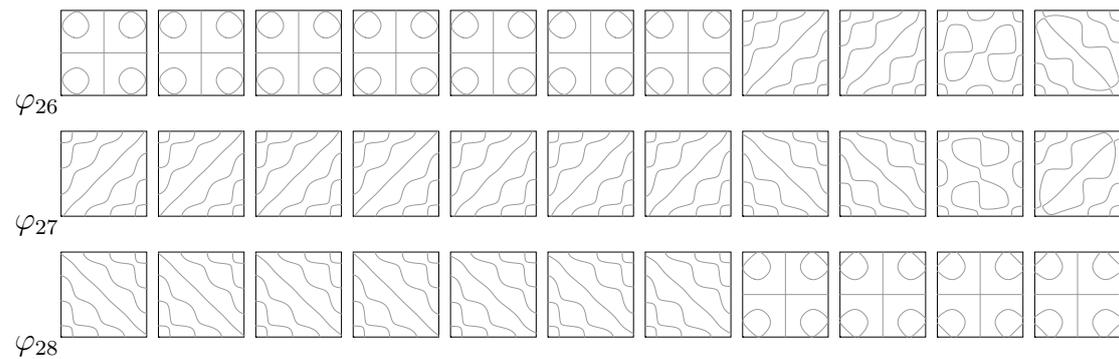
図 5.6 は (5.4 節) と (5.5 節) で述べた近似方法と比べて最も良く Waller の実験 (図 5.2) を近似していることがわかる。また、 $\phi_{m,n}$ が表す節線パターンは前節の $\phi_{m,n}^b$ が表す節線パターンと重ねるとほぼ一致することがわかる。 $Z_m, \psi_{m,n}$ がそれぞれ表す節線パターンは前節の $\zeta_m^m, \psi_{m,n}^m$ が表す節線パターンと比べて Waller の実験 (図 5.2) に近くなっていることが分かる。

5.7.1 3重根の探索

差分法による数値計算で求めた固有値 λ を小さいものから順に

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

とする. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ に対応する固有関数を $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ とする. Poisson 比が $0 \sim 0.5$ まで 0.05 刻みで $\varphi_{26}, \varphi_{27}, \varphi_{28}$ の節線パターンを並べると



これと付録 B にある表 B.1 を合わせて見ると $\mu = 0 \sim 0.3$ のときは λ_{26} は simple で $\lambda_{27} = \lambda_{28}$ である.

$$\varphi_{26} = \Phi_{51}, \quad \varphi_{27} = \Phi_{54}, \quad \varphi_{28} = \Psi_{54}$$

一方 $\mu = 0.35 \sim 0.4$ では $\lambda_{26} = \lambda_{27}$ で、 λ_{28} は simple である.

$$\varphi_{26} = \Phi_{54}, \quad \varphi_{27} = \Psi_{54}, \quad \varphi_{28} = \Phi_{51}$$

以上より 0.3 と 0.35 にある μ^* を境にして固有関数が入れ替わっていることが予想できる.

そこで次のようなプログラムを実行した.

```

1  N=160;
2  a=0.3;
3  b=0.35;
4  format long
5  while (b-a)>2e-16
6      c=(a+b)/2;
7      [v,d]=eigs(plate_f1(N,c), 30, 0);d2=sort(diag(d));
8      if d2(26)-d2(27)>d2(27)-d2(28)
9          b=c

```

5.7 差分法による正方形板のクラドニ図形の近似正方形膜、正方形板のクラドニ図形

```
10     else
11         a=c
12     end
13 end
```

次のような結果が得られた.

MATLAB による実行結果

```
>> triple
a =
    0.3250000000000000

b =
    0.3375000000000000
(中略)
a =
    0.333567076778831

a =
    0.333567076778831

>> d2
d2 =
    1.0e+04 *
    0.000000000031524
    0.000000000041201
    0.000000000047923
(中略)
    4.093491364545093
    4.556378283390580
    4.556378283399954
    4.556378283400486
    5.822202694302387
    5.822202694305028
```

$N=160$ のとき、 $\mu_* = 0.333567076778831$ に近くで 3 重根らしきもの (小数点第 10 位まで等しくなった) が見つかった.

因みに $N=1280$ のとき

```

b =

    0.332354091636588

d2 =

    1.0e+04 *

    3.911560411445741
    4.103738861143708
    4.565033476712063
    4.565033483510668
    4.565033491519678
    
```

となる。

5.7.2 固有値の番号、重複度の表示

表 5.5 は差分法で求めた板の固有値を表 5.4 と同様に並べたものである (プログラム P.93). この表は μ によって異なる.

膜のときと比べて重根の数が約半分に減少したことが分かる. クラス 7 のみが重根であることが分かった.

また、上で述べたように $26_1, 26_2, 26_3$ は μ^* で重複度が 3 の固有値であることが分かった.

	0	1	2	3	4	5	6
0	×	×	5	9_1	16	23_1	33
1	×	4	7_1	12	18_1	25	36_1
2	6	7_2	11	14_1	21	29_1	38
3	9_2	13	14_2	20	26_1	32	42_1
4	17	18_2	22	26_2	31	40_1	51
5	23_2	26_3	29_2	34	40_2	48	55_1
6	35	36_2	39	42_2	52	55_2	67

表 5.5: 板の固有値番号

5.7.3 \mathcal{P} の性質

$\mathcal{P} := \{Z_m\} \cup \{\Psi_{mn}\}_{m>n} \cup \{\Phi_{mn}\}_{m>n}$ の性質は以下のように予想できる.

- (1) Z_m の節線パターンは $\forall P \in D_4$ に対して不変である.
- (2) m, n が共に偶数または共に奇数のとき、 Φ_{mn}, Ψ_{mn} の節線パターンは $\forall P \in D_4$ に対して不変である.
- (3) m, n の一方が偶数他方が奇数のとき、 Φ_{mn}, Ψ_{mn} の節線パターンは $\forall P \in \{I, R^2, S, R^2S\}$ についてのみ不変である. 例えば 90° 回転対称性はない. Φ_{mn}, Ψ_{mn} の節線パターンは 90° 回転するとそれぞれ他方に移る.
- (4) Φ_{mn} と Ψ_{mn} は直交している.

$$\iint_{\Omega} \Phi_{mn} \Psi_{mn} dx dy = 0$$

- (5) m, n の一方が偶数、他方が奇数のとき Φ_{mn} と Ψ_{mn} の固有値は等しい (重根). そうでないとき固有値は等しくない.
- (6) $\{Z_m\} \cup \{\Psi_{mn}\}_{m>n} \cup \{\Phi_{mn}\}_{m>n}$ は完全系である.

これは M の性質とほとんど等しいが、(5) のみ異なる.

5.8 クラドニ図形の比較

図 5.7 に 3 つの近似方法について節線パターンの違いが顕著なもの抜き出して比較をする。

- $5|0 - \dots$ 膜と棒に比べ板は Waller に似ているが Chladni だけが大きく異なる。
- $6|1 - \dots$ Waller, 膜, 棒, 板は非常に似ているが Chladni だけが大きく異なる。
- $6|2 - \dots$ Waller と板は非常によく似ているが Chladni だけが大きく異なる。
- $6|3 - \dots$ Chladni, 膜, 棒, 板は概ね似ているが Waller だけ異なっている。
- $5|5 \dots$ Waller, 板は非常によく似ているが Chladni, 膜, 棒は格子状になっている。
- $5|0 + \dots 5|0 -$ に比べ棒が板によく似ている。
- $6|1 + \dots 5|0 -$ Waller, 膜, 棒, 板は非常に似ているが Chladni だけが大きく異なる。
- $6|3 + \dots$ Chladni, 膜, 棒, 板は概ね似ているが Waller だけが大きく異なる。

$n \neq 0$ のときは膜の固有関数の節線パターンは板の節線パターンに非常に近いことが分かる。少数の場合を除いて Waller と板の節線パターンは非常に近いことが分かる。 $6|3 -$ と $6|3 +$ は対角線となるところが上手く描けていない。実験に問題があったと思われる。

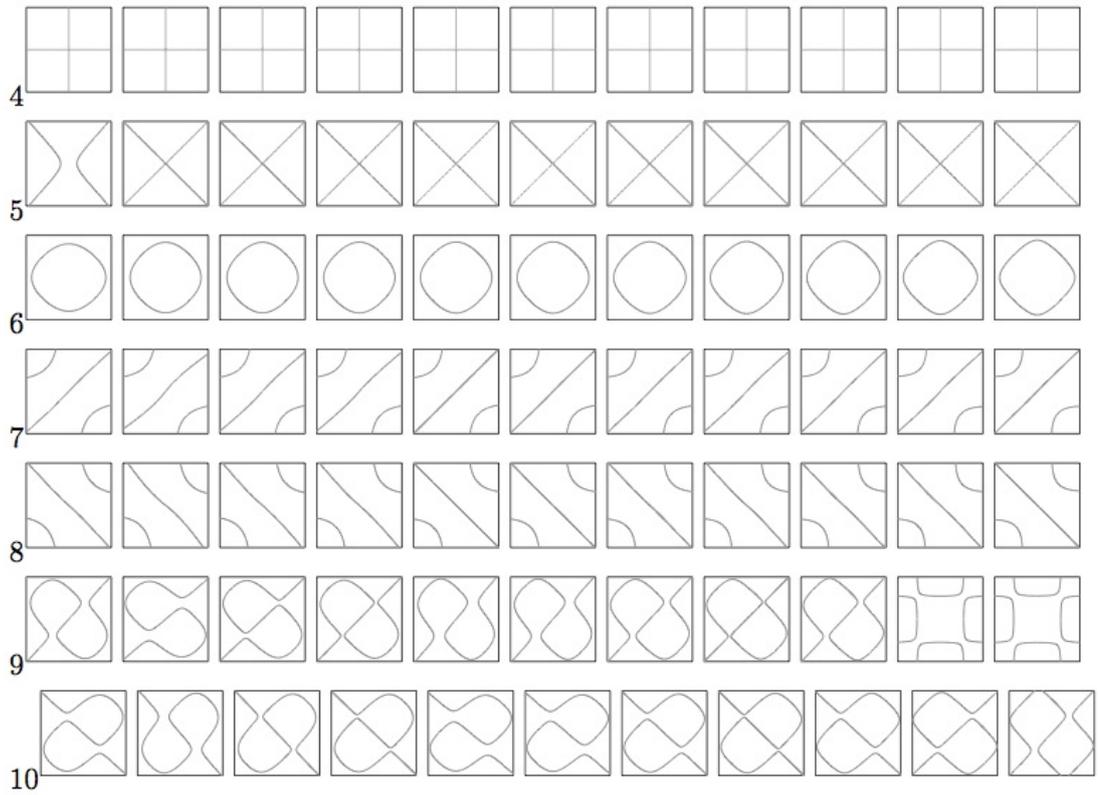
クラス	Chladni	Waller	膜	棒	板 (差分法)
5 0-					
6 1-					
6 2-					
6 3-					
5 5					
5 0+					
6 1+					
6 3+					

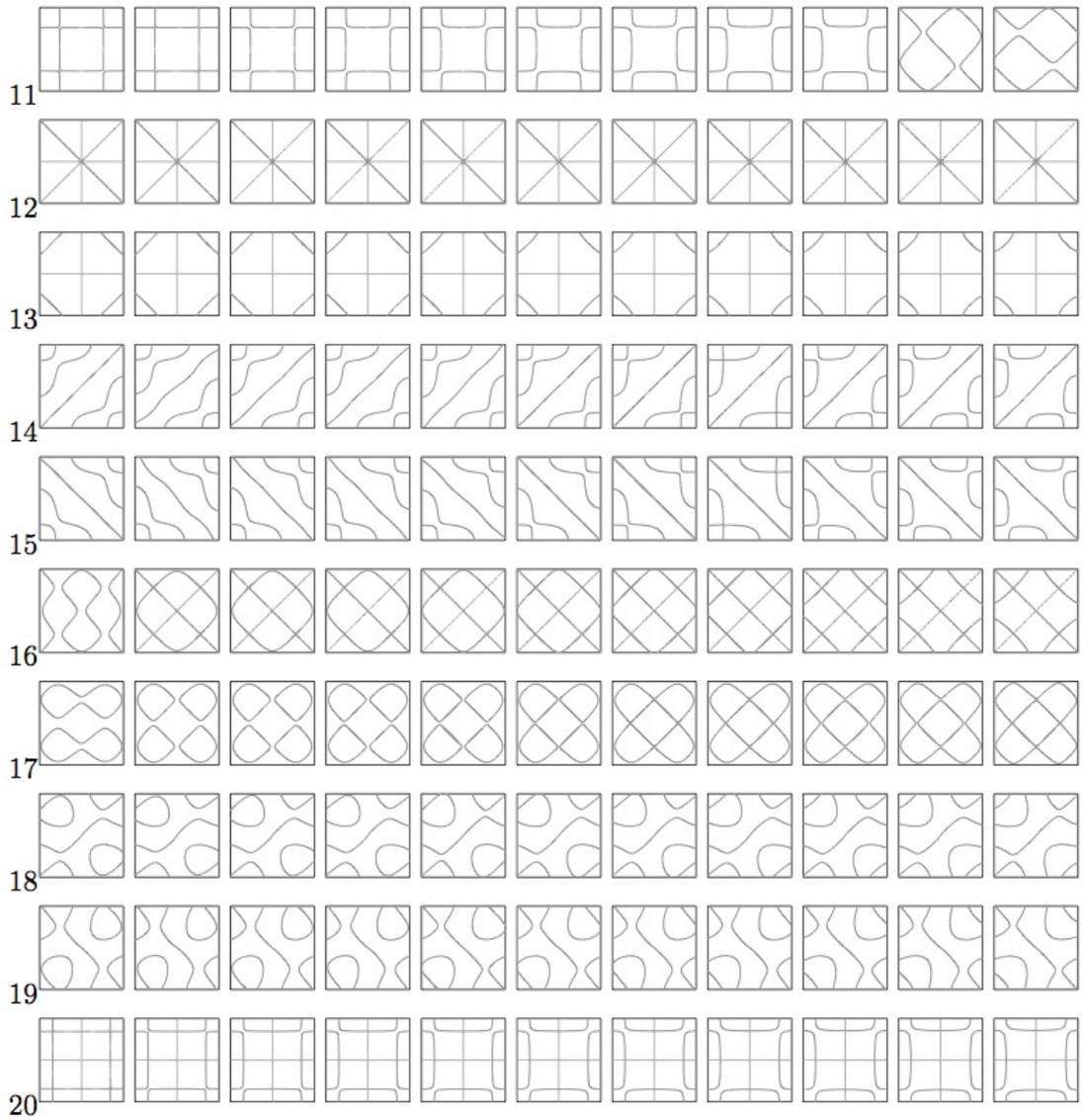
表 5.6: 節線パターンの比較

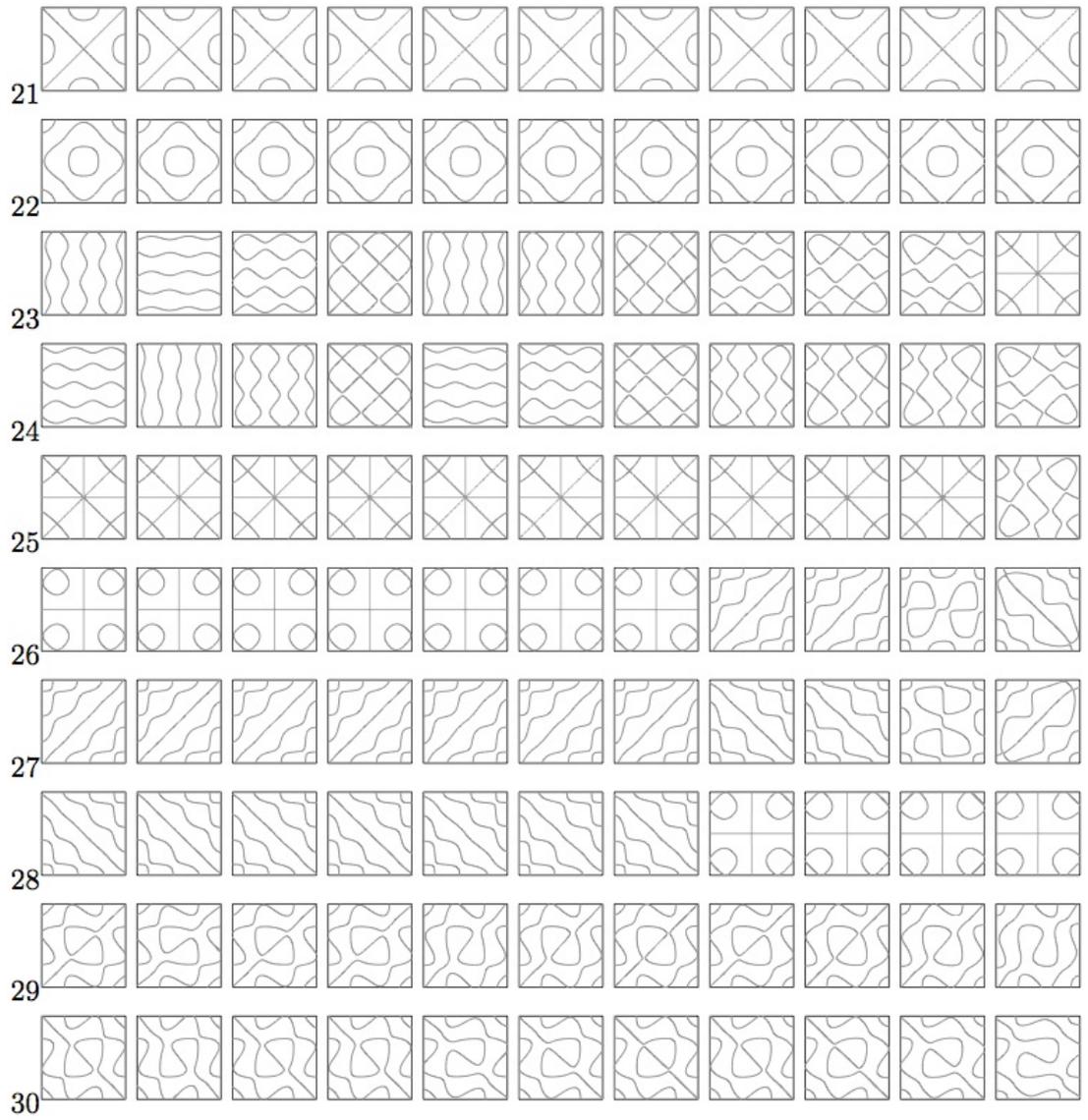
第6章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形

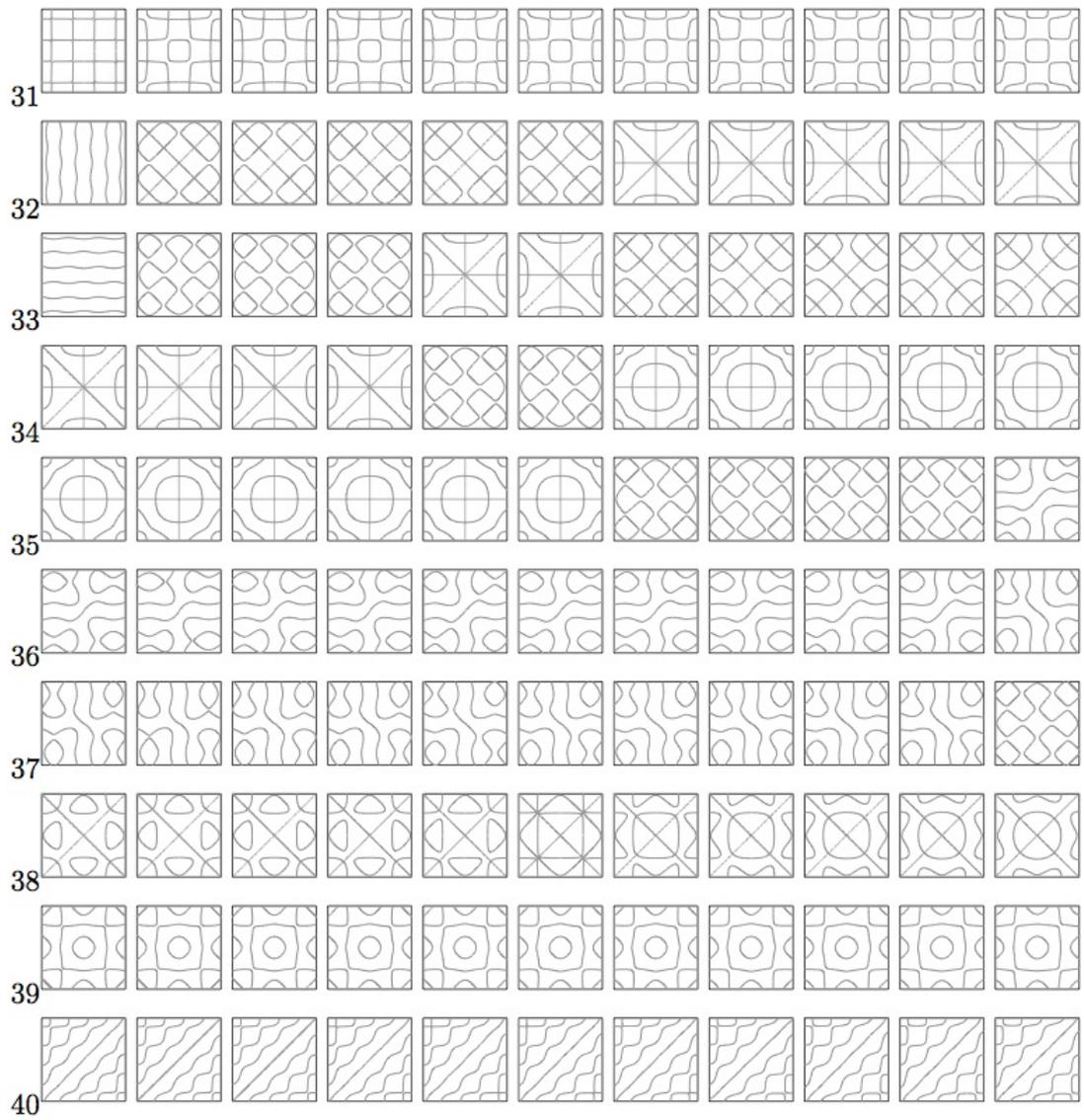
6.1 Poisson 比=0 ~ 0.5

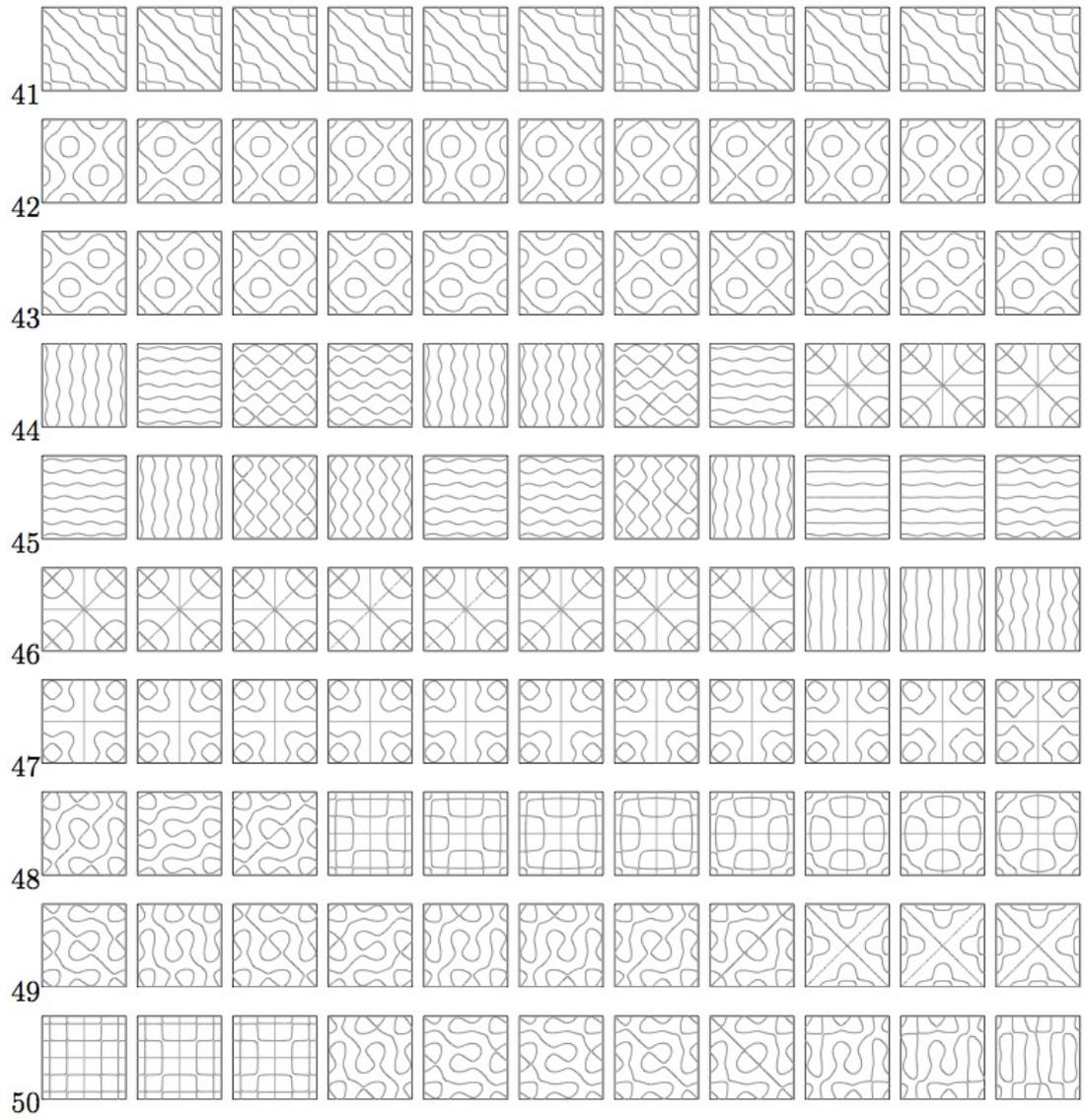
縦に φ_4 から φ_{200} までの節線パターンを並べる. Poisson 比は $\mu = 0$ から 0.5 まで 0.05 刻みの値に対して計算し横方向に並べた. $N = 1280$ で計算した. Poisson 比を動かすと節線パターンが概ね連続的に変化することがわかるが、時々入れ替わっているところがある. 残念ながらわかりやすい変化の法則は見つけられなかった. しかしこの観察をもとにして 0 でない 3 重根らしきものを発見できた.

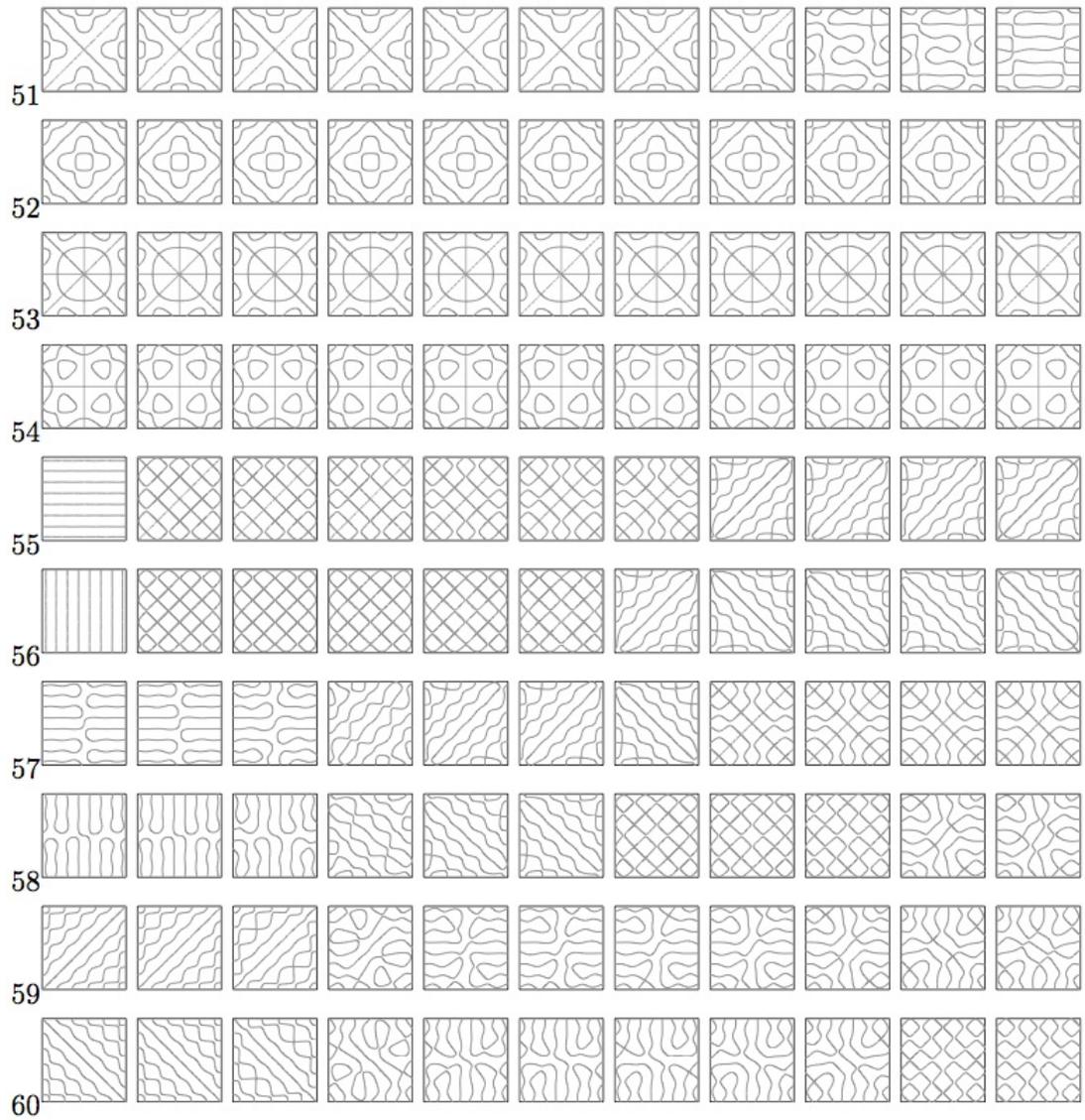


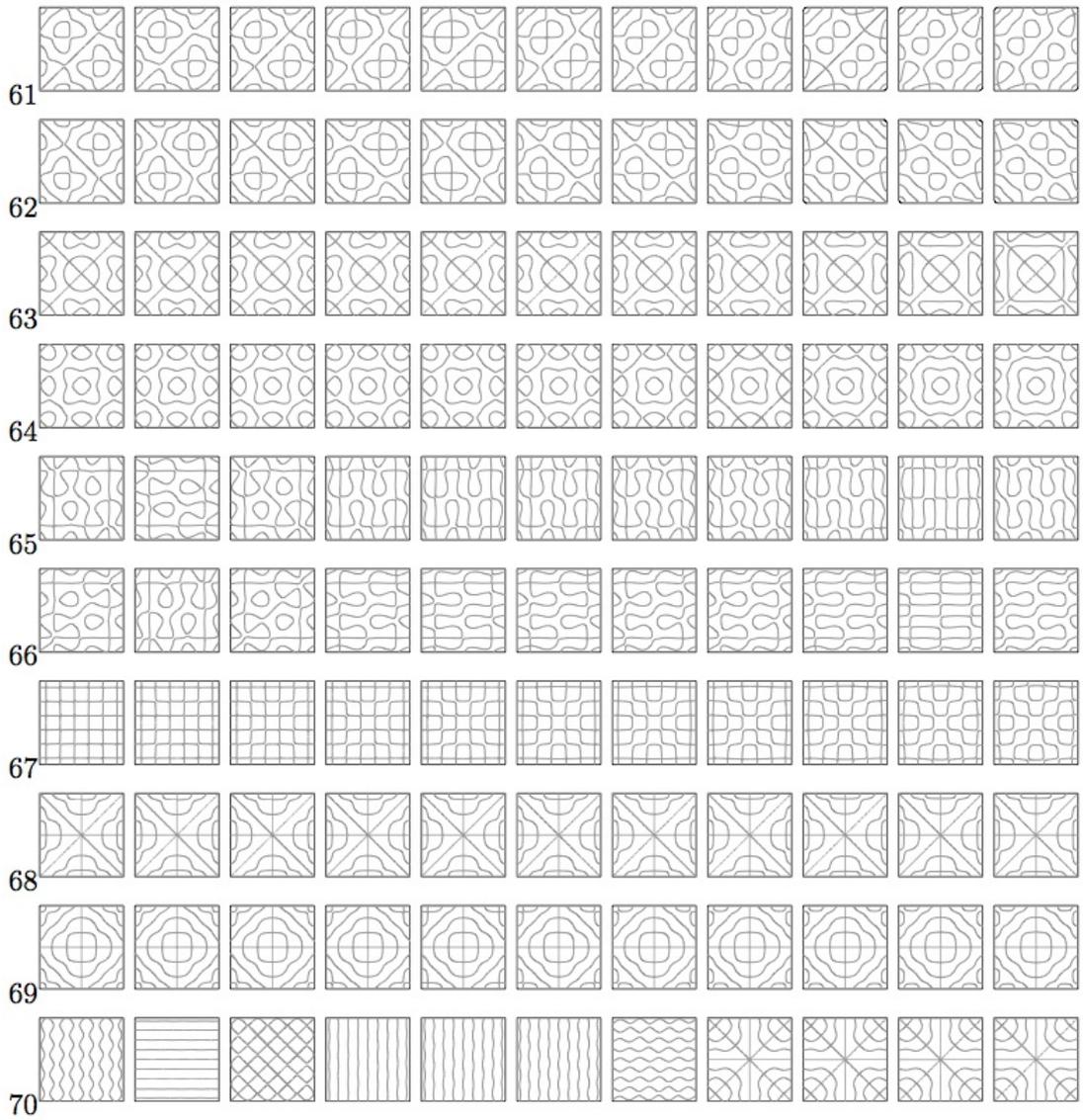


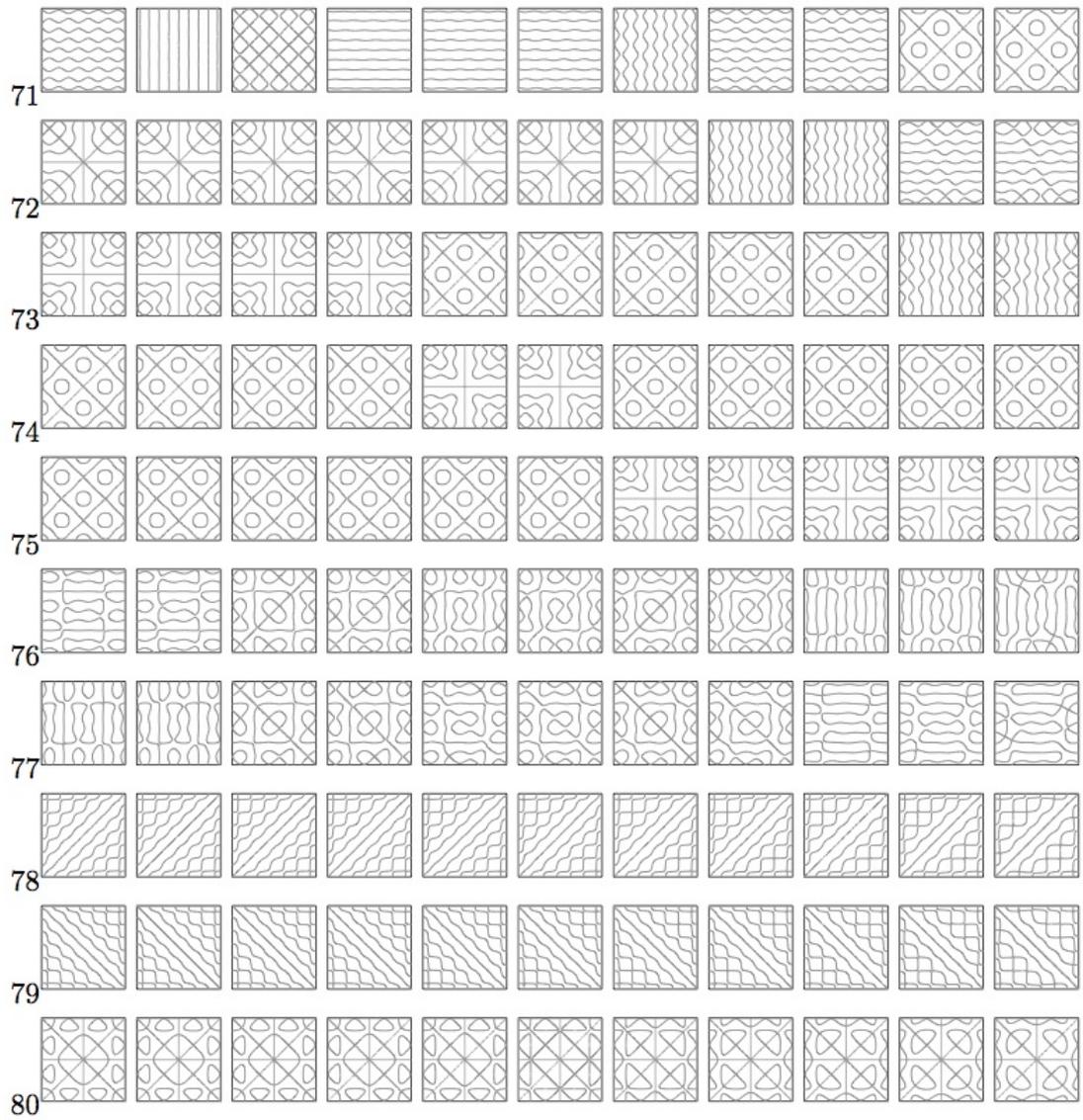


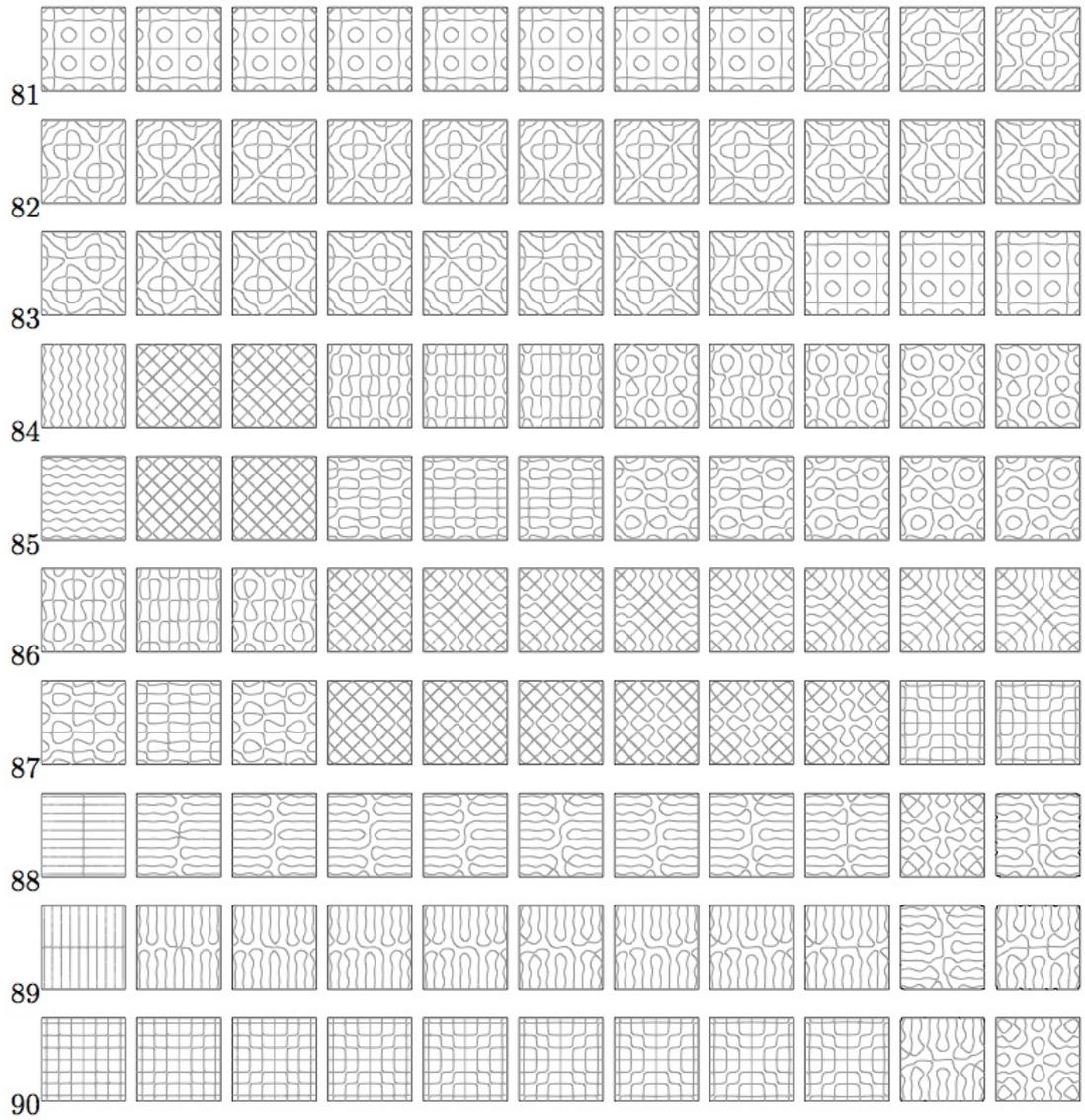


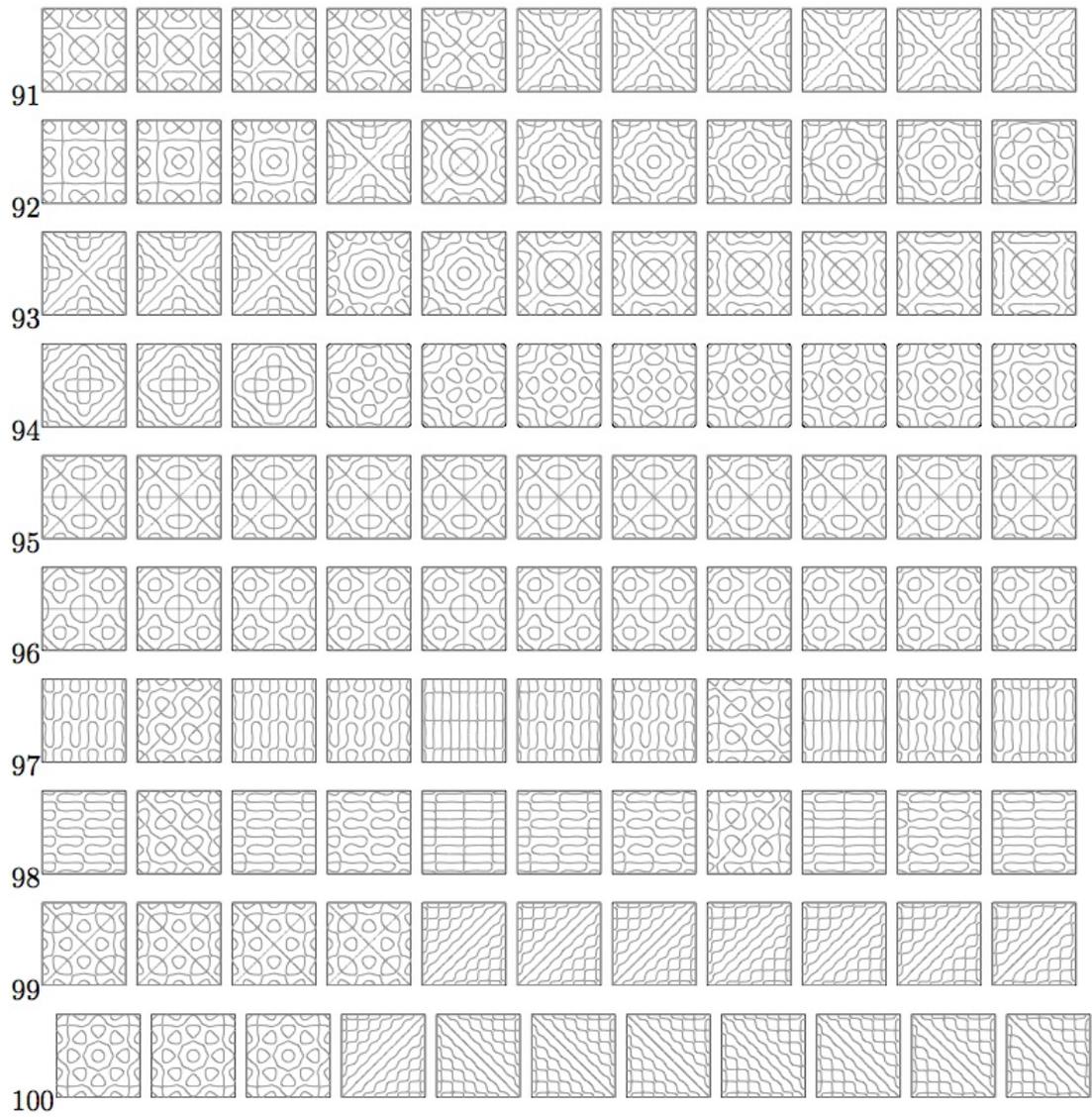


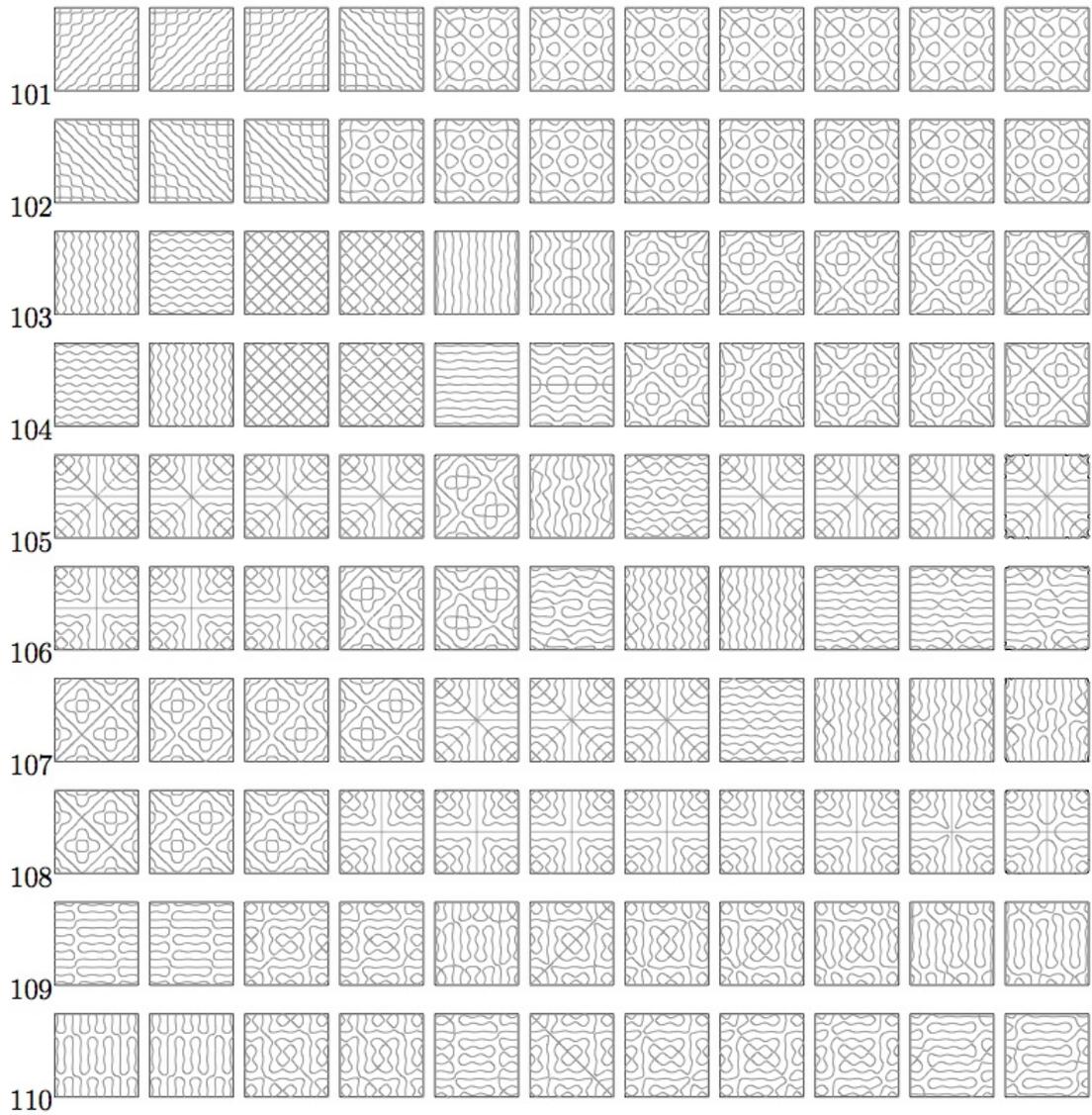


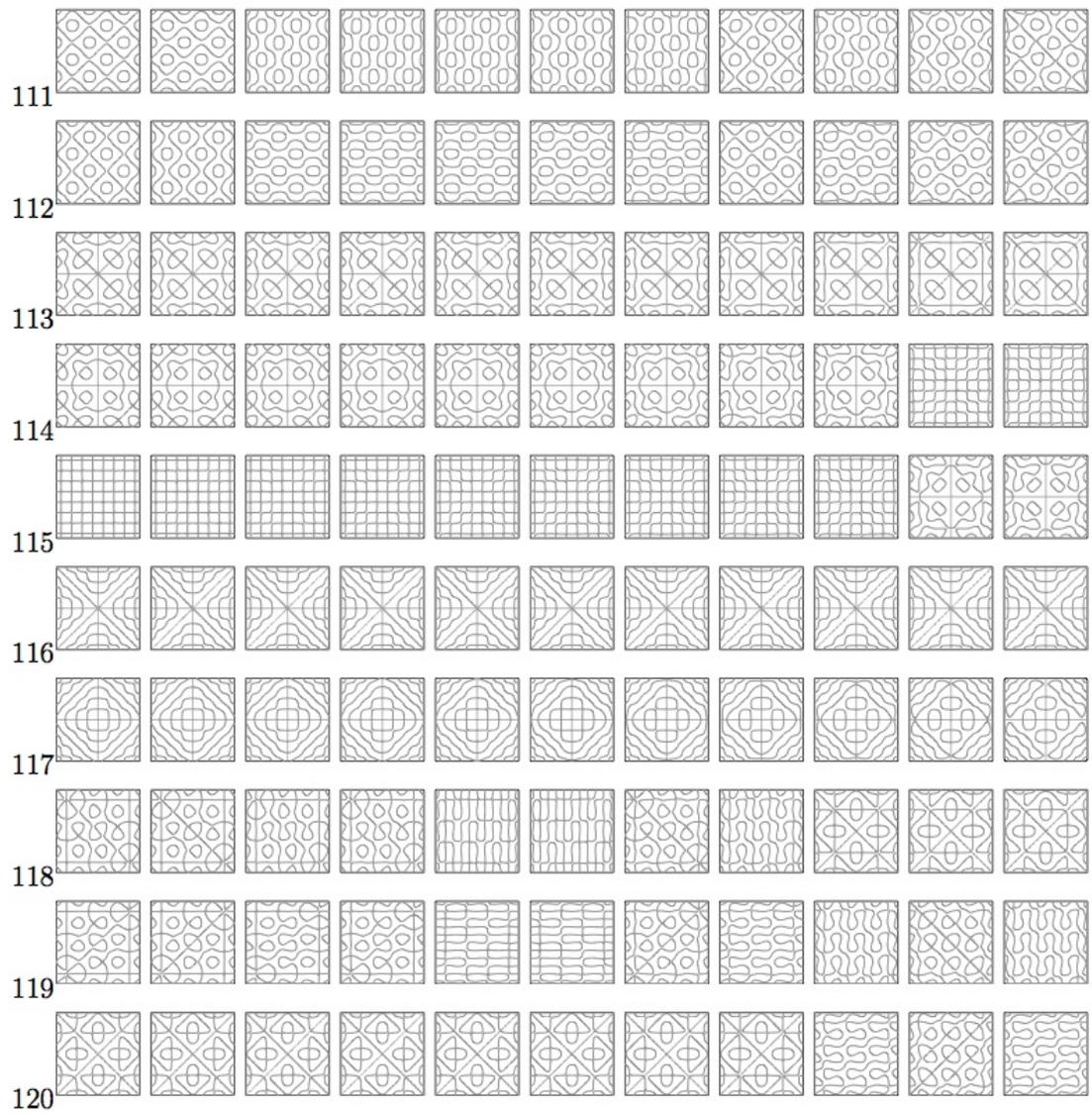


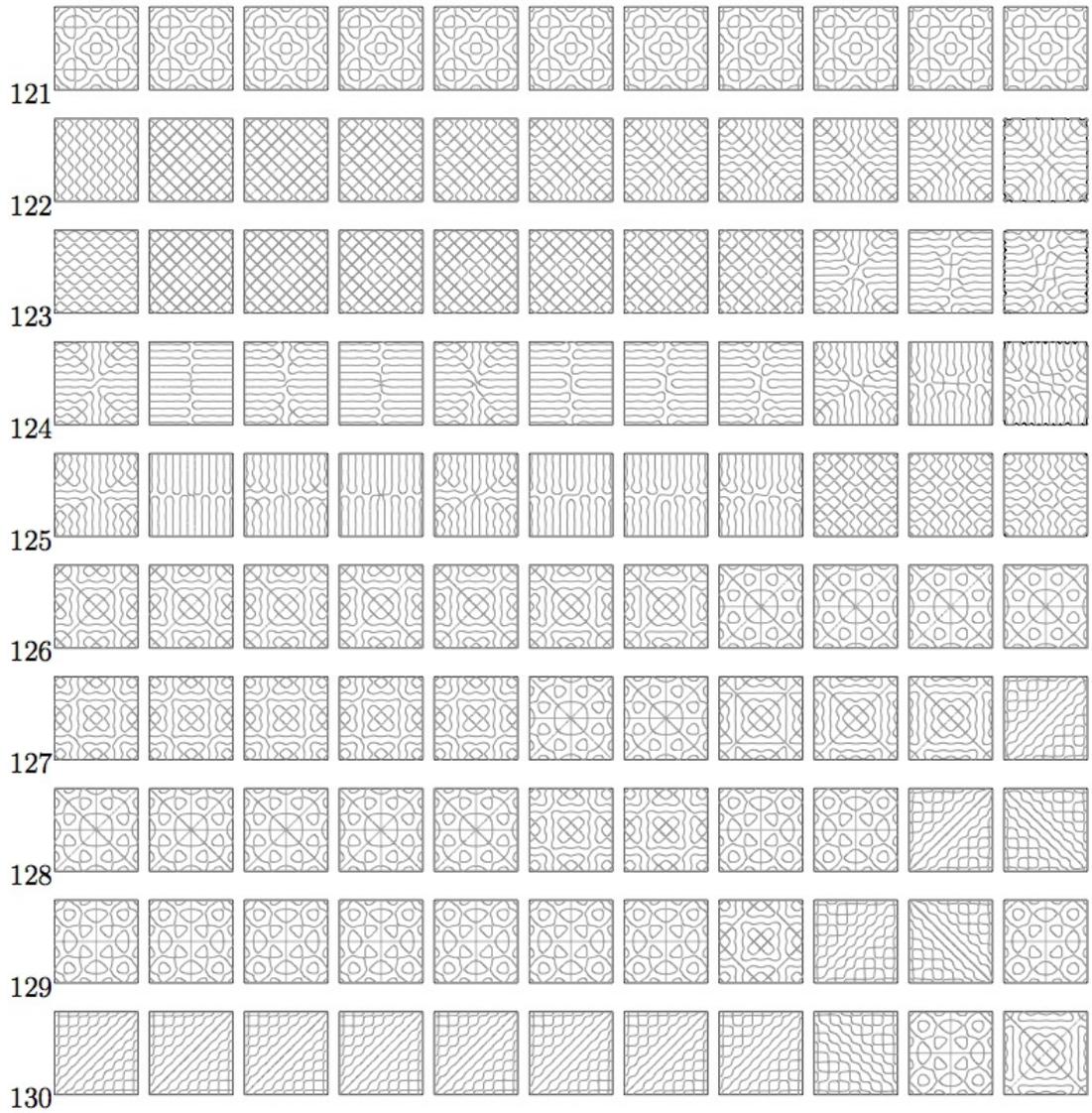


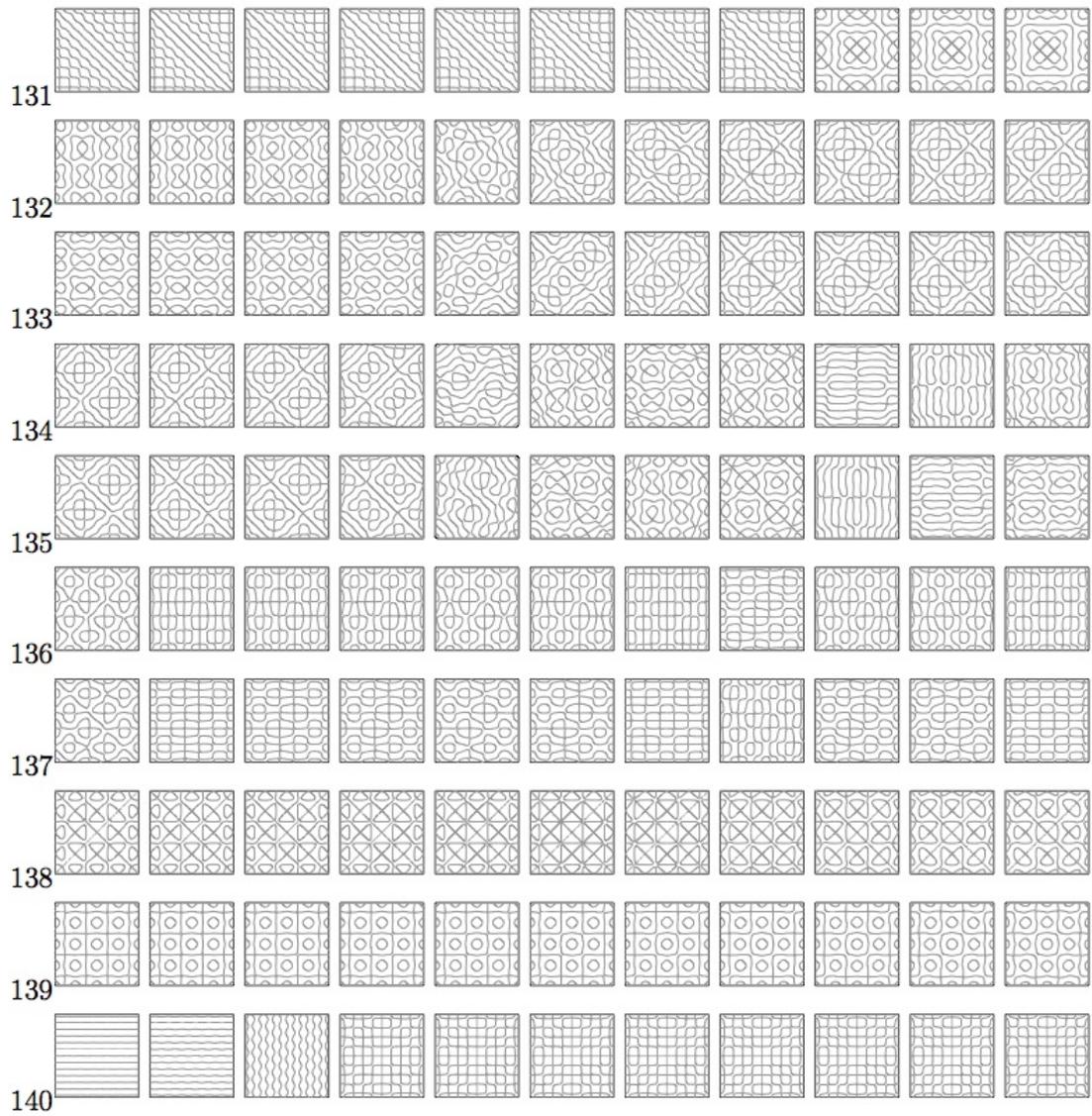


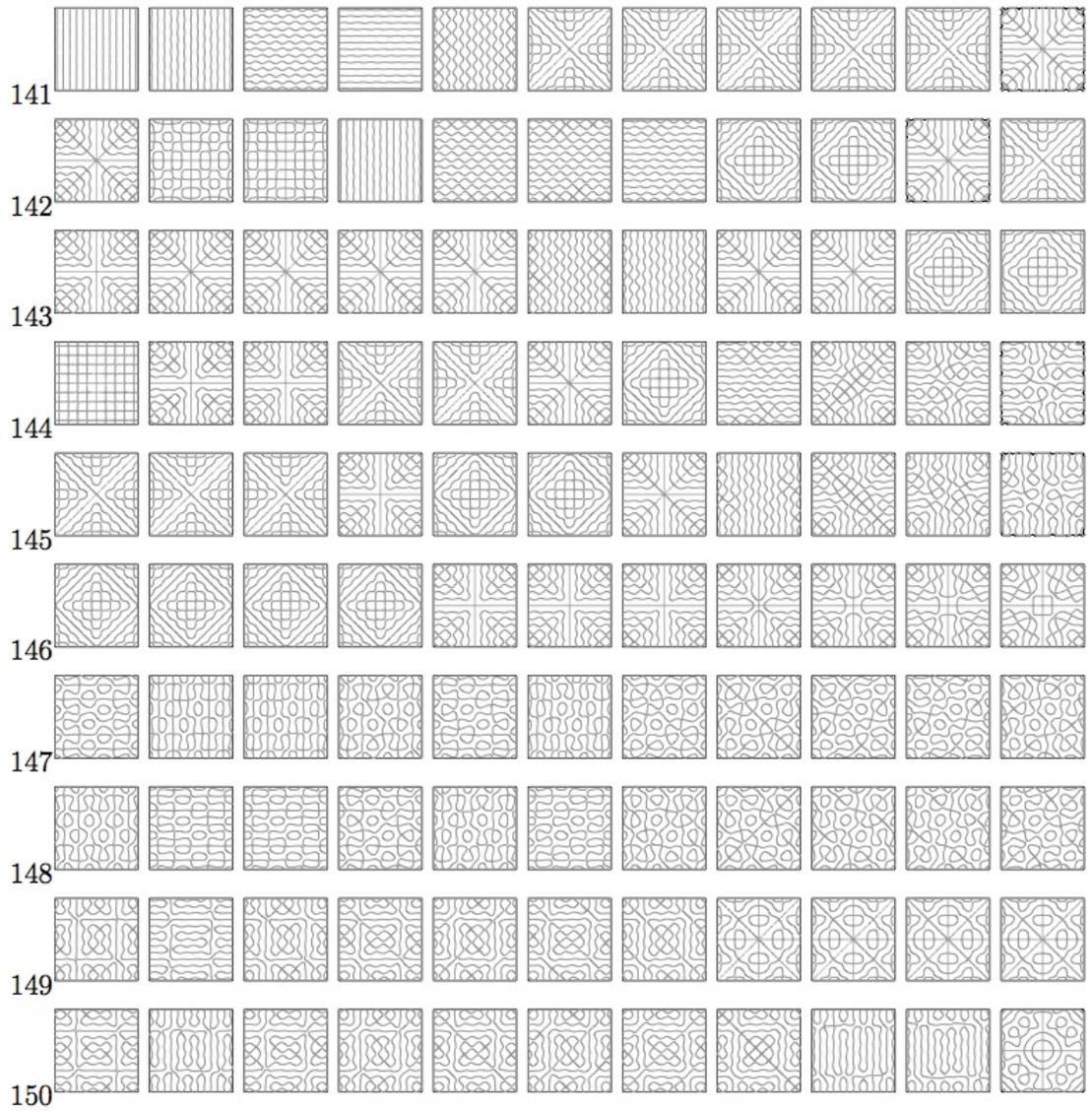


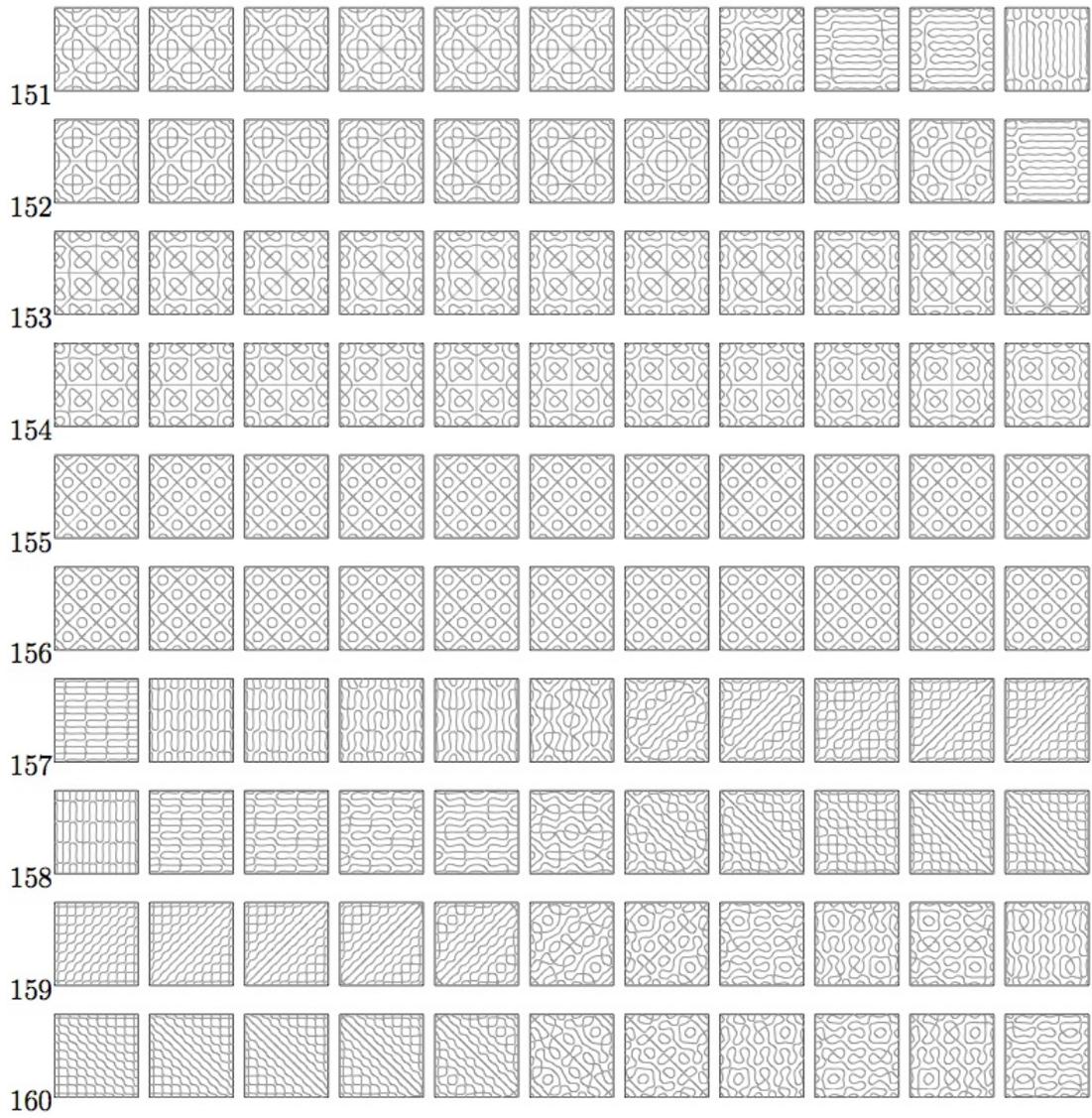


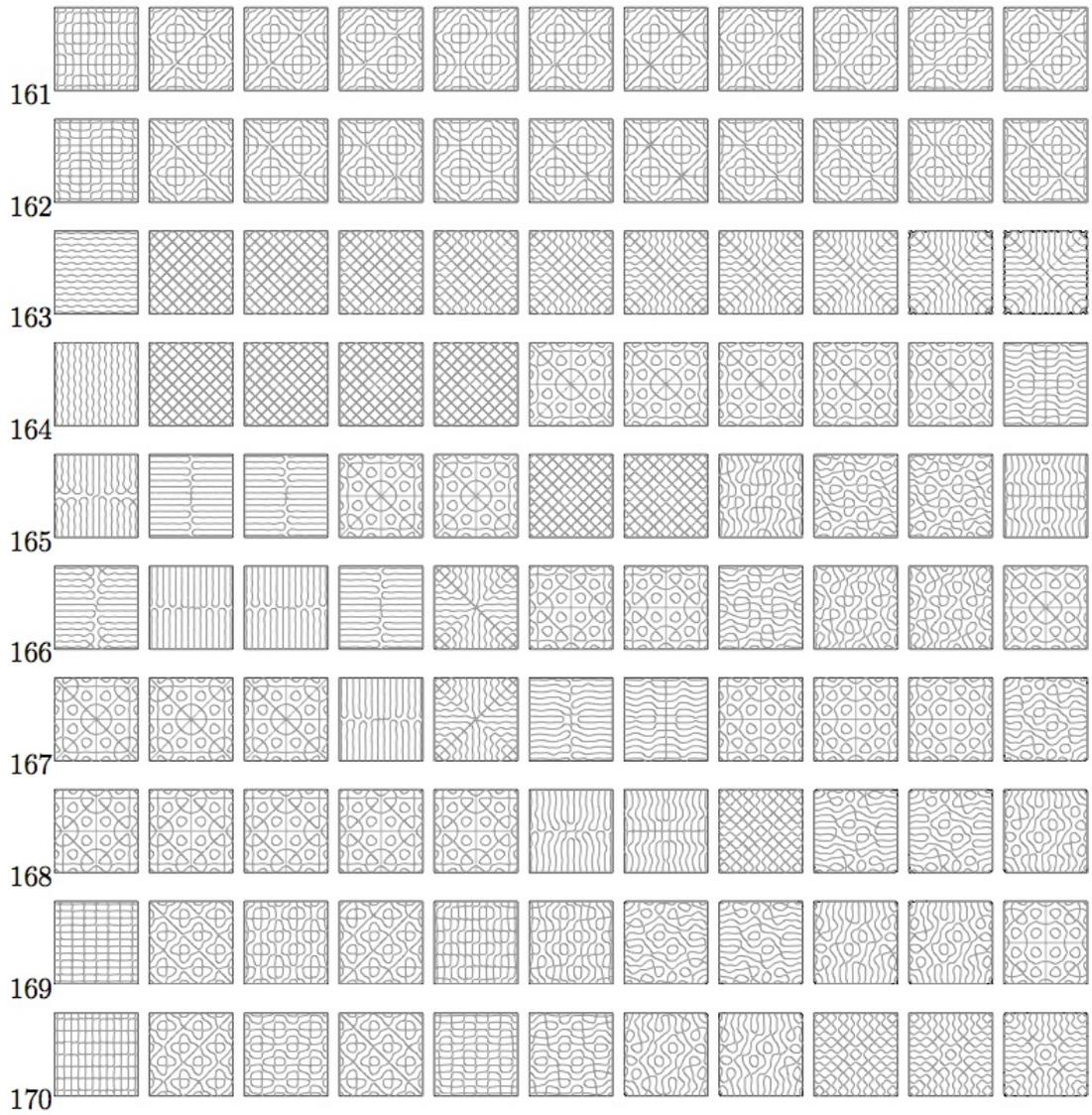


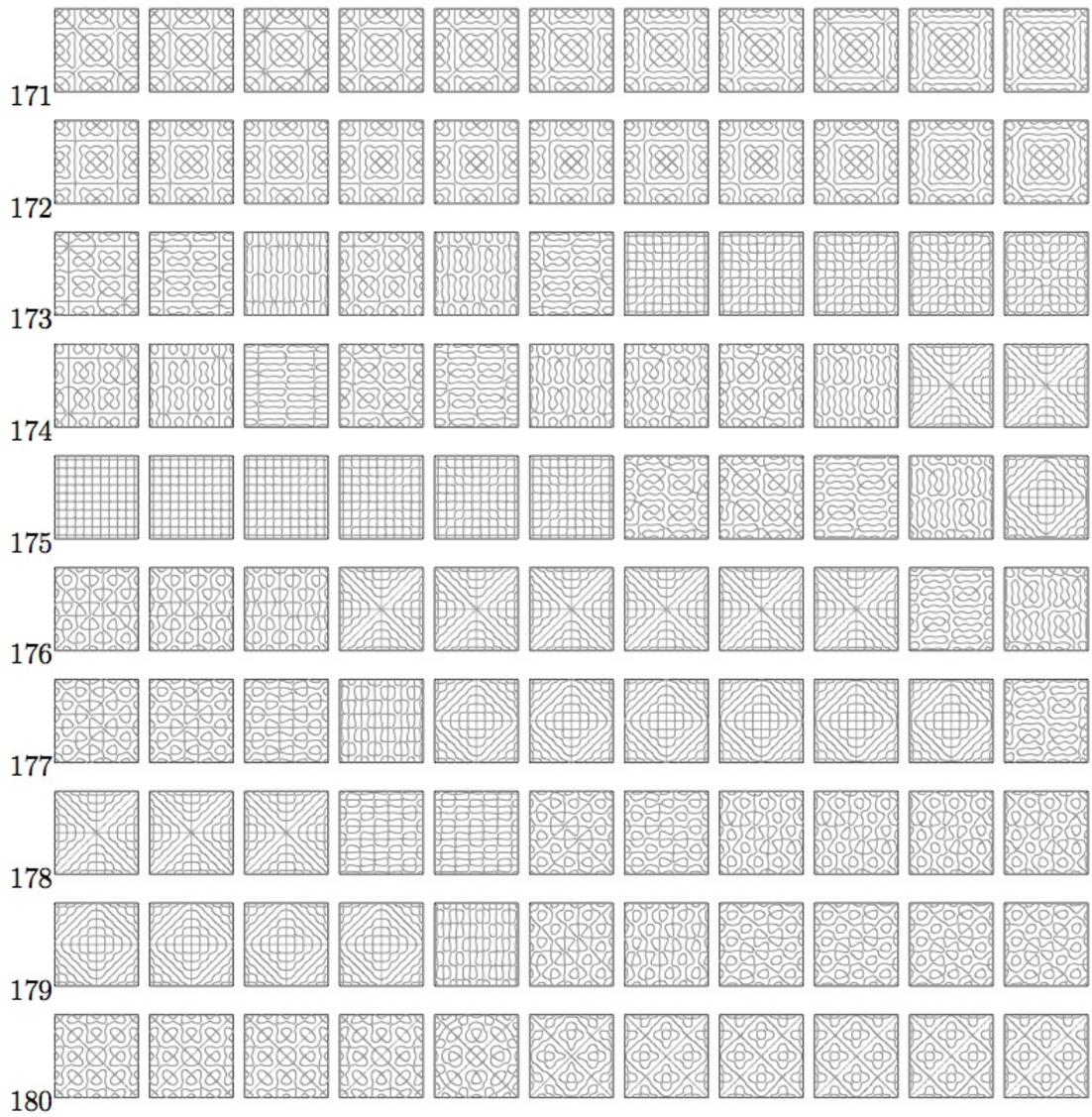


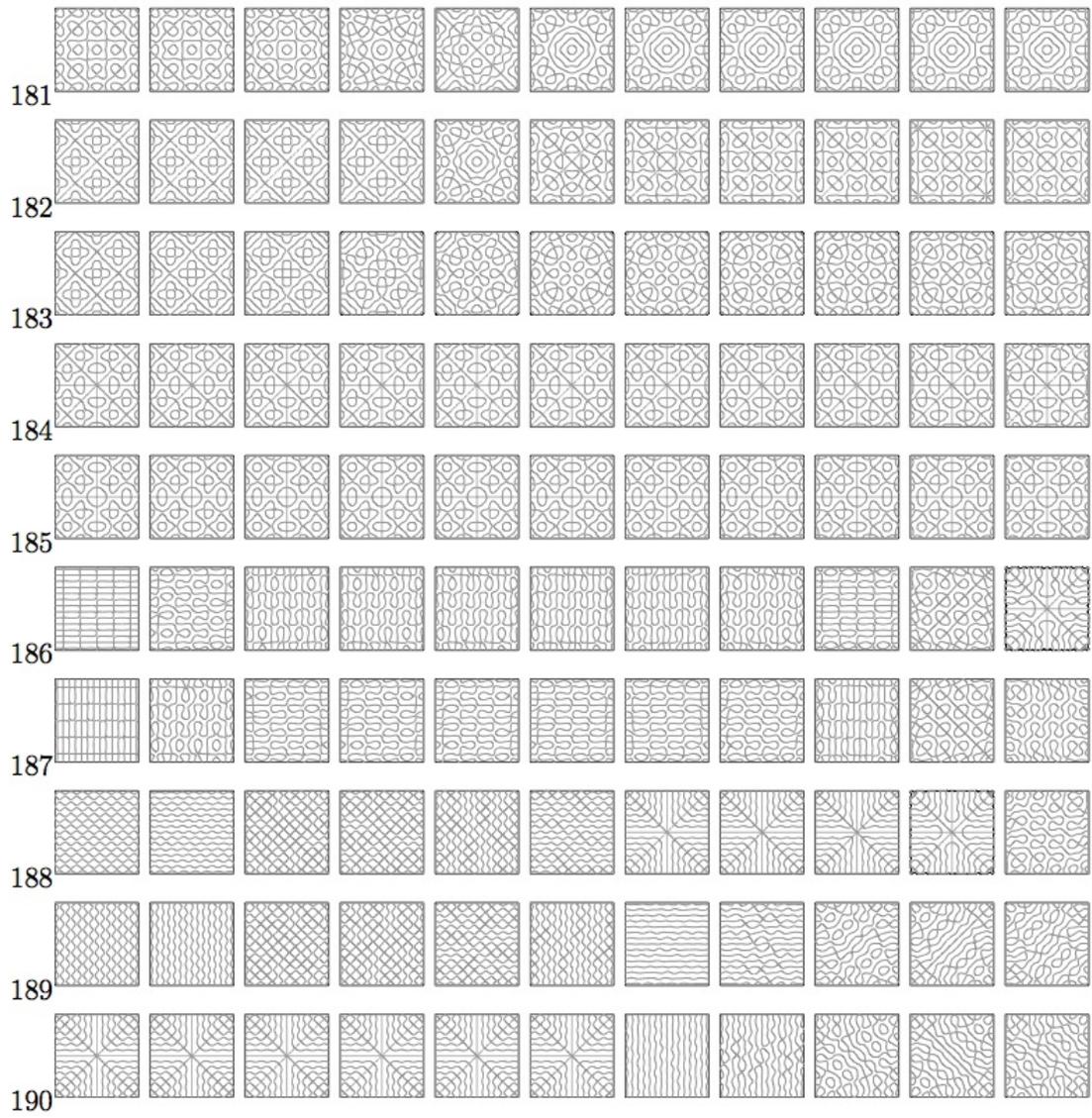


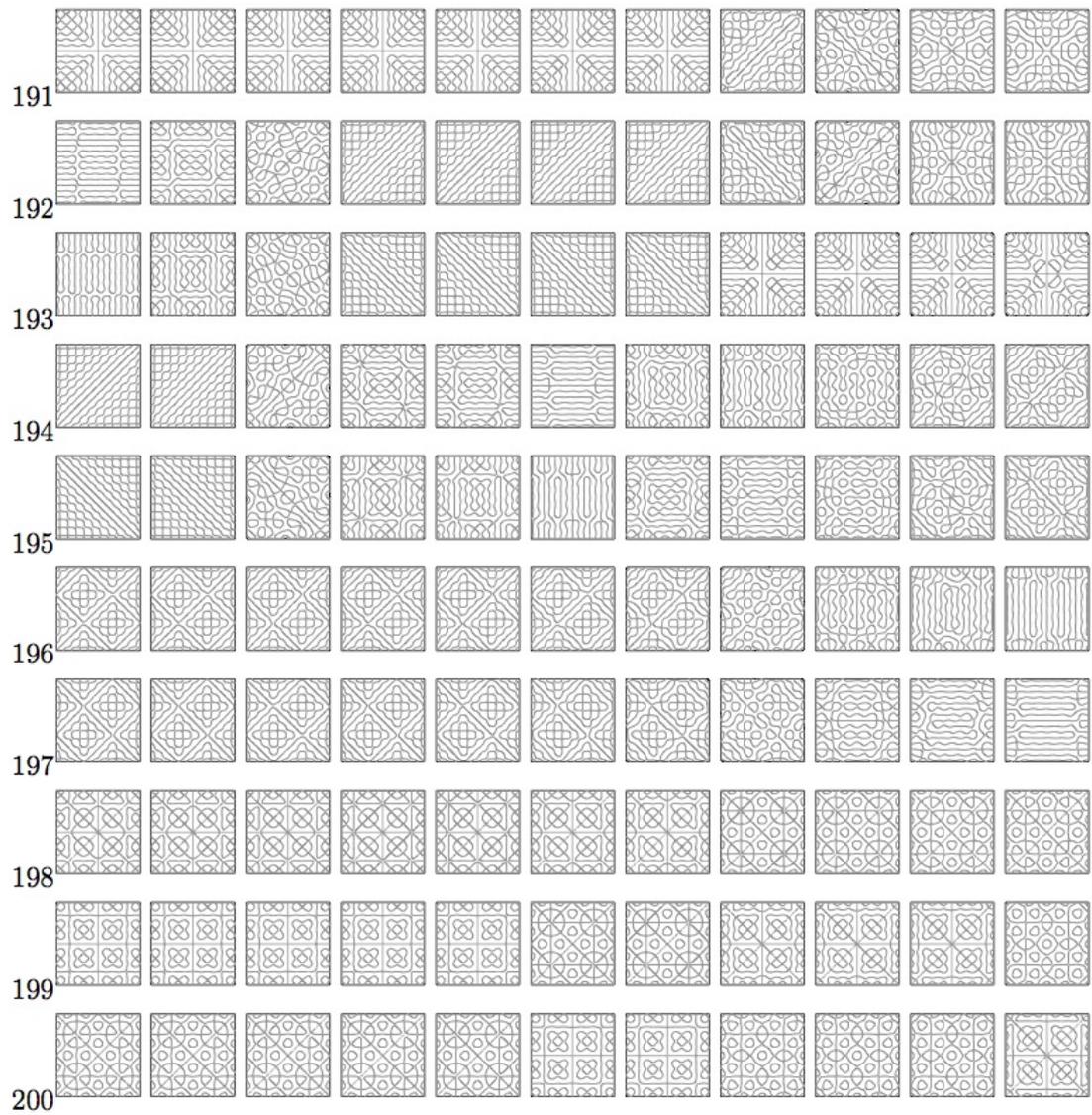






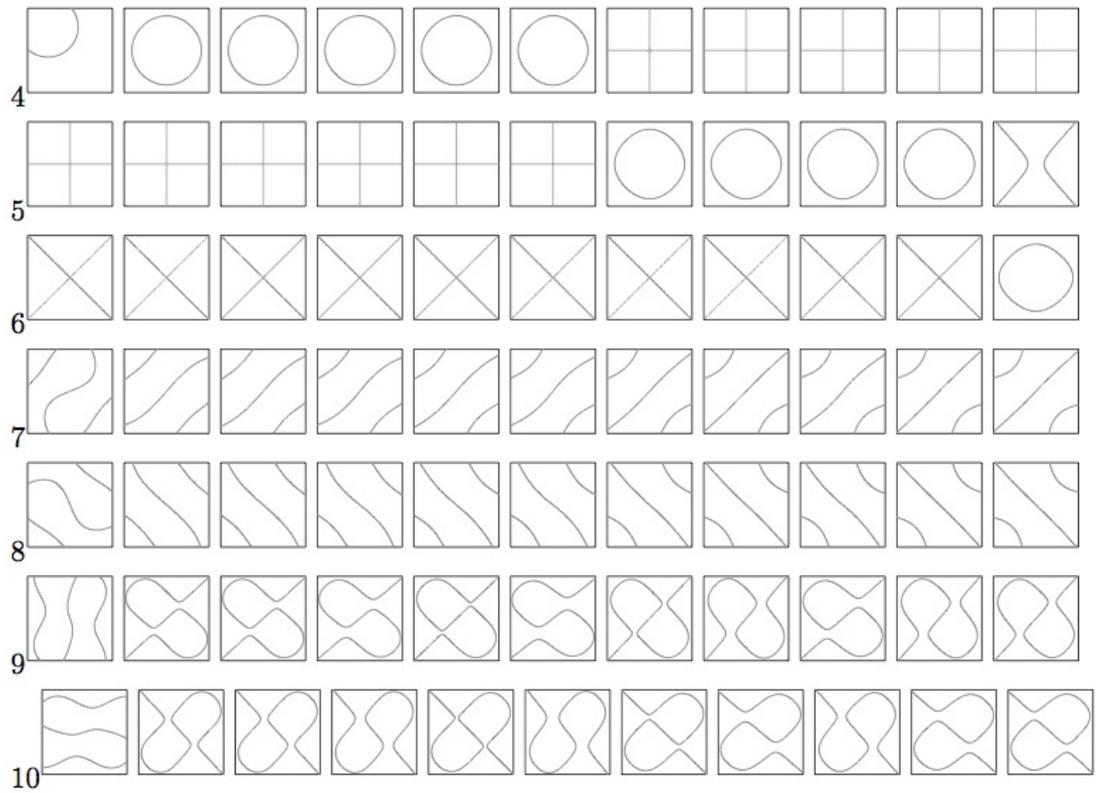


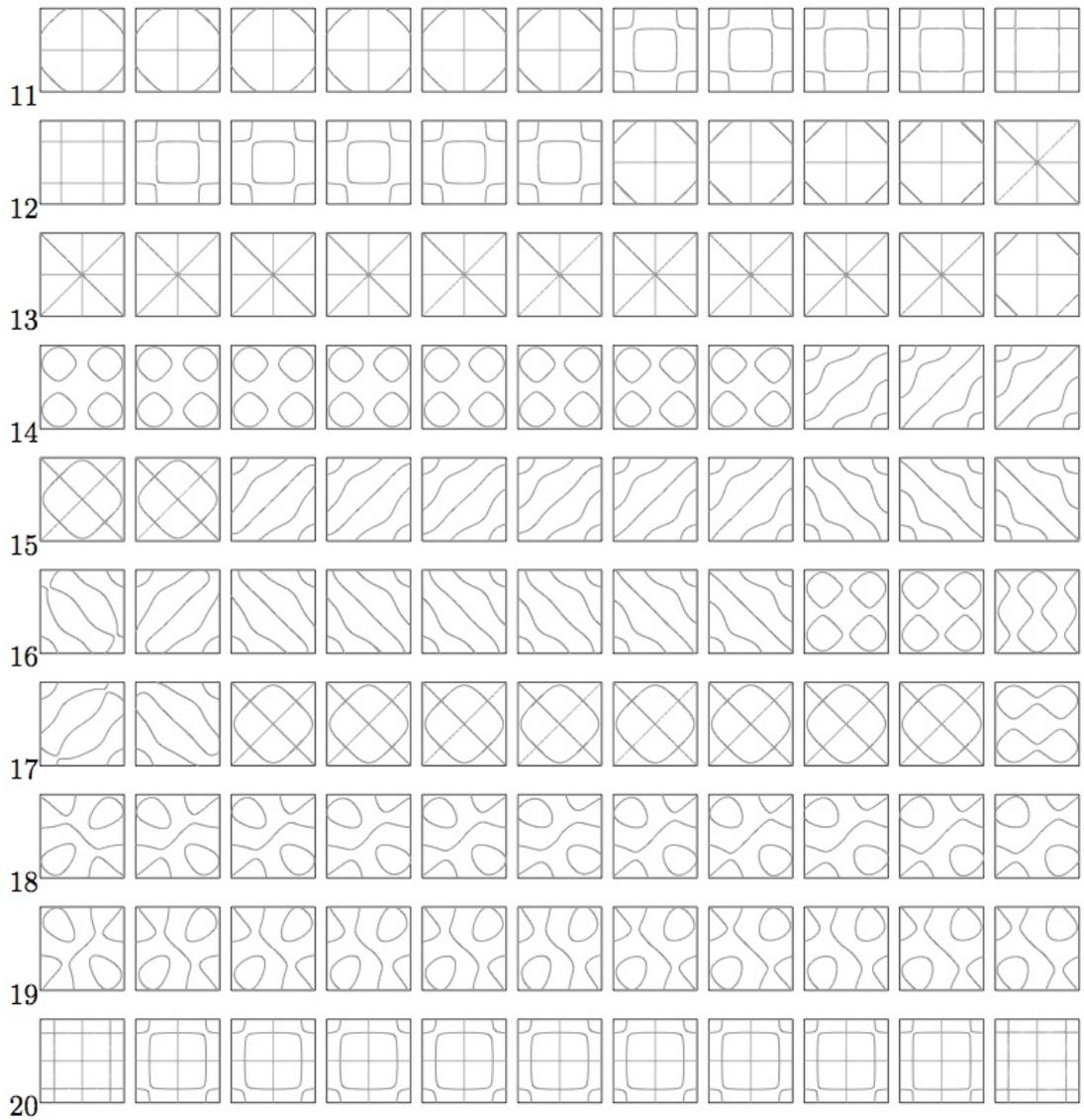


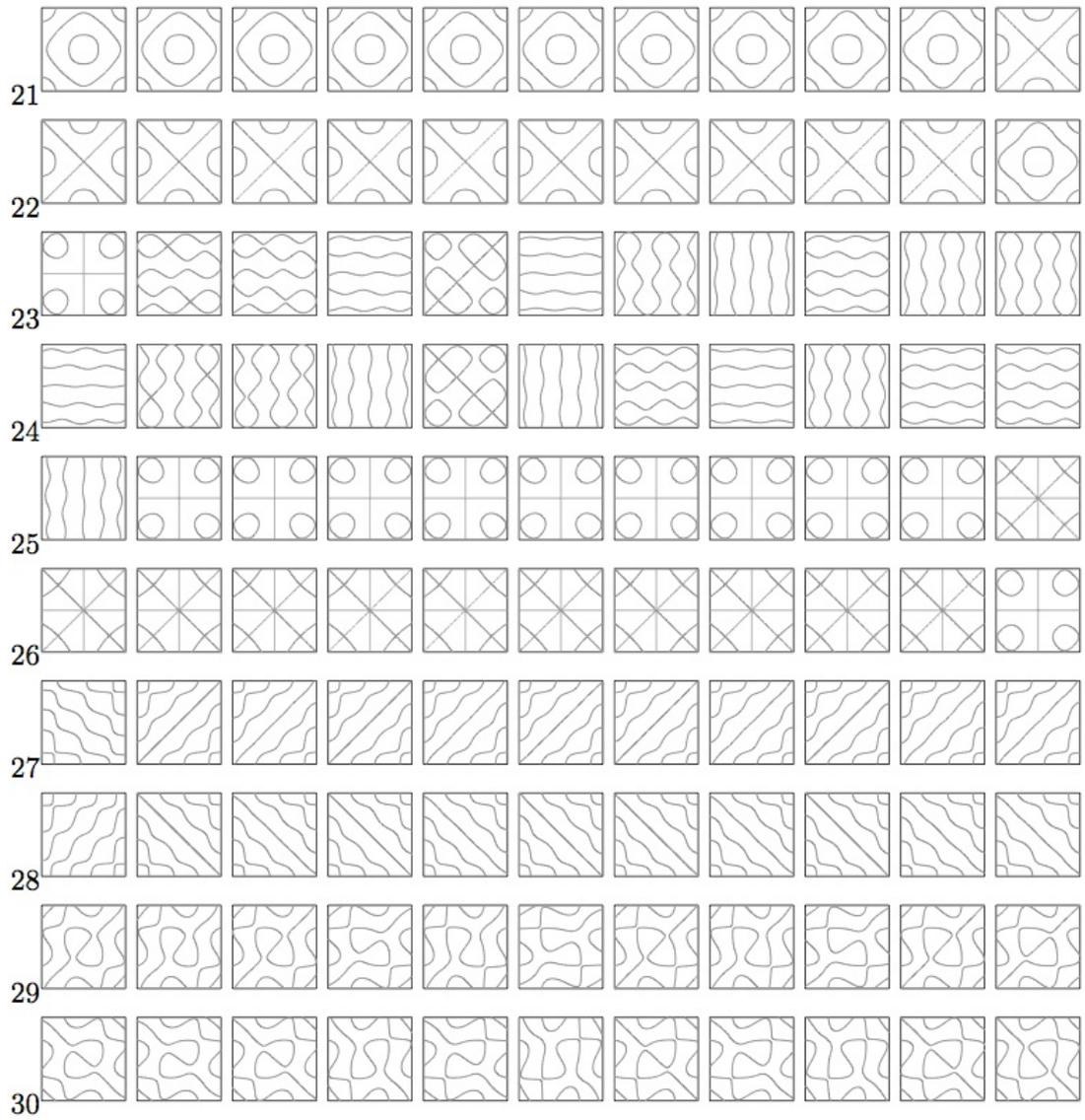


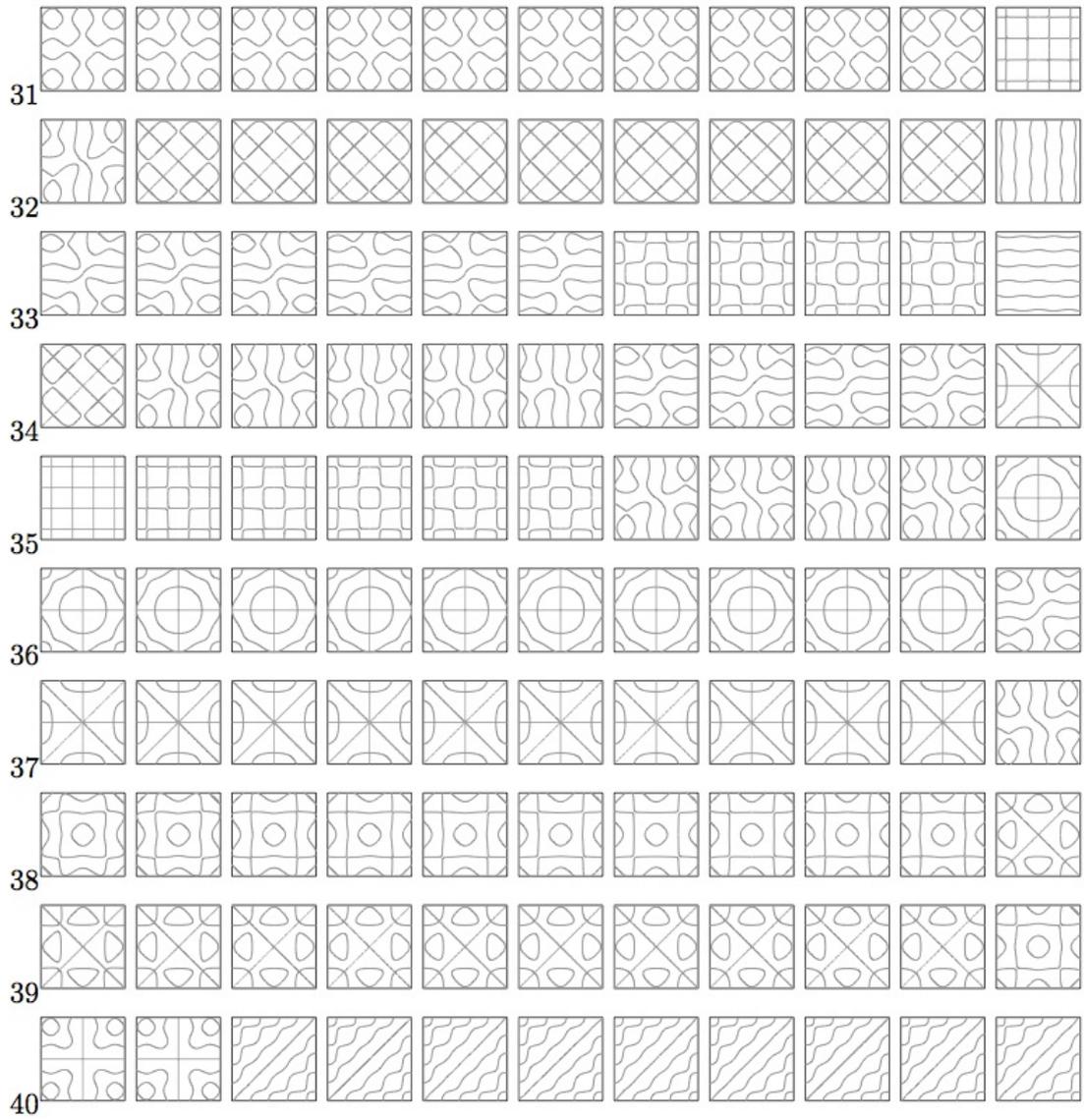
6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$

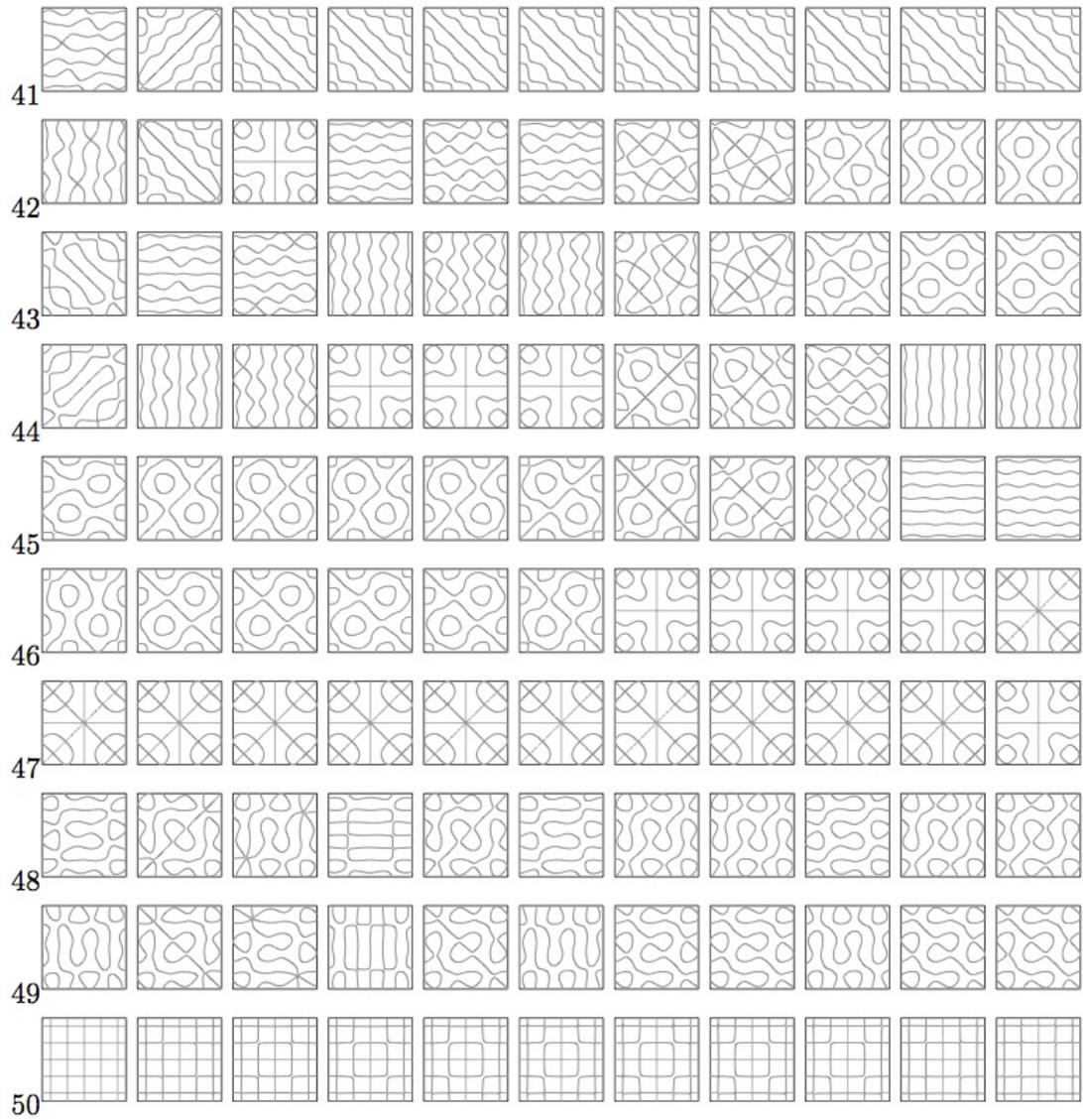
$\mu = -1 \sim 0$ まで 0.1 刻みの Poisson 比に対する結果を掲載する.

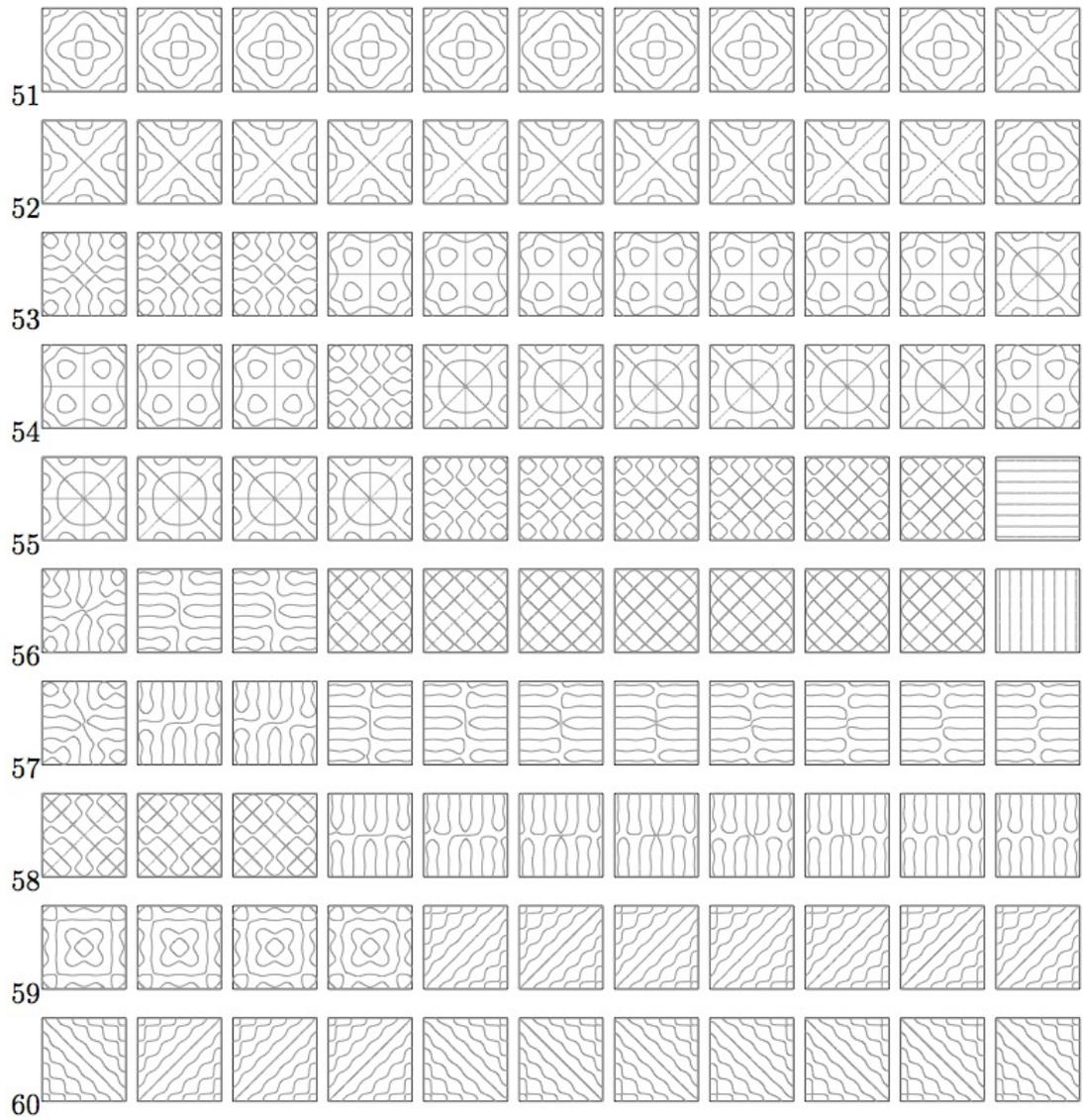


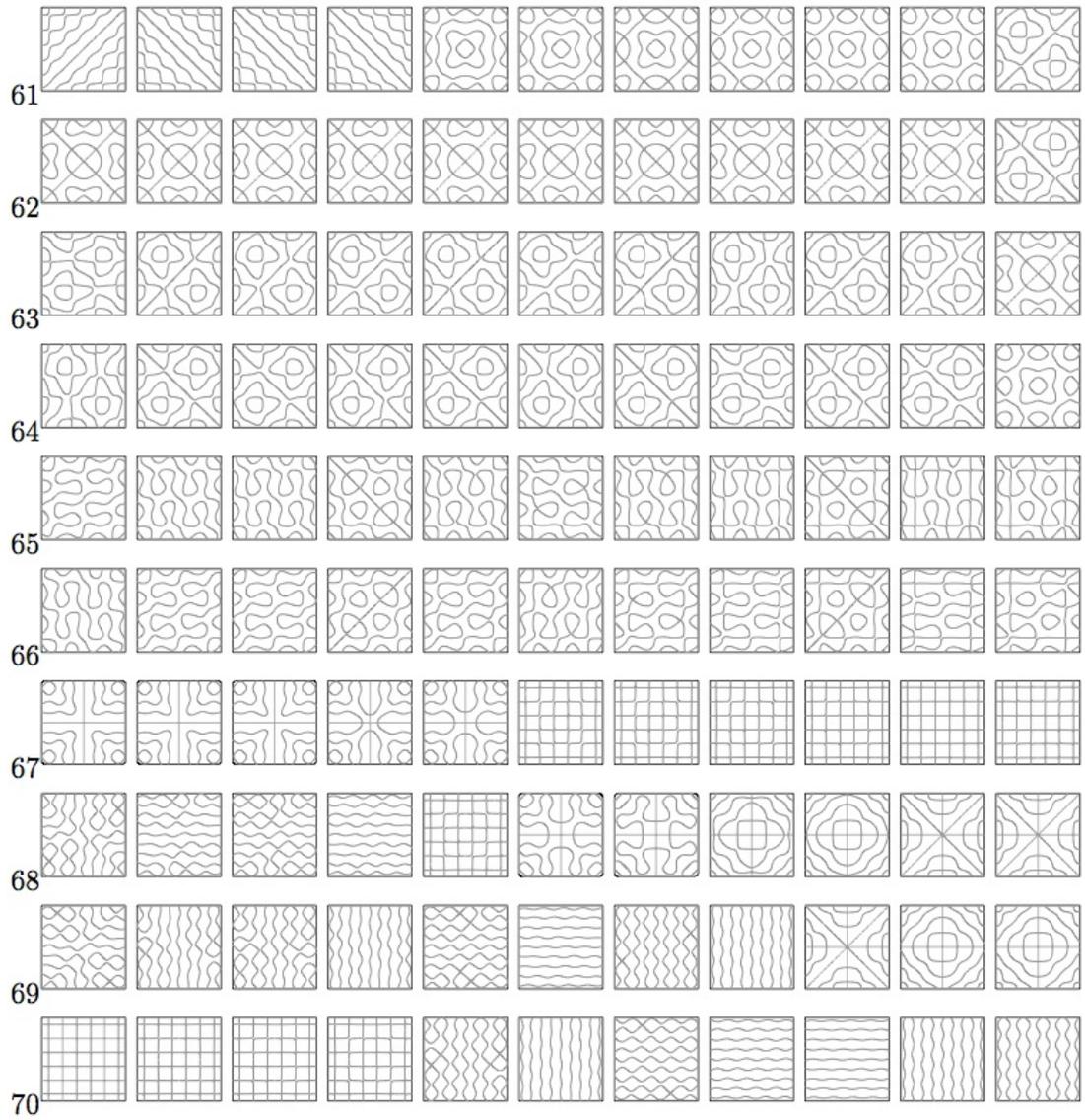




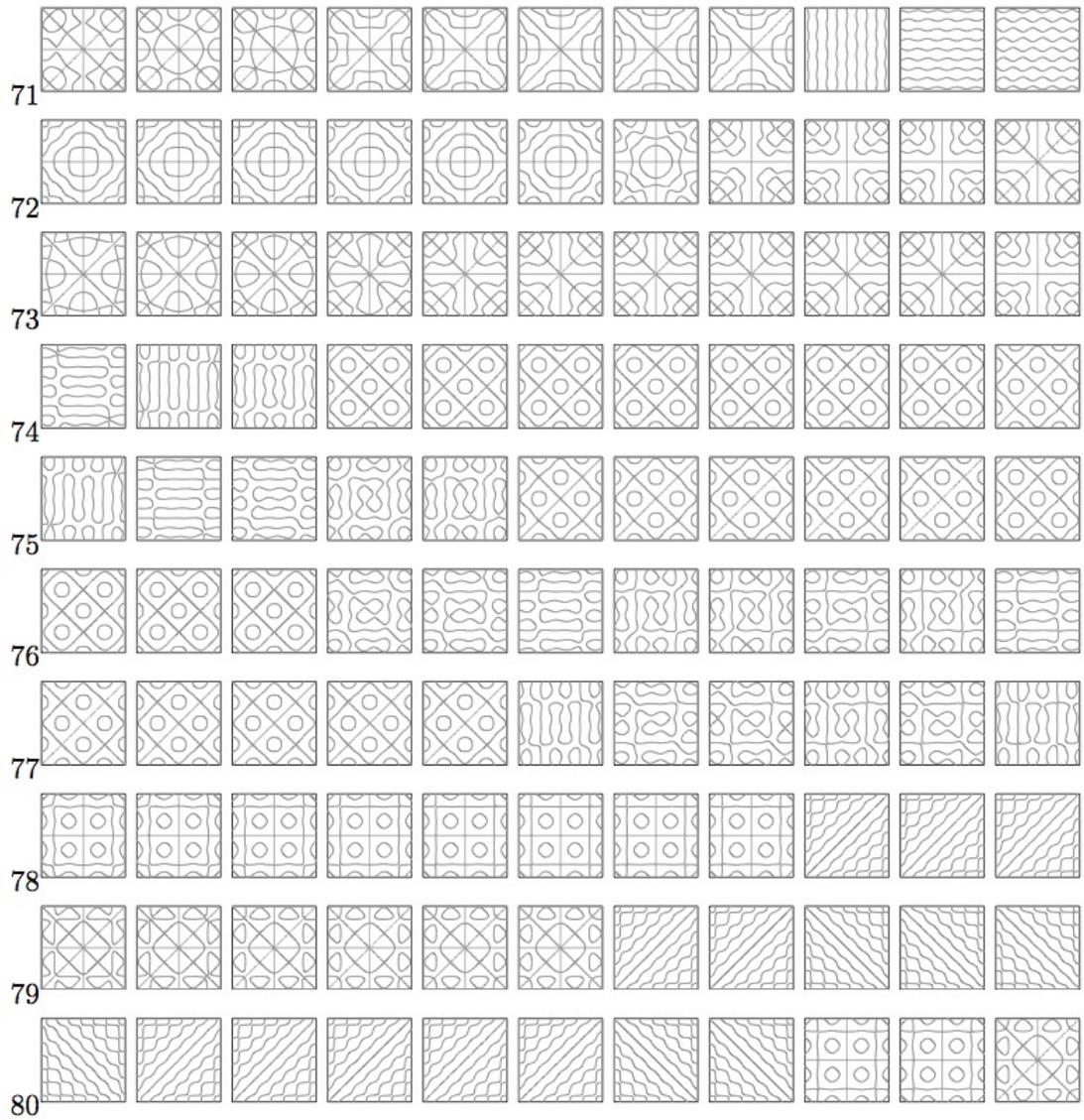


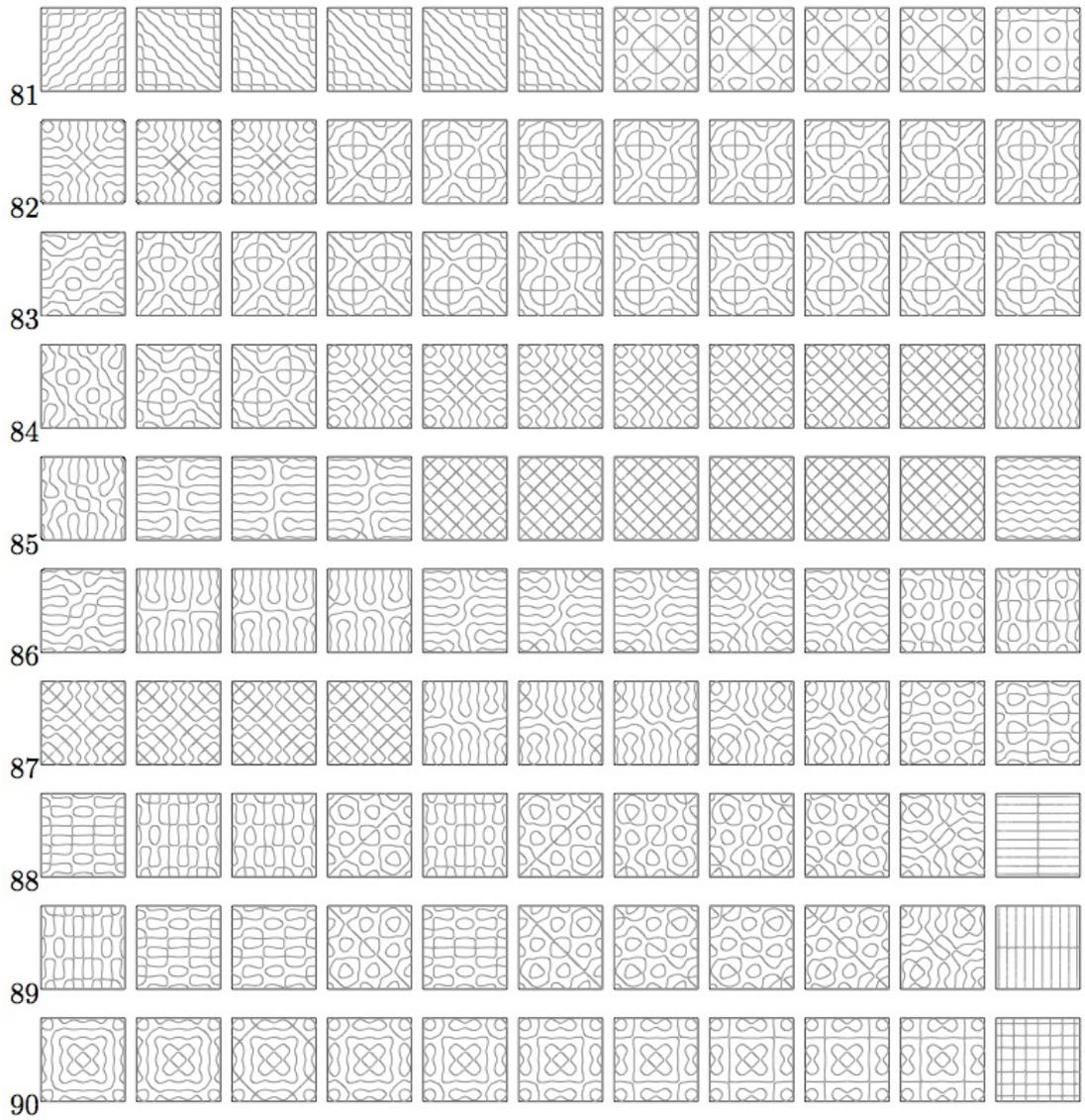




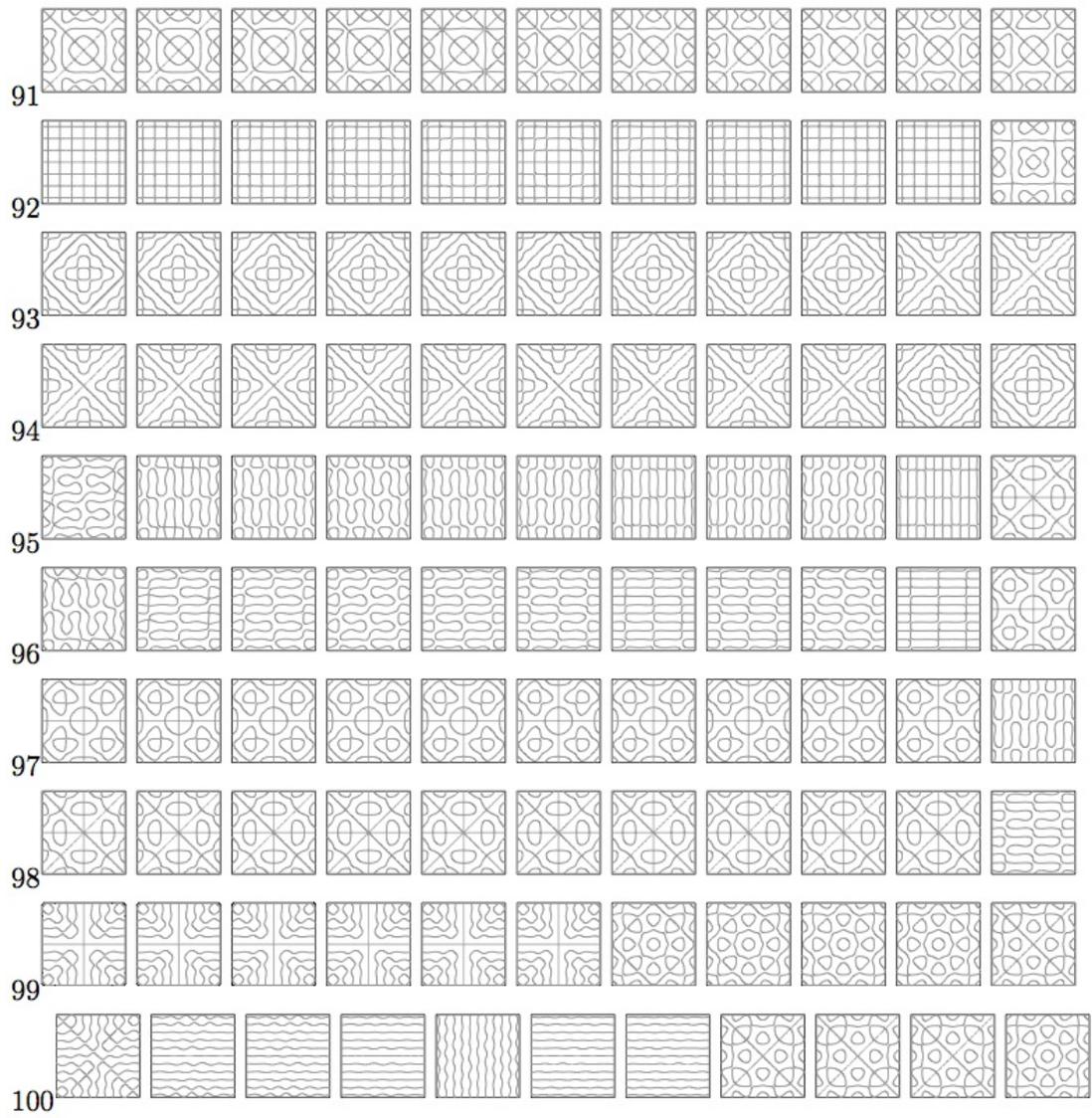


6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形

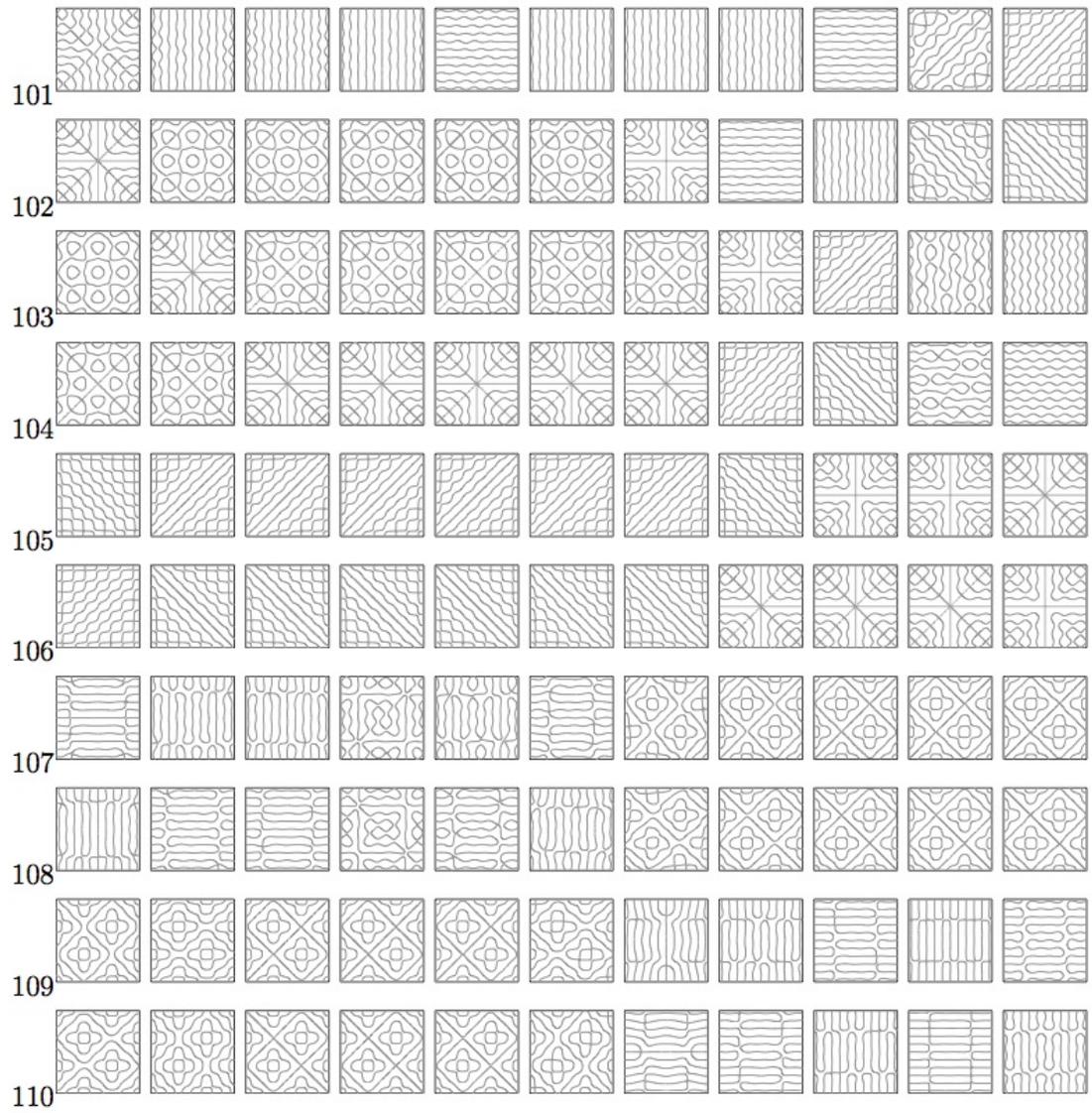




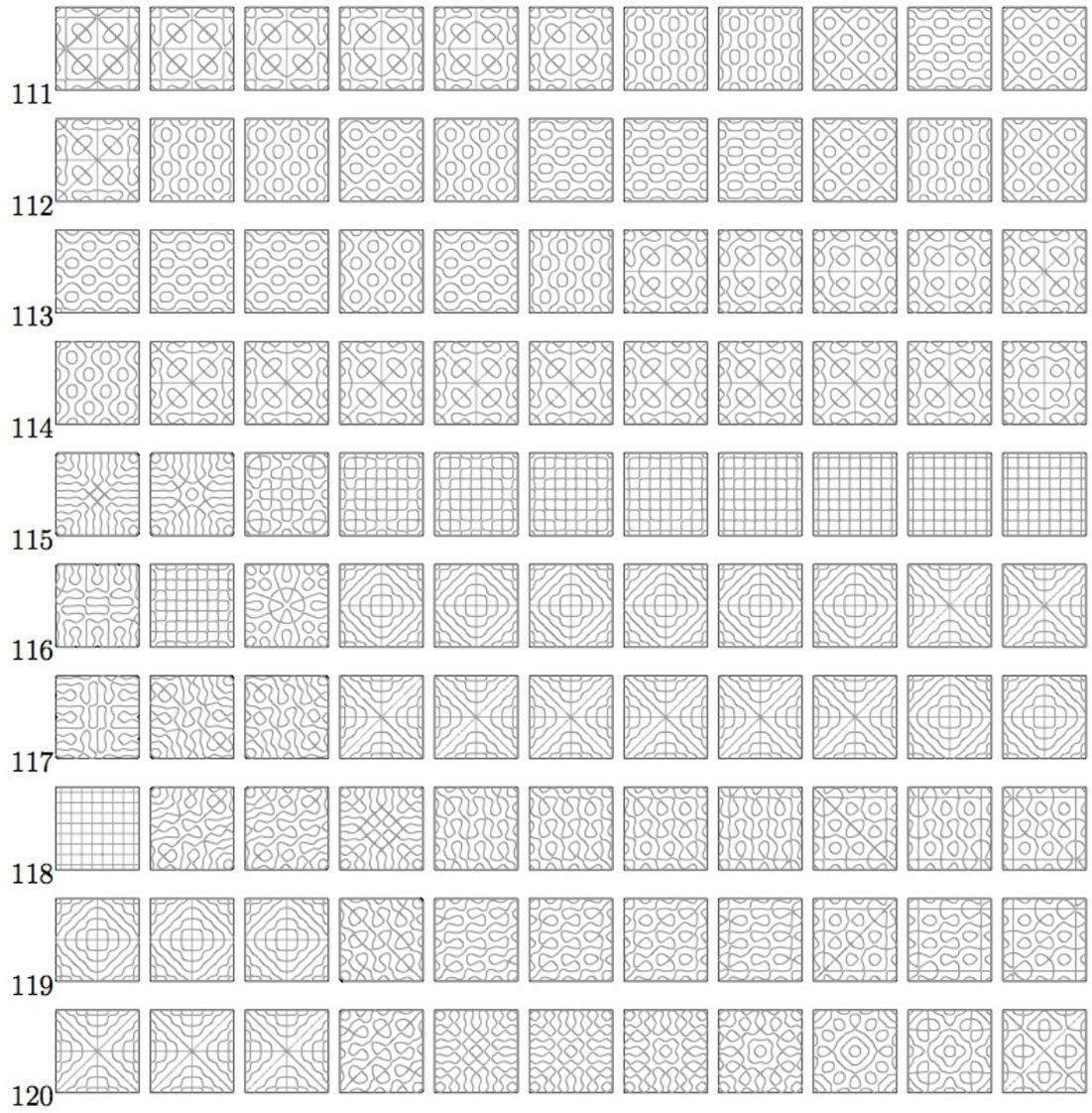
6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形



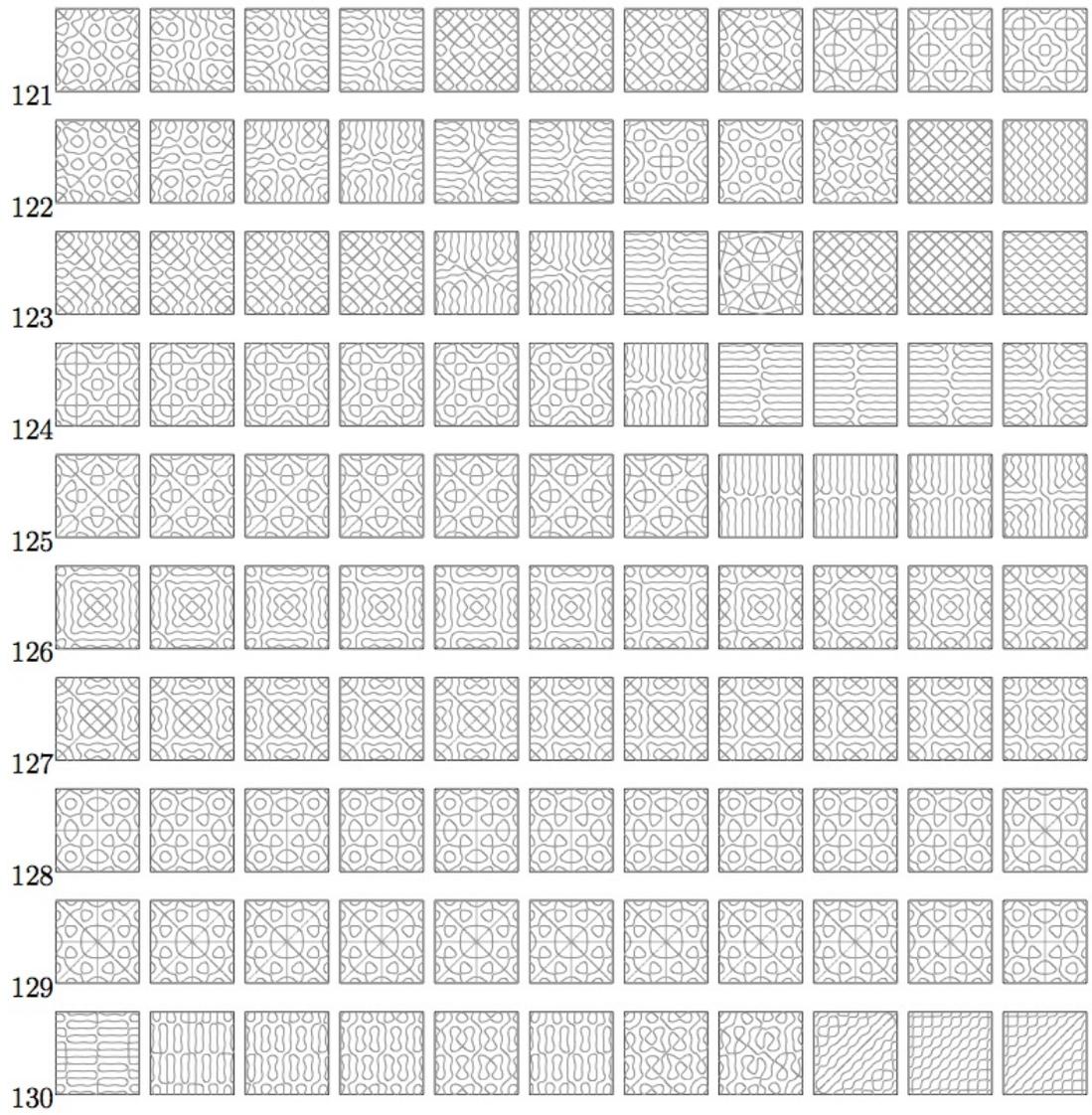
6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形



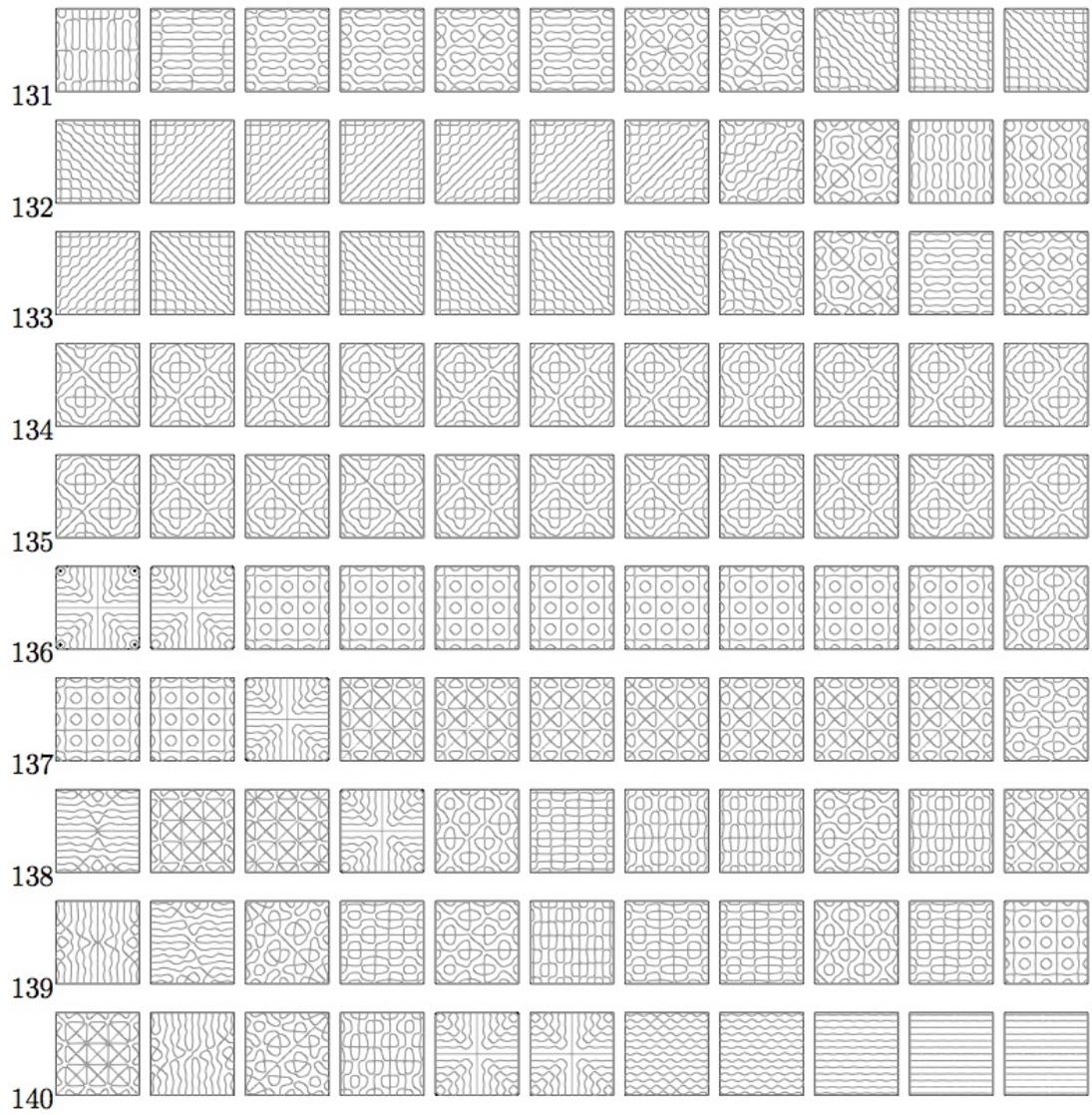
6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形



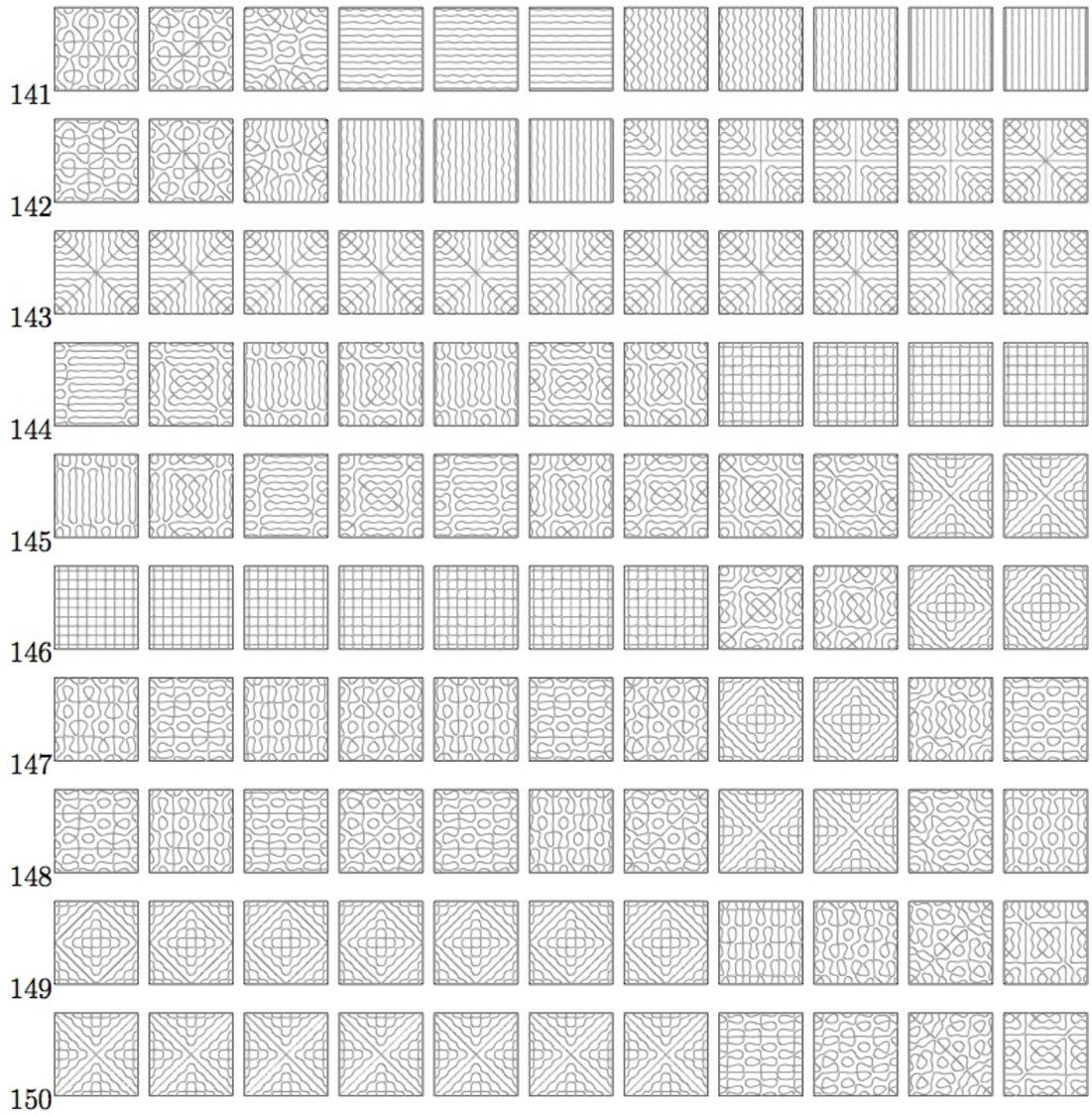
6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形

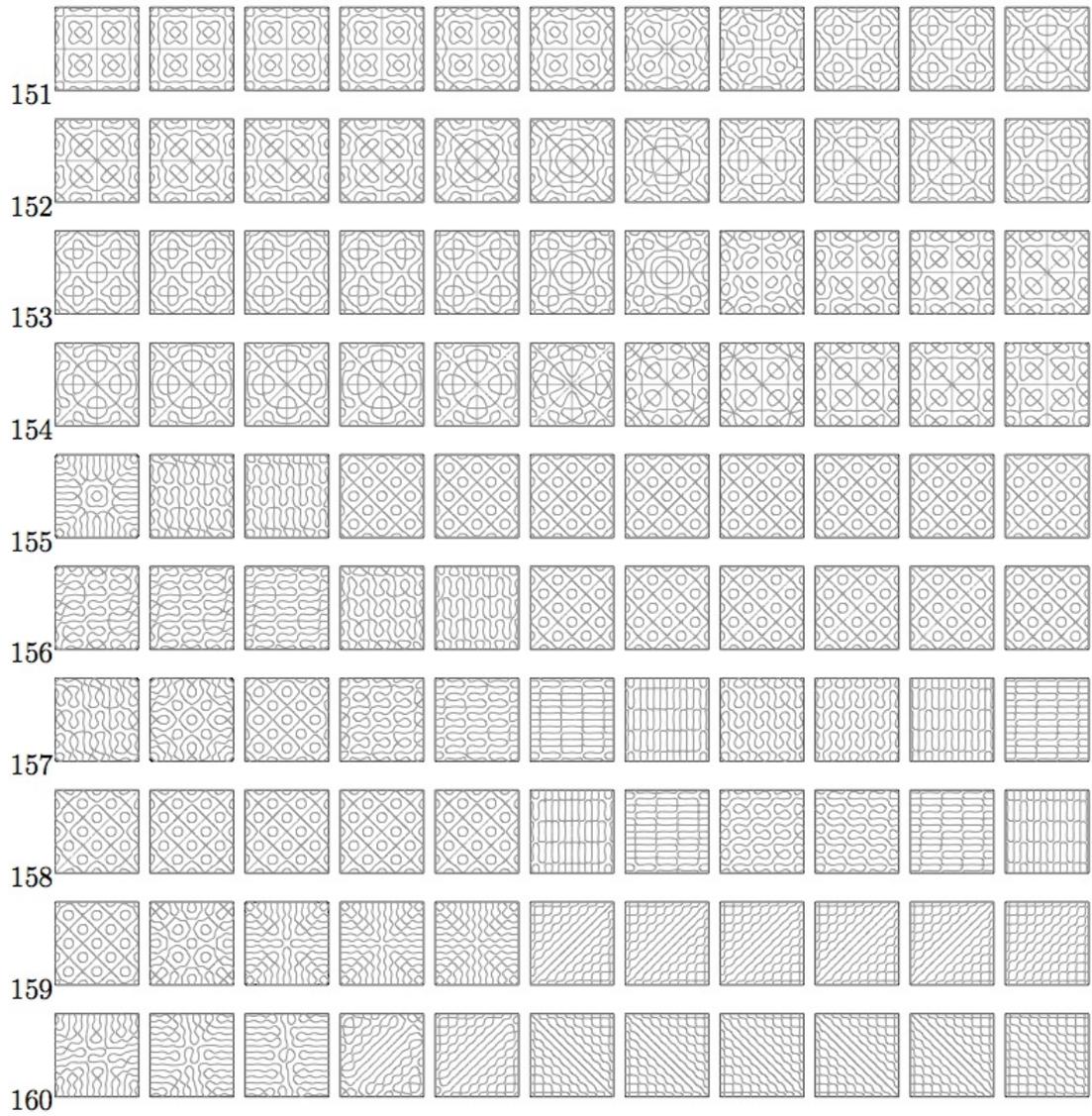


6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形

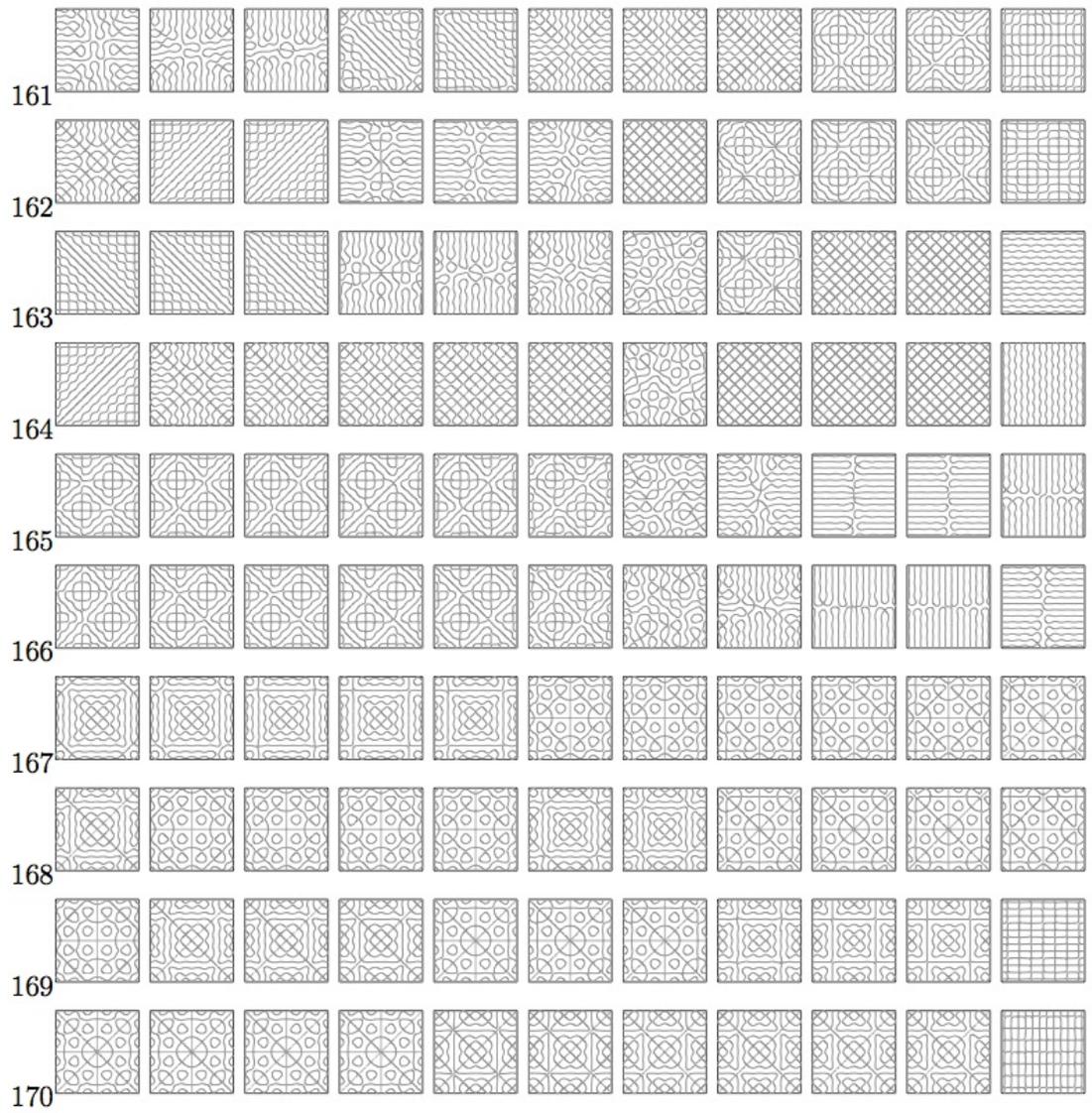


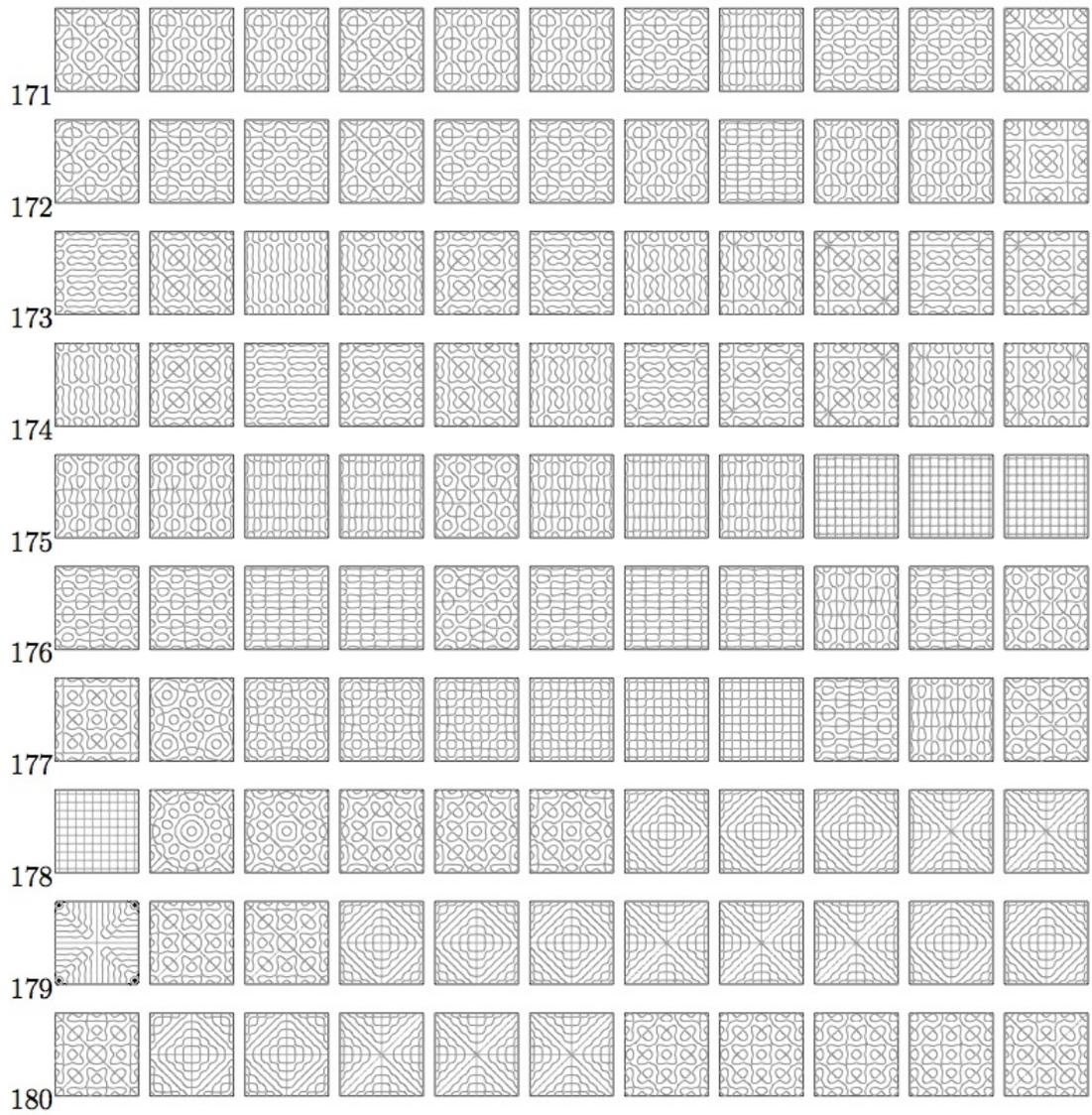
6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形



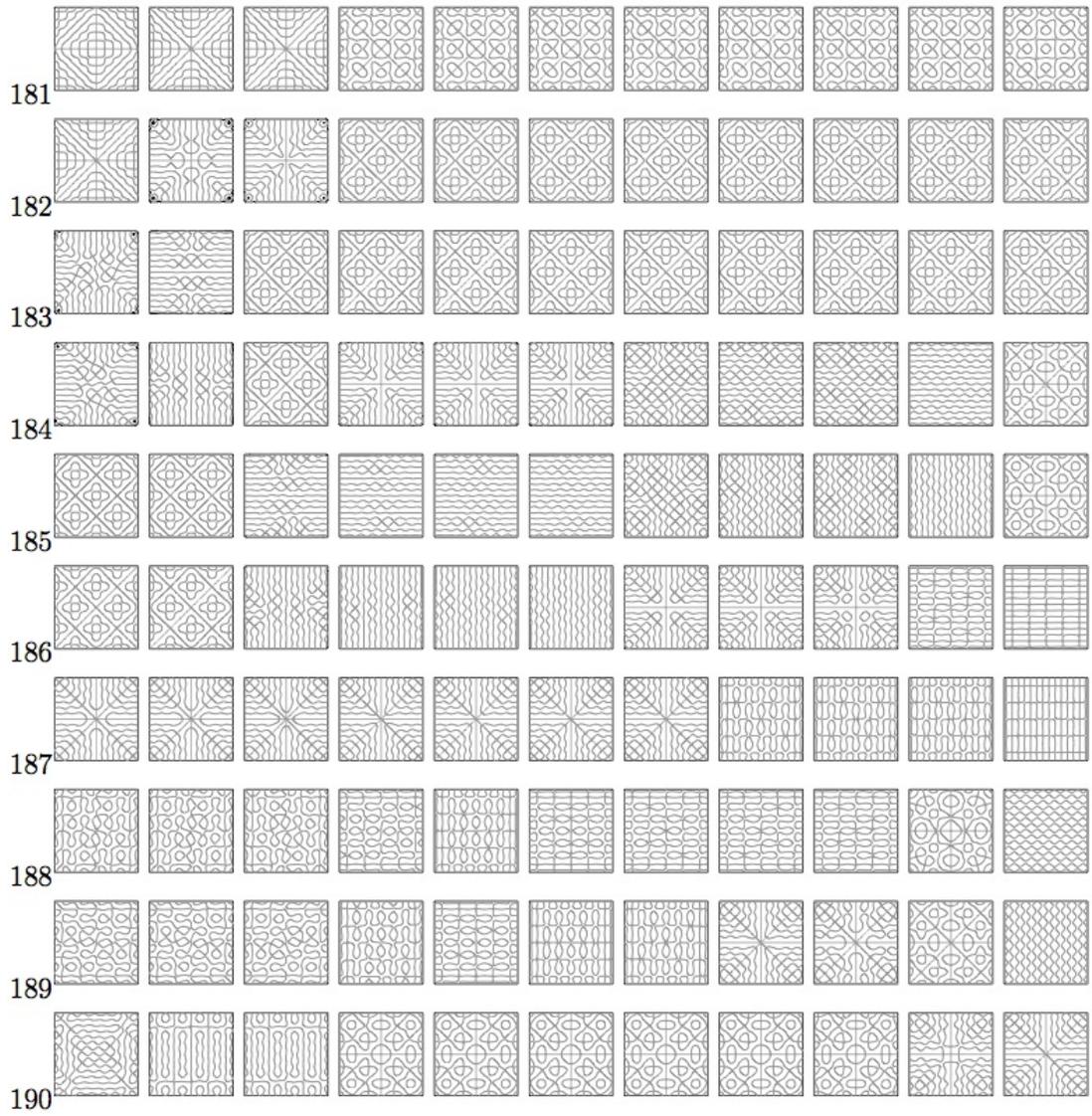


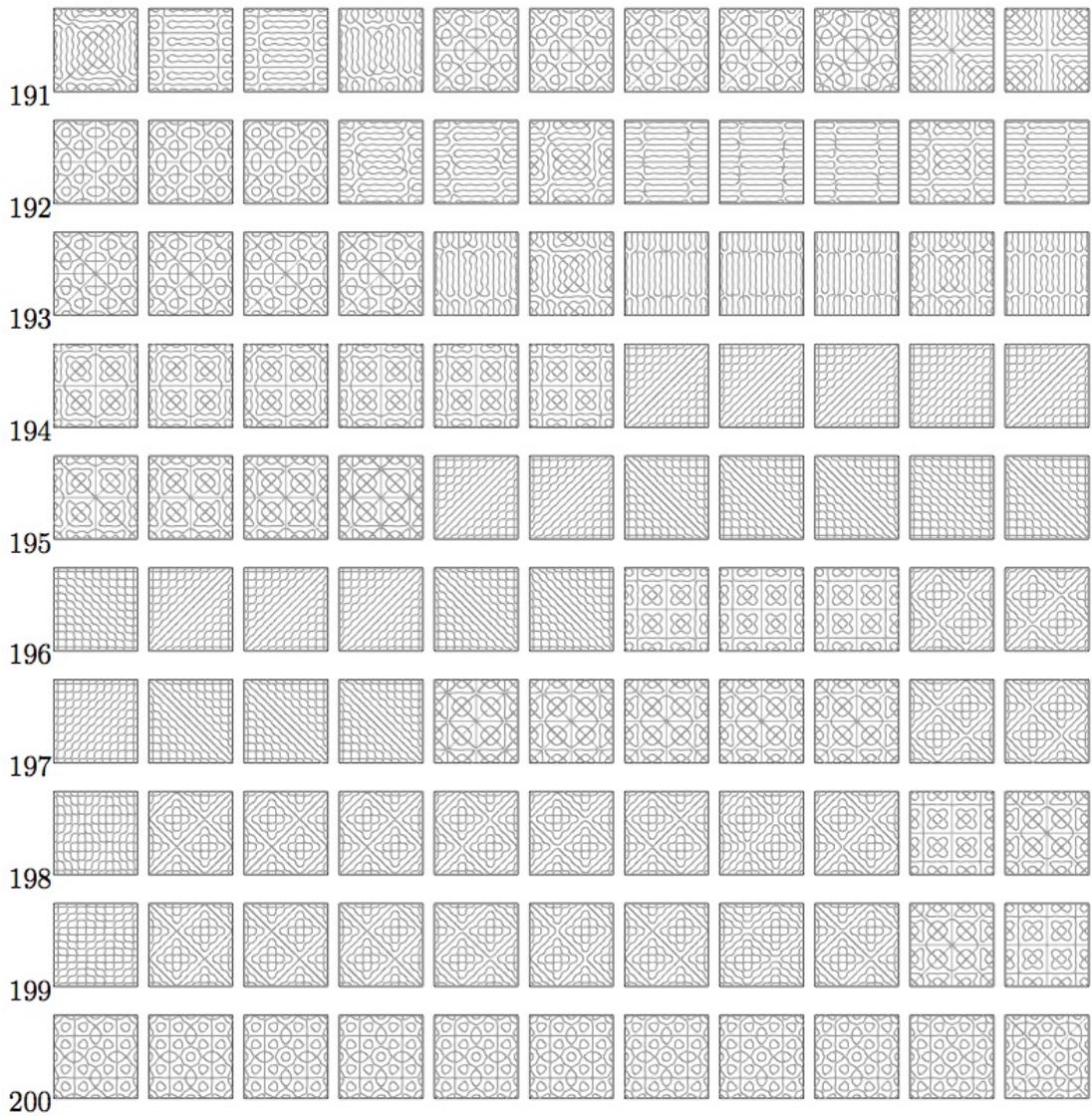
6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形





6.2 Poisson 比 $=-1.0 \sim 0$ 第 6 章 数値計算による自由な縁を持つ板のクラドニ図形





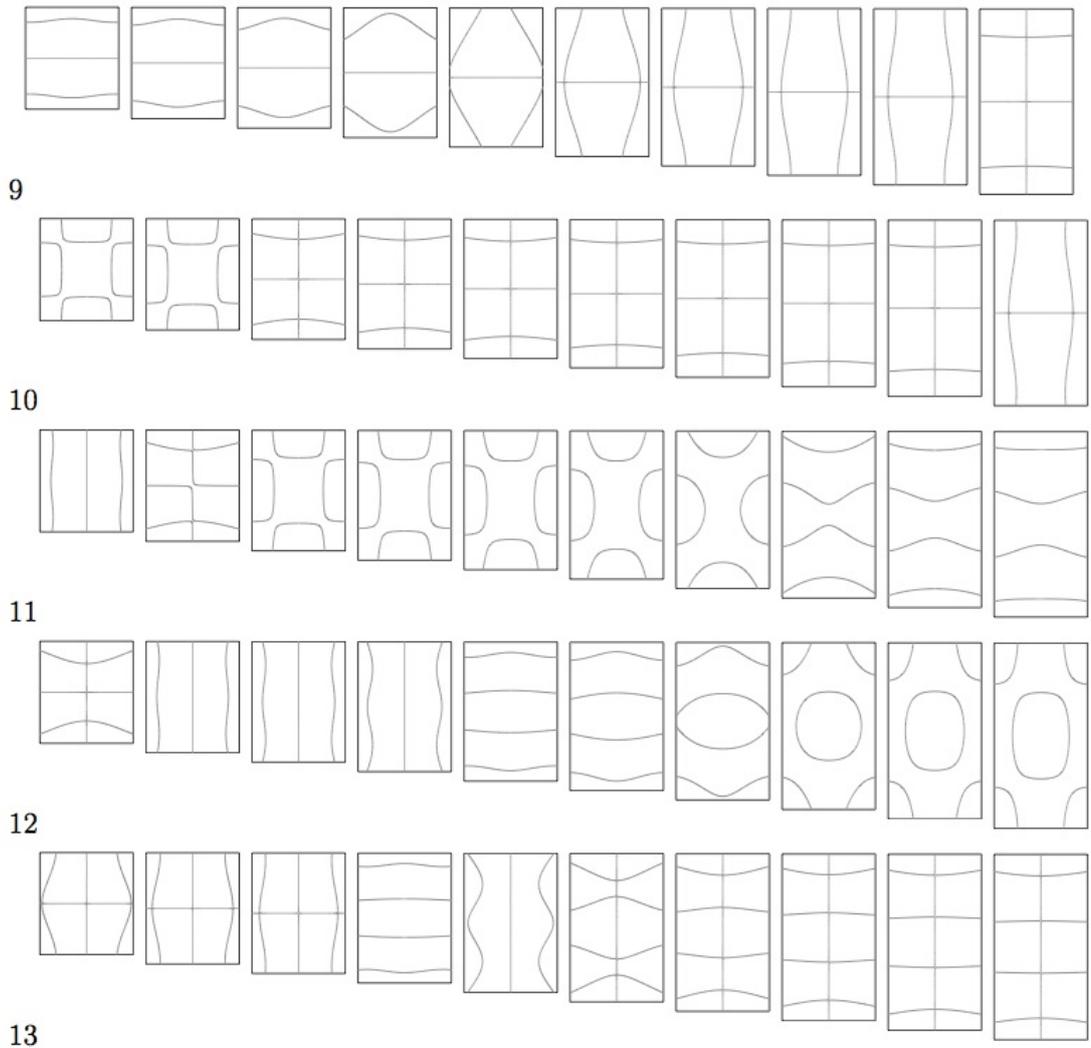
6.3 長方形領域

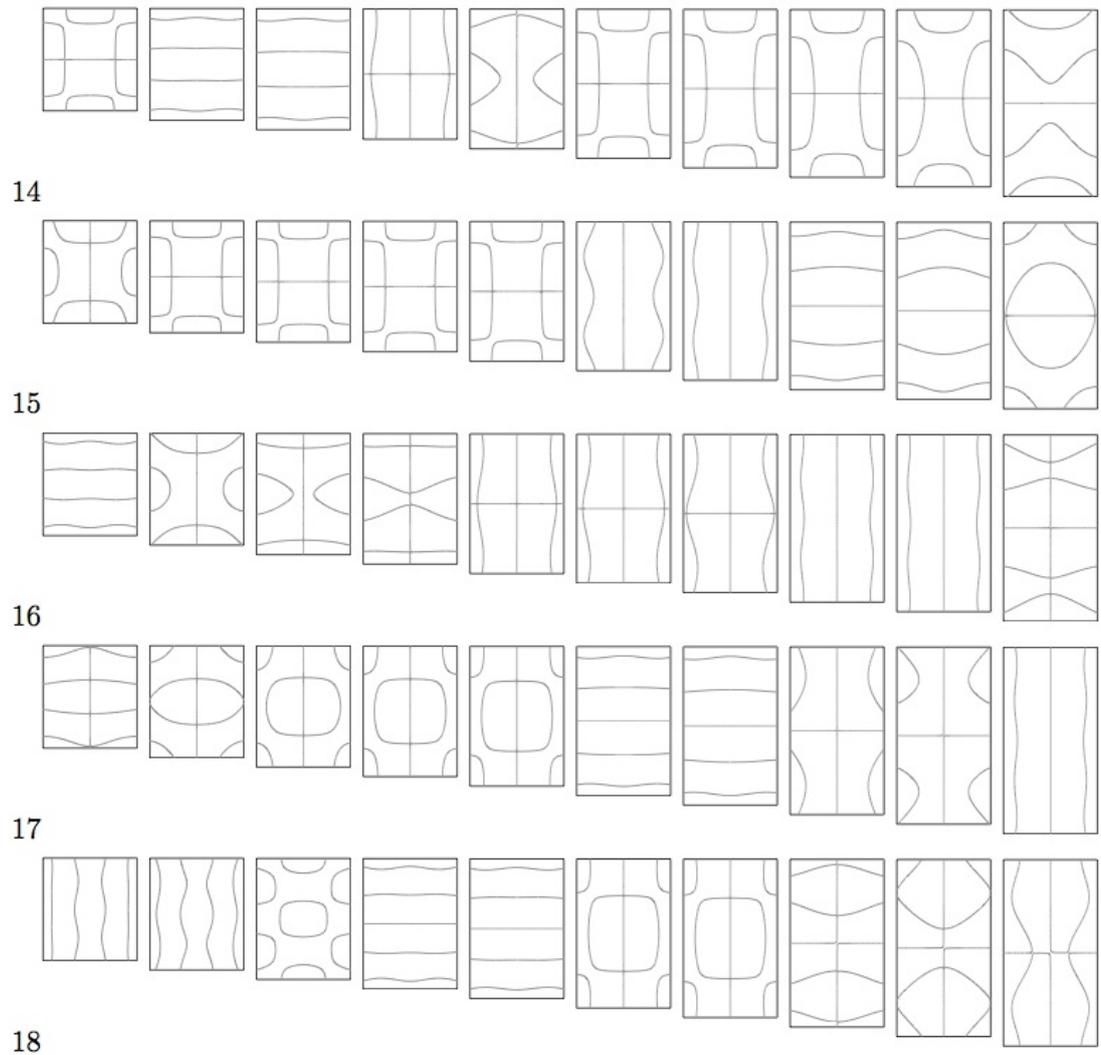
長方形領域の節線パターンを表示する. 縦軸は固有値の番号 (小さい方 4 番目から 50 番目まで) を表す. 横軸はアスペクト比 (横の長さを 1 とした時の縦の長さ) で、1.1~2.0 まで 0.1 刻みに並んでいる. Poisson 比は $\mu = 0.3$, 辺の分割数は $N = 160$ で計算した. アスペクト比をこの範囲で動かしても、固有関数の節線パターンは概ね連続的に変化しているようであるが、時々入れ

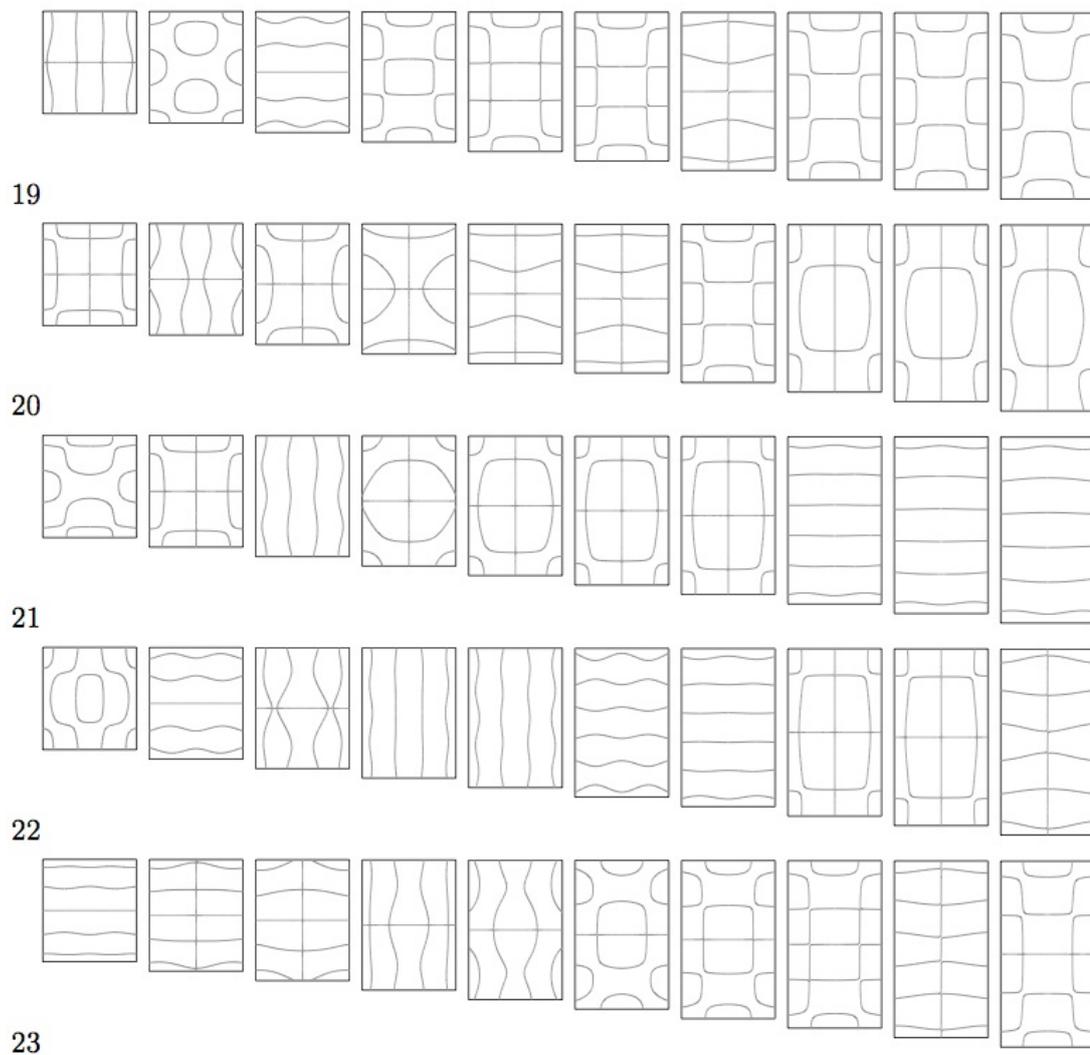
替わっている. 正方形の節線パターンとは大きく違うように見える (正方形でない場合は、節線はほぼいつも辺に平行である).

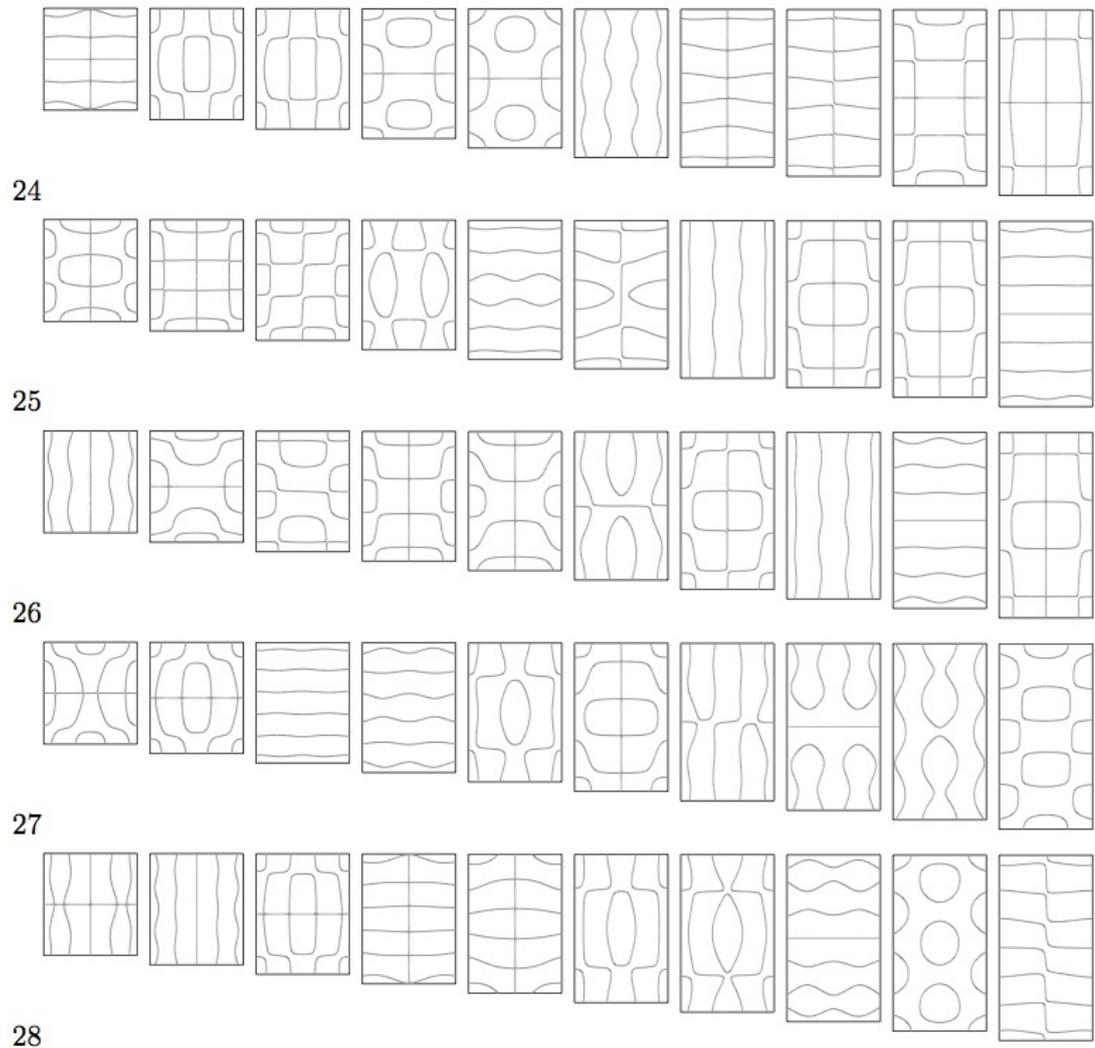
プログラムは p.104 に載せてある.

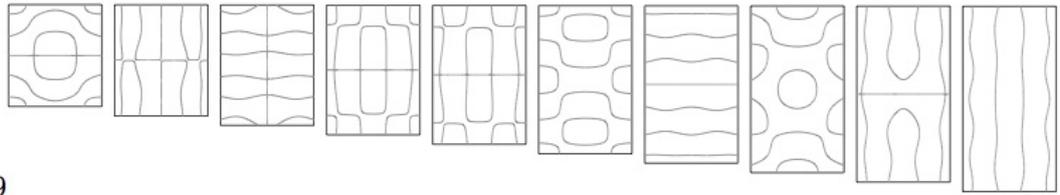




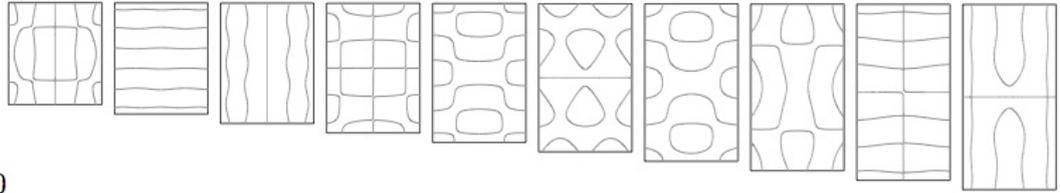




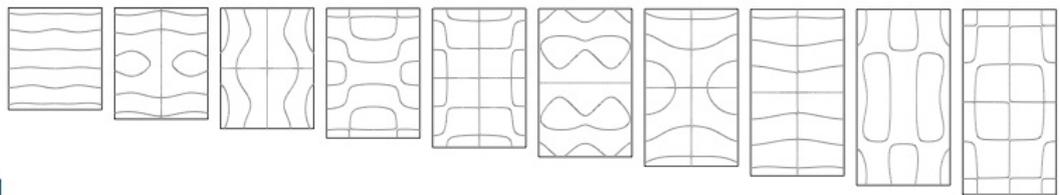




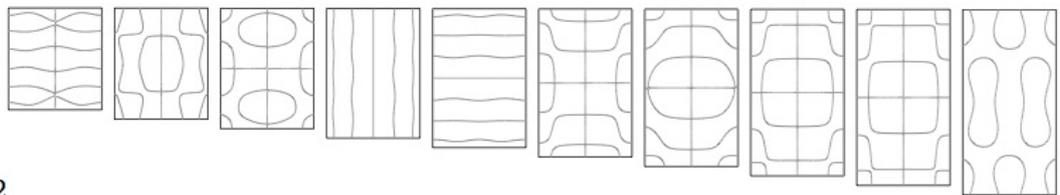
29



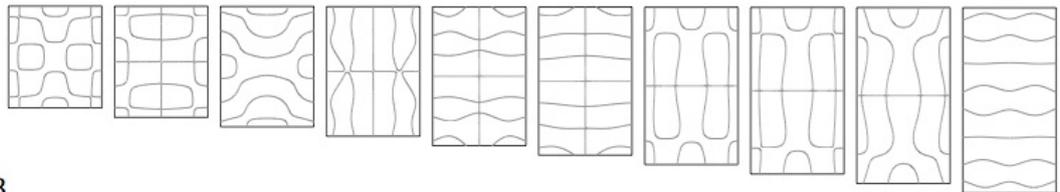
30



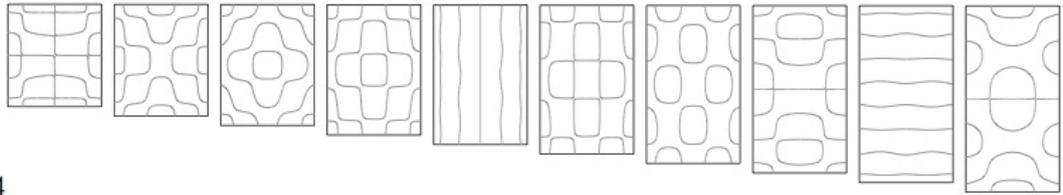
31



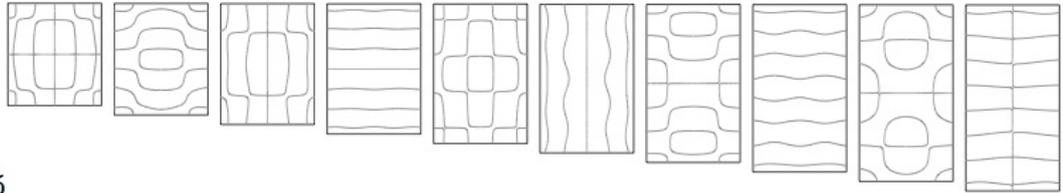
32



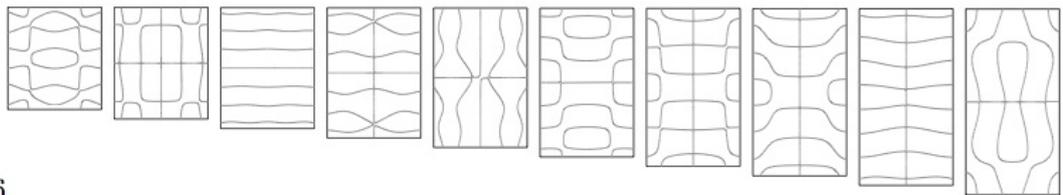
33



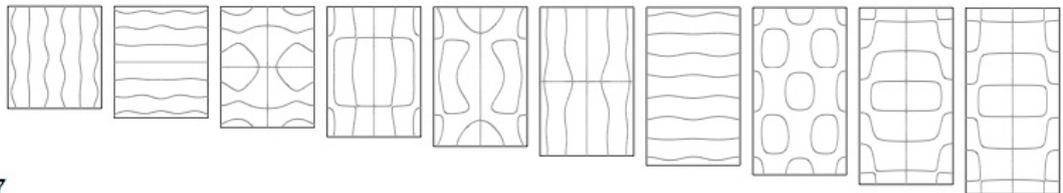
34



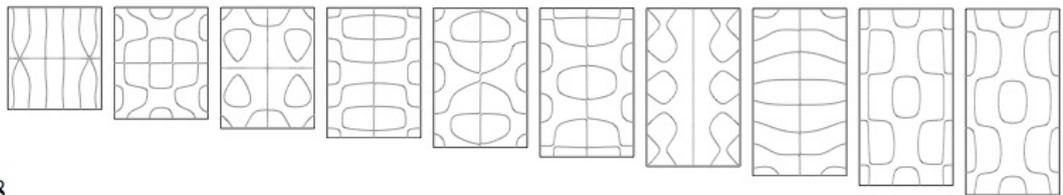
35



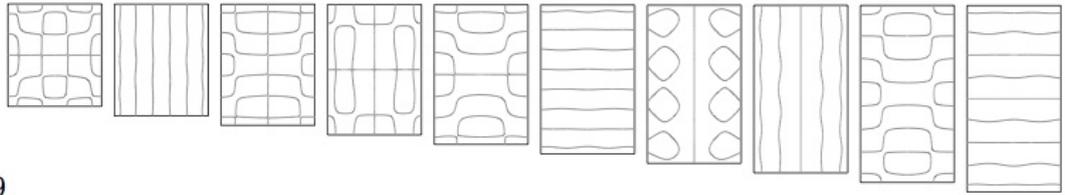
36



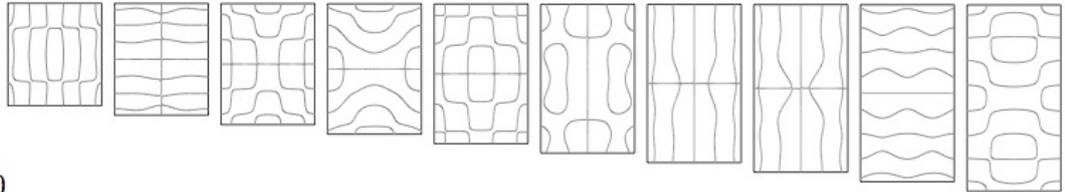
37



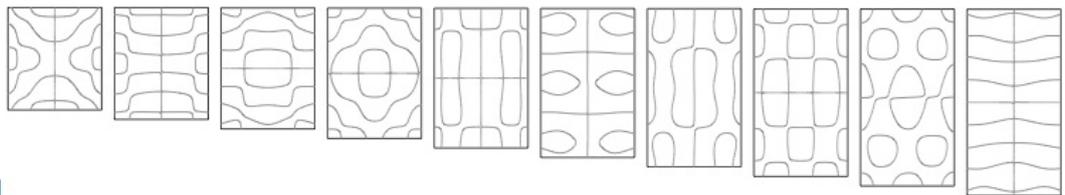
38



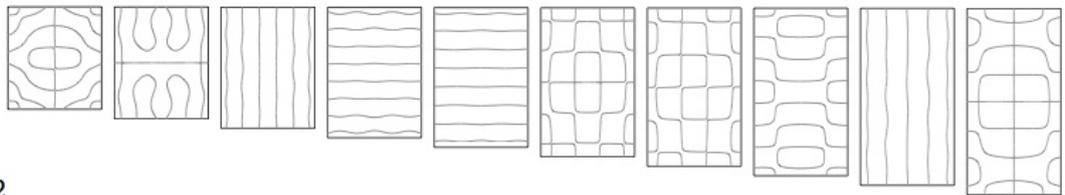
39



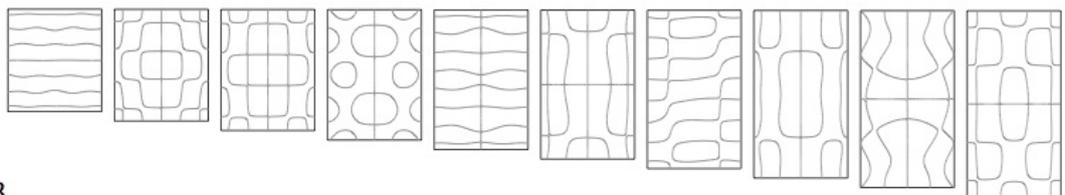
40



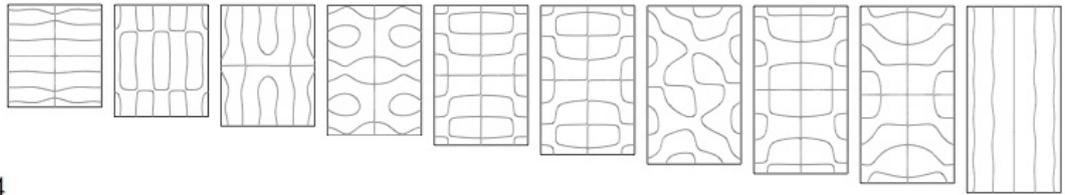
41



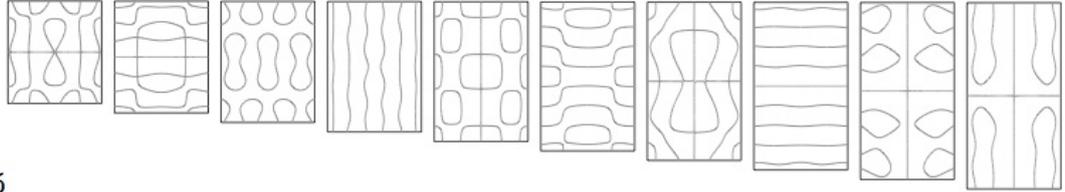
42



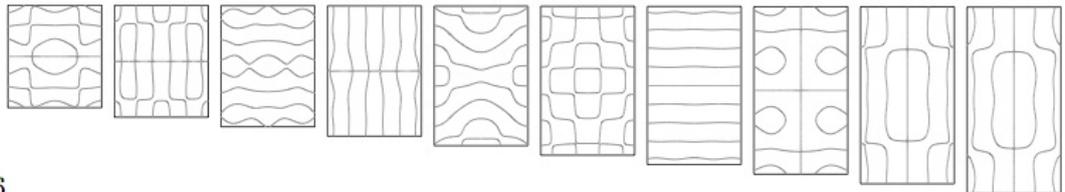
43



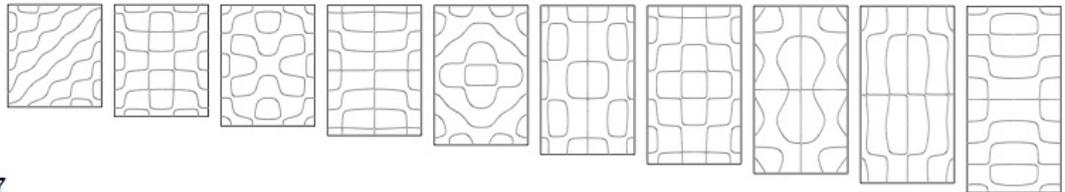
44



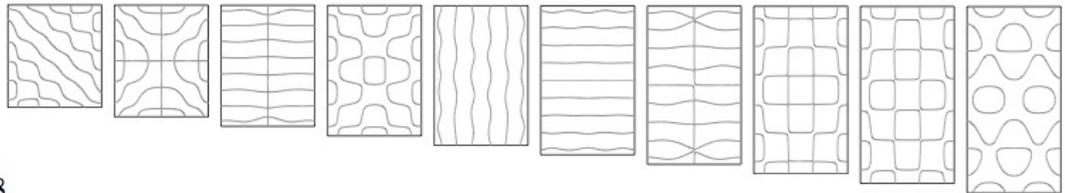
45



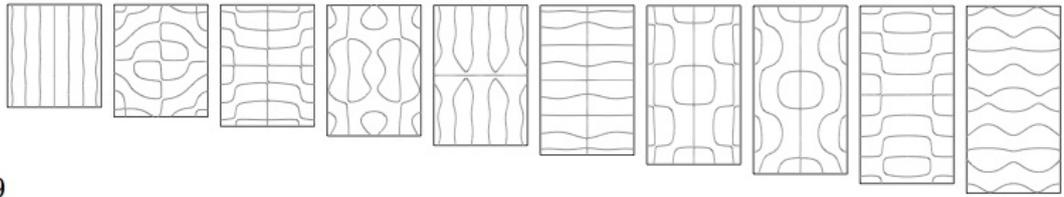
46



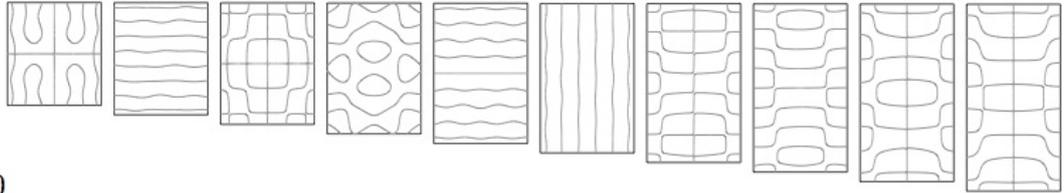
47



48



49



50

謝辞

今回の研究にあたり、丁寧に指導して下さいました桂田祐史准教授に深く感謝致します。

付録A ソース・プログラム

A.1 自由な正方形板の固有値問題の差分法による計算

A.1.1 plate_f1.m

自由な正方形板の固有値問題を差分近似して出来る行列を求める MATLAB プログラムである. 平野裕輝氏作成 (平野 [3]). Poisson 比を μ , 1 辺を N 等分するとして、 $a=plate_f1(N,\mu)$ とすると、行列 a が得られる.

```
1 % plate_f1.m -- Eigenvalue problem of square plates with free edges
2 % written by Hirano Yuuki, Meiji University, Feb 2012
3 % comments are modified by Masashi Katsurada, 24 June 2012.
4 %
5 % \triangle^2 u = \lambda u
6 % 0 < x < 1, 0 < y < 1
7 % mu: Poisson's ratio
8 % usage:
9 %   A=plate_f1(640,0.3);
10 %   [v,d]=eigs(A,200,0);
11 %   plot_n(v(:,197),640,640)
12
13 function P1=plate_f1(N,mu)
14     h=1/N;
15     n=N+1;
16     a=-2*(mu*mu+2*mu-3);
17     b=1-mu*mu;
18     c=-2*(mu-1);
19     d=15-8*mu-5*mu*mu;
20     e=-4*(mu*mu+mu-2);
21     f=2-mu;
22     g=-2*(mu-3);
23     k=-2*(3*mu*mu+4*mu-8);
24     In=speye(n,n);
25     Jn=sparse(diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));
```

```
26      J2n=sparse(diag(ones(n-2,1),2)+diag(ones(n-2,1),-2));
27      j2n=sparse(diag(ones(n-2,1),2)+diag(ones(n-2,1),-2));
28      j2n(1,3)=sqrt(2);
29      j2n(3,1)=sqrt(2);
30      j2n(n-2,n)=sqrt(2);
31      j2n(n,n-2)=sqrt(2);
32      An=In;
33      An(1,1)=b;
34      An(n,n)=b;
35      Bn=-8*In+2*Jn;
36      Bn(1,1)=-e;
37      Bn(n,n)=-e;
38      Bn(1,2)=sqrt(2)*f;
39      Bn(2,1)=sqrt(2)*f;
40      Bn(n-1,n)=sqrt(2)*f;
41      Bn(n,n-1)=sqrt(2)*f;
42      Cn=-g*In+f*Jn;
43      Cn(1,1)=-a;
44      Cn(n,n)=-a;
45      Cn(1,2)=sqrt(2)*f;
46      Cn(2,1)=sqrt(2)*c;
47      Cn(n-1,n)=sqrt(2)*c;
48      Cn(n,n-1)=sqrt(2)*f;
49      Dn=20*In-8*Jn+j2n;
50      Dn(1,1)=k;
51      Dn(n,n)=k;
52      Dn(2,2)=19;
53      Dn(n-1,n-1)=19;
54      Dn(1,2)=-sqrt(2)*g;
55      Dn(2,1)=-sqrt(2)*g;
56      Dn(n-1,n)=-sqrt(2)*g;
57      Dn(n,n-1)=-sqrt(2)*g;
58      DDn=19*In-8*Jn+j2n;
59      DDn(1,1)=d;
60      DDn(n,n)=d;
61      DDn(2,2)=18;
62      DDn(n-1,n-1)=18;
63      DDn(1,2)=-sqrt(2)*g;
64      DDn(2,1)=-sqrt(2)*g;
65      DDn(n-1,n)=-sqrt(2)*g;
66      DDn(n,n-1)=-sqrt(2)*g;
67      En=k*In-e*Jn+b*j2n;
68      En(1,1)=2*a;
69      En(n,n)=2*a;
70      En(2,2)=d;
71      En(n-1,n-1)=d;
72      En(1,2)=-sqrt(2)*a;
73      En(2,1)=-sqrt(2)*a;
74      En(n-1,n)=-sqrt(2)*a;
```

```

75         En(n,n-1)=-sqrt(2)*a;
76         P1=kron(j2n,An)+kron(Jn,Bn)+kron(In,Dn);
77         P1(1:n,1:n)=En;
78         P1(1:n,n+1:2*n)=sqrt(2)*Cn';
79         P1(n+1:2*n,1:n)=sqrt(2)*Cn;
80         P1(n+1:2*n,n+1:2*n)=DDn;
81         P1(n*(n-2)+1:n*(n-1),n*(n-2)+1:n*(n-1))=DDn;
82         P1(n*(n-2)+1:n*(n-1),n*(n-1)+1:n*n)=sqrt(2)*Cn;
83         P1(n*(n-1)+1:n*n,n*(n-2)+1:n*(n-1))=sqrt(2)*Cn';
84         P1(n*(n-1)+1:n*n,n*(n-1)+1:n*n)=En;
85         P1=P1/(h*h*h*h);
86     end

```

A.1.2 plot_n.m

正方形領域上の固有関数 (plate_f1.m で求めたもの) のグラフの鳥瞰図、等高線を描くためのプログラムである。

使用例

Poisson 比 0.3 の自由な正方形板の、小さい方から 200 個の固有値と固有関数を計算し (ただし 1 辺を 1280 等分した差分近似)、10 番目の固有値に属する固有関数のグラフの鳥瞰図と等高線を描く。

```

N=1280
mu=0.3
a=plate_f1(N, mu);

nmax=200
[v,d]=eigs(A,nmax,0);

m=10
plot_n(v(:,nmax+1-m),N,N)

```

```

1 % plot_n.m --- 長方形領域上の問題の差分解の描画 (Neumann, free edge 境界条件)
2 %
3 % 使用例
4 % (1) Laplacian の第 n 固有関数
5 % [v,d]=eigs(eigp2nsp(nx,ny),10,0);
6 % plot_n(v(:,11-n),nx,ny);

```

```

7 % (2) 重 Laplacian の第 n 固有関数
8 % [v,d]=eigs(plate_f1(N,0.3),200,0); 小さい方から 200 個の固有値、固有関
  数
9 % plot_n(v(:,201-n),N,N);          (n=4 は正の最小固有値)
10
11 function plot_n(v,nx,ny)
12 % メモリー中に v[0][0],v[1][0],...,v[Nx][0],v[0][1],... と並んでいる。
13 % 2次元配列に収める
14 vvv=zeros(nx+1,ny+1);
15 vvv(:)=v;
16 % 境界での値を修正する (角点では 2 倍することに注意)
17 vvv(1,:)=vvv(1,:)*sqrt(2);
18 vvv(nx+1,:)=vvv(nx+1,:)*sqrt(2);
19 vvv(:,1)=vvv(:,1)*sqrt(2);
20 vvv(:,ny+1)=vvv(:,ny+1)*sqrt(2);
21 % mesh(), contour() には渡すには、vv は ny+1,nx+1 とする必要がある。
22 vv=vvv';
23 x=0:1/nx:1;
24 y=0:1/ny:1;
25 % 左側にグラフの鳥瞰図
26 subplot(1,2,1);
27 colormap hsv;
28 mesh(x,y,vv);
29 % 右側に等高線
30 right=subplot(1,2,2);
31 contour(x,y,vv);
32 pbaspect(right,[1 1 1]);
33 end

```

A.1.3 makedata_free.m

Poisson 比 $\mu = -1, -0.9, -0.8, \dots, -0.1, 0, 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.45, 0.5$ の自由な正方形板の固有値問題を差分法で解いて、データを作成するプログラム。1 辺の分割数は、 $N = 10, 20, \dots, 1280$ とする。

```

1 muarray=[-1.0:0.1:0 0.05:0.05:0.5];
2 maxk=size(muarray,2);
3 for k=1:maxk
4     poisson=muarray(k)
5     mustr=num2str(poisson);
6
7     N=10;
8     [v10,d10]=eigs(plate_f1(N,poisson),100,0);
9     fname=['free_' mustr '_10.mat'];
10    save(fname, 'N', 'v10', 'd10')

```

```
11
12     N=20;
13     [v20,d20]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
14     fname=['free_' muststr '_20.mat'];
15     save(fname,'N','v20','d20')
16
17     N=40;
18     [v40,d40]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
19     fname=['free_' muststr '_40.mat'];
20     save(fname,'N','v40','d40')
21
22     N=80;
23     [v80,d80]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
24     fname=['free_' muststr '_80.mat'];
25     save(fname,'N','v80','d80')
26
27     N=160;
28     [v160,d160]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
29     fname=['free_' muststr '_160.mat'];
30     save(fname,'N','v160','d160')
31
32     N=320;
33     [v320,d320]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
34     fname=['free_' muststr '_320.mat'];
35     save(fname,'N','v320','d320')
36
37     N=640;
38     [v640,d640]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
39     fname=['free_' muststr '_640.mat'];
40     save(fname,'N','v640','d640')
41
42     N=1280;
43     [v1280,d1280]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
44     fname=['free_' muststr '_1280.mat'];
45     save(fname,'N','v1280','d1280', '-v7.3')
46 end
```

A.1.4 dividedata.m

自由な正方形板の固有値問題を 1280 等分で計算したものを、160 等分のメッシュに間引いて、Mathematica で読み込めるデータを作成するプログラム.

```
1 N=1280;
2 i=1:N/160:N+1;
3 j=1:N/160:N+1;
4 muarray=[-1:0.1:0 0.05:0.05:0.5];
```

```

5  maxk=size(muarray,2);
6  for k=1:maxk
7      mu=muarray(k);
8      mustr=num2str(mu);
9      dirname=['Poisson_' mustr];
10     load(['free_' mustr '_1280.mat'])
11     system(['mkdir ' dirname])
12     for n=1:200
13         u=nv_to_dim2(v1280(:,201-n),N,N);
14         u=u(i,j);
15         save([dirname '/' int2str(n) '.dat'], 'u', '-ascii')
16     end
17     e=diag(d1280);
18     e=e(200:-1:1);
19     save([dirname '/eigen.dat'],'e','-ascii')
20 end

```

A.2 Mathematica

A.2.1 tools.nb

```

readef [mu_, n_] := Import ["Documents/MATLAB/Poisson_" <> ToString[mu]
                           <> "/" <> IntegerString[n] <> ".dat"]

mycount [u_] := Module[{c, i}, c=0;
                       For [i=1, i<=Length[u]-1, i++,
                            If [Abs[u[[i]]]<10(-8) || u[[i]]*u[[i+1]]<0, c++];
                            If [Abs[u[[Length[u]]]]<10(-8), c++]; c]

simple [mu_, n_] := Module[{u}, u=readef [mu, n];
                           ListContourPlot [u, DataRange->{{0, 1}, {0, 1}},
                                               Contours->{0}, ContourShading->None]]

doublen [mu_, m_, n_] := Module[{a, b, u},
  u [mu, n]=readef [mu, n];
  u [mu, m]=readef [mu, m];
  If [u [mu, n] [[1, 1]] !=0, a=1, a=0];
  If [u [mu, n] [[1, 1]] !=0, b=-u [mu, m] [[1, 1]]/u [mu, n] [[1, 1]], b=1];
  ListContourPlot [a*u [mu, m]+b*u [mu, n], DataRange->{{0, 1}, {0, 1}},
                   Contours->{0}, ContourShading->None]]

doublet [mu_, m_, n_] := Module[{a, b, u, NN},
  u [mu, n]=readef [mu, n]; u [mu, m]=readef [mu, m];
  NN=Length [u [mu, n]]-1;
  If [u [mu, n] [[1, NN/2+1]] !=0,
      a=1, a=0];

```

```

If[u[μ,n][[1,NN/2+1]]!=0,
  b=-u[μ,m][[1,NN/2+1]]/u[μ,n][[1,NN/2+1]],b=1];
ListContourPlot[a*u[μ,m]+b*u[μ,n],DataRange->{{0,1},{0,1}},
  Contours->{0},ContourShading->None]]

doublenc[μ_,m_,n_]:=Module[{a,b,u},
  u[μ,n]=readef[μ,n];u[μ,m]=readef[μ,m];
  If[u[μ,n][[1,1]]!=0,
    a=1,a=0];
  If[u[μ,n][[1,1]]!=0,
    b=-u[μ,m][[1,1]]/u[μ,n][[1,1]],b=1];
  v=a*u[μ,m]+b*u[μ,n];
  {mycount[v[[1]]],mycount[Transpose[v][[1]]]}]

doubletc[μ_,m_,n_]:=Module[{a,b,u,NN,v},
  u[μ,n]=readef[μ,n];u[μ,m]=readef[μ,m];
  NN=Length[u[μ,n]]-1;
  If[u[μ,n][[1,NN/2+1]]!=0,
    a=1,a=0];
  If[u[μ,n][[1,NN/2+1]]!=0,
    b=-u[μ,m][[1,NN/2+1]]/u[μ,n][[1,NN/2+1]],b=1];
  v=a*u[μ,m]+b*u[μ,n];
  {mycount[v[[1]]],mycount[Transpose[v][[1]]]}]

simple[0.3,26]

doublen[0.3,27,28]

doublet[0.3,27,28]

For[i=1,i<=200,i++,
  u[i]=Import["Documents/MATLAB/Poisson_0.15/u"<>IntegerString[i]<>".dat"]]

eigen=Sort[Flatten[Import["Documents/MATLAB/Poisson_0.3/eigen.dat"]]];

Double0=Select[Table[n,{n,1,201-5}],
  Abs[eigen[[#]]-eigen[[#+1]]]/eigen[[#+1]]<0.00001&]

```

- readef[μ,n] Poisson 比が μ の φ_n のデータの読み込む。
- simple[μ,n] Poisson 比が μ の φ_n の節線パターンを描く (simple の場合)。
- doublen[μ,m,n] Poisson 比が μ の φ_n と φ_{n+1} の対応する ψ_n の表示. $u = a\phi_m + b\phi_n$ が $u(0,0) = 0$ となるように a, b を求めて u の節線パターンを描く。
- doublet[μ,m,n] Poisson 比が μ の φ_n と φ_{n+1} の対応する ψ_n の表示。

```
simple[0.3,26]
doublen[0.3,27,28]
doublet[0.3,27,28]
```

A.2.2 bar_mem.nb

```
Clear[nu]

nu[0]=0
nu[1]=0

nu[n_]:=nu[n]=nu/.FindRoot[Cos[nu Pi]==1/Cosh[nu Pi],{nu,n-0.5}]

vf[n_,x_]:=Switch[n,
  0,1,
  1,x-Pi/2,
  _,((Sin[nu[n]Pi]-Sinh[nu[n]Pi])(Cos[nu[n]x]+Cosh[nu[n]x])
    -(Cos[nu[n]Pi]-Cosh[nu[n]Pi])(Sin[nu[n]x]+Sinh[nu[n]x]))
    /Sinh[nu[n]Pi]]

barp[m_,n_]:=ContourPlot[vf[m,Pi*x]*vf[n,Pi*y]+vf[n,Pi*x]*vf[m,Pi*y],
  {x,0,1},{y,0,1},
  BoundaryStyle->Black,Frame->None,Contours->{0},
  ContourShading->None,
  ContourStyle->Thickness[0.002],PlotPoints->100]

barm[m_,n_]:=ContourPlot[Cos[m*Pi*x]*Cos[n*Pi*y]-Cos[n*Pi*x]*Cos[m*Pi*y],
  {x,0,1},{y,0,1},
  BoundaryStyle->Black,Frame->None,Contours->{0},
  ContourShading->None,
  ContourStyle->Thickness[0.002],PlotPoints->100]

memp[m_,n_]:=ContourPlot[Cos[m*Pi*x]*Cos[n*Pi*y]+Cos[n*Pi*x]*Cos[m*Pi*y],
  {x,0,1},{y,0,1},
  BoundaryStyle->Black,Frame->None,Contours->{0},
  ContourShading->None,
  ContourStyle->Thickness[0.002],PlotPoints->100]

memm[m_,n_]:=ContourPlot[Cos[m*Pi*x]*Cos[n*Pi*y]-Cos[n*Pi*x]*Cos[m*Pi*y],
  {x,0,1},{y,0,1},
  BoundaryStyle->Black,Frame->None,Contours->{0},
  ContourShading->None,
  ContourStyle->Thickness[0.002],PlotPoints->100]
```

```

}
\begin{screen}
{barp[6,2],memp[6,2]}

Plot[Table[vf[n,x],{n,0,5}],{x,0,Pi}]
\end{screen}

```

A.2.3 square.nb

```

reodef[mu_,n_]:=Import["Documents/MATLAB/Poisson_"<>ToString[mu]
<>"/u"<>IntegerString[n]<>".dat"]

mulistp={0,0.05,0.1,0.15,0.2,0.25,0.3,0.35,0.4,0.45,0.5}

mulistn={-1,-0.9,-0.8,-0.7,-0.6,-0.5,-0.4,-0.3,-0.2,-0.1,0}

showpositive[n_]:=Module[{u,fname},
  For[i=1,i<=11,i++,u[i]=reodef[mulistp[[i]],n]];
  GraphicsRow[Table[ListContourPlot[u[i],Frame->None,Contours->{0},
    ContourShading->None,ImageSize->50,
    BoundaryStyle->Black],{i,1,11}]]]

shownegative[n_]:=Module[{u,fname},
  For[i=1,i<=11,i++,u[i]=reodef[mulistn[[i]],n]];
  GraphicsRow[Table[ListContourPlot[u[i],Frame->None,Contours->{0},
    ContourShading->None,ImageSize->50,
    BoundaryStyle->Black],{i,1,11}]]]

```

```

showpositive[16]

shownegative[6]

For[i=4,i<=200,i++,g=showpositive[i];
  Export["u"<>ToString[i]<>".eps",showpositive[i]]]

For[i=4,i<=200,i++,g=shownegative[i];
  Export["uu"<>ToString[i]<>".eps",shownegative[i]]]

```

A.2.4 Laplacian_duplicate_ev.nb

```
{\footnotesize
```

(* 正方形領域のラプラシアン固有値を小さい方から 200 集めて、どれくらい重根があるかを調べる。 *)

```
a=Flatten[Table[{m^2+n^2,{m,n}},{m,0,200},{n,0,200}],1];
```

```
Length[a]
40401
```

```
b=Sort[a,#1[[1]]<#2[[1]]&];
```

```
b=Take[b,210]
{0,{0,0}}, {1,{1,0}}, {1,{0,1}}, {2,{1,1}}, {4,{2,0}},
{4,{0,2}}, {5,{2,1}}, {5,{1,2}}, {8,{2,2}}, {9,{3,0}},
{9,{0,3}}, {10,{3,1}}, {10,{1,3}}, {13,{3,2}}, {13,{2,3}},
{16,{4,0}}, {16,{0,4}}, {17,{4,1}}, {17,{1,4}}, {18,{3,3}},
{20,{4,2}}, {20,{2,4}}, {25,{5,0}}, {25,{4,3}}, {25,{3,4}},
{25,{0,5}}, {26,{5,1}}, {26,{1,5}}, {29,{5,2}}, {29,{2,5}},
{32,{4,4}}, {34,{5,3}}, {34,{3,5}}, {36,{6,0}}, {36,{0,6}},
{37,{6,1}}, {37,{1,6}}, {40,{6,2}}, {40,{2,6}}, {41,{5,4}},
{41,{4,5}}, {45,{6,3}}, {45,{3,6}}, {49,{7,0}}, {49,{0,7}},
{50,{7,1}}, {50,{5,5}}, {50,{1,7}}, {52,{6,4}}, {52,{4,6}},
{53,{7,2}}, {53,{2,7}}, {58,{7,3}}, {58,{3,7}}, {61,{6,5}},
{61,{5,6}}, {64,{8,0}}, {64,{0,8}}, {65,{8,1}}, {65,{7,4}},
{65,{4,7}}, {65,{1,8}}, {68,{8,2}}, {68,{2,8}}, {72,{6,6}},
{73,{8,3}}, {73,{3,8}}, {74,{7,5}}, {74,{5,7}}, {80,{8,4}},
{80,{4,8}}, {81,{9,0}}, {81,{0,9}}, {82,{9,1}}, {82,{1,9}},
{85,{9,2}}, {85,{7,6}}, {85,{6,7}}, {85,{2,9}}, {89,{8,5}},
{89,{5,8}}, {90,{9,3}}, {90,{3,9}}, {97,{9,4}}, {97,{4,9}},
{98,{7,7}}, {100,{10,0}}, {100,{8,6}}, {100,{6,8}}, {100,{0,10}},
{101,{10,1}}, {101,{1,10}}, {104,{10,2}}, {104,{2,10}}, {106,{9,5}},
{106,{5,9}}, {109,{10,3}}, {109,{3,10}}, {113,{8,7}}, {113,{7,8}},
{116,{10,4}}, {116,{4,10}}, {117,{9,6}}, {117,{6,9}}, {121,{11,0}},
{121,{0,11}}, {122,{11,1}}, {122,{1,11}}, {125,{11,2}}, {125,{10,5}},
{125,{5,10}}, {125,{2,11}}, {128,{8,8}}, {130,{11,3}}, {130,{9,7}},
{130,{7,9}}, {130,{3,11}}, {136,{10,6}}, {136,{6,10}}, {137,{11,4}},
{137,{4,11}}, {144,{12,0}}, {144,{0,12}}, {145,{12,1}}, {145,{9,8}},
{145,{8,9}}, {145,{1,12}}, {146,{11,5}}, {146,{5,11}}, {148,{12,2}},
{148,{2,12}}, {149,{10,7}}, {149,{7,10}}, {153,{12,3}}, {153,{3,12}},
{157,{11,6}}, {157,{6,11}}, {160,{12,4}}, {160,{4,12}}, {162,{9,9}},
{164,{10,8}}, {164,{8,10}}, {169,{13,0}}, {169,{12,5}}, {169,{5,12}},
{169,{0,13}}, {170,{13,1}}, {170,{11,7}}, {170,{7,11}}, {170,{1,13}},
{173,{13,2}}, {173,{2,13}}, {178,{13,3}}, {178,{3,13}}, {180,{12,6}},
{180,{6,12}}, {181,{10,9}}, {181,{9,10}}, {185,{13,4}}, {185,{11,8}},
{185,{8,11}}, {185,{4,13}}, {193,{12,7}}, {193,{7,12}}, {194,{13,5}},
{194,{5,13}}, {196,{14,0}}, {196,{0,14}}, {197,{14,1}}, {197,{1,14}},
{200,{14,2}}, {200,{10,10}}, {200,{2,14}}, {202,{11,9}}, {202,{9,11}},
{205,{14,3}}, {205,{13,6}}, {205,{6,13}}, {205,{3,14}}, {208,{12,8}},
{208,{8,12}}, {212,{14,4}}, {212,{4,14}}, {218,{13,7}}, {218,{7,13}},
{221,{14,5}}, {221,{11,10}}, {221,{10,11}}, {221,{5,14}}, {225,{15,0}},
```

```

{225,{12,9}}, {225,{9,12}}, {225,{0,15}}, {226,{15,1}}, {226,{1,15}},
{229,{15,2}}, {229,{2,15}}, {232,{14,6}}, {232,{6,14}}, {233,{13,8}},
{233,{8,13}}, {234,{15,3}}, {234,{3,15}}, {241,{15,4}}, {241,{4,15}},
{242,{11,11}}, {244,{12,10}}, {244,{10,12}}, {245,{14,7}}, {245,{7,14}}

i5=Select[Table[n,{n,1,201-5}],
  b[[#]][[1]]==b[[#+1]][[1]]==b[[#+2]][[1]]==b[[#+3]][[1]]==b[[#+4]][[1]]&]
{}

b[[i4just]]
{{25,{5,0}}, {65,{8,1}}, {85,{9,2}}, {100,{10,0}}, {125,{11,2}},
{130,{11,3}}, {145,{12,1}}, {169,{13,0}}, {170,{13,1}}, {185,{13,4}},
{205,{14,3}}, {221,{14,5}}, {225,{15,0}}}

Length[i4just]
13

b[[i3just]]
{{50,{7,1}}, {200,{14,2}}}

b[[i2just]]
{{1,{1,0}}, {4,{2,0}}, {5,{2,1}}, {9,{3,0}}, {10,{3,1}},
{13,{3,2}}, {16,{4,0}}, {17,{4,1}}, {20,{4,2}}, {26,{5,1}},
{29,{5,2}}, {34,{5,3}}, {36,{6,0}}, {37,{6,1}}, {40,{6,2}},
{41,{5,4}}, {45,{6,3}}, {49,{7,0}}, {52,{6,4}}, {53,{7,2}},
{58,{7,3}}, {61,{6,5}}, {64,{8,0}}, {68,{8,2}}, {73,{8,3}},
{74,{7,5}}, {80,{8,4}}, {81,{9,0}}, {82,{9,1}}, {89,{8,5}},
{90,{9,3}}, {97,{9,4}}, {101,{10,1}}, {104,{10,2}}, {106,{9,5}},
{109,{10,3}}, {113,{8,7}}, {116,{10,4}}, {117,{9,6}}, {121,{11,0}},
{122,{11,1}}, {136,{10,6}}, {137,{11,4}}, {144,{12,0}}, {146,{11,5}},
{148,{12,2}}, {149,{10,7}}, {153,{12,3}}, {157,{11,6}}, {160,{12,4}},
{164,{10,8}}, {173,{13,2}}, {178,{13,3}}, {180,{12,6}}, {181,{10,9}},
{193,{12,7}}, {194,{13,5}}, {196,{14,0}}, {197,{14,1}}, {202,{11,9}},
{208,{12,8}}, {212,{14,4}}, {218,{13,7}}, {226,{15,1}}, {229,{15,2}},
{232,{14,6}}}

Length[i2just]
66

b[[is]]
{{0,{0,0}}, {2,{1,1}}, {8,{2,2}}, {18,{3,3}}, {32,{4,4}},
{72,{6,6}}, {98,{7,7}}, {128,{8,8}}, {162,{9,9}}, {233,{13,8}}}
(*233 は重根である.*)

Length[is]
10
}

```

A.3 有限要素法プログラム

A.3.1 正方形板

自由な縁を持つ正方形板の固有値問題を有限要素法により求めるプログラムである。

```

1 // LaplacianEigenvalues.edp//
2 load "Morley"
3 verbosity=1;
4 int N;
5 cin >> N;
6 mesh Th=square(N,N);
7 fespace Vh(Th,P2Morley);
8 Vh [u,ux,uy],[v,vx,vy];
9 real mu = 0.3;
10 real shift = 200; // value of the shift
11 // OP = A - shift B; // the shifted matrix
12 varf op([u,ux,uy],[v,vx,vy])= int2d(Th) ((dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v))
13 // dxx(u)*dxx(v)+dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)+dyy(u)*dyy(v)
14 -(1-mu)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v))
15 -shift*u*v);
16 varf b([u,ux,uy],[v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v); // no Boundary condition
17 matrix OP= op(Vh,Vh,solver=Crout,factorize=1);
18 // crout solver because the matrix is not positive
19 matrix B= b(Vh,Vh,solver=CG,eps=1e-20);
20 // important remark:
21 // the boundary condition is made with exact penalisation:
22 // we put 1e30=tgv on the diagonal term to lock the degree of freedom.
23 // So take dirichlet boundary condition just on a variational form
24 // and not on a b variational form.
25 // because we solve w=OP^-1*B*v
26
27 int nev=20; // number of computed eigenvalue close to shift
28 real[int] ev(nev); // to store the nev eigenvalue
29 Vh[int] [eV,eVx,eVy](nev); // to store the nev eigenvector
30
31 int k=EigenValue(OP,B,sym=true,sigma=shift,value=ev,vector=eV,
32 tol=1e-10,maxit=0,ncv=0) ;
33
34 {
35 ofstream f("Eigenvalue"+N+".txt");
36 f.precision(15);
37 for (int i=0;i<k;i++) {
38 f << ev[i] << endl;
39 }
40 }
41
42 // return the number of computed eigenvalue

```

```

43  real[int] viso=[0.0];
44  real xx,yy;
45  real h=1.0/N;
46  for (int n=0; n<k; n++) {
47    plot(eV[n], cmm="Eigenvector "+n+", value =" + ev[n], wait=0,
48        // value=1, viso=viso);
49    value=1);
50    ofstream g("testdir/u"+n+".dat");
51    for (int i=0; i<=N; i++) {
52      xx = i * h;
53      for (int j=0; j <= N; j++) {
54        yy = j * h;
55        g << eV[n](xx,yy) << " ";
56      }
57      g << endl;
58    }
59  }

```

実行例 (N=160)

```

$ mkdir testdir
$ FreeFem++ LaplacianEigenvalues.edp
160
$

```

A.3.2 円形板

自由な縁を持つ円形板の固有値問題を有限要素法により求めるプログラムである。

```

1      // LaplacianEigenvalues.edp//
2  load "Morley"
3  verbosity=1;
4  int N;
5  cin >> N;
6  //real H;
7  //cin >> H;
8  border C(t=0,2*pi){x=cos(t); y=sin(t);}
9  mesh Th = buildmesh(C(N));
10 fespace Vh(Th,P2Morley);
11 Vh [u,ux,uy],[v,vx,vy];
12 real mu = 0.3;
13 real start=clock();
14 real shift = 200; // value of the shift
15          // OP = A - shift B; // the shifted matrix
16 varf op([u,ux,uy],[v,vx,vy])= int2d(Th) ((dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v))
17 // dxx(u)*dxx(v)+dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)+dyy(u)*dyy(v)

```

```

18   -(1-mu)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v))
19   -shift*u*v);
20   varf b([u,ux,uy],[v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v);    // no Boundary condition
21   matrix OP= op(Vh,Vh,solver=Crout,factorize=1);
22               // crout solver because the matrix in not positive
23   matrix B= b(Vh,Vh,solver=CG,eps=1e-20);
24   // important remark:
25   // the boundary condition is make with exact penalisation:
26   // we put 1e30=tdv on the diagonal term to lock the degre of freedom.
27   // So take dirichlet boundary condition just on a variationnal form
28   // and not on b variationnal form.
29   // because we solve w=OP^-1*B*v
30
31   int nev=50;          // number of computed eigen valeu close to shift
32   real[int] ev(nev);  // to store the nev eigenvalue
33   Vh[int] [eV,eVx,eVy](nev); // to store the nev eigenvector
34
35   int k=EigenValue(OP,B,sym=true,sigma=shift,value=ev,vector=eV,
36               tol=1e-10,maxit=0,ncv=0) ;
37
38   {
39     ofstream f("circledir/Eigenvalue"+N+".txt");
40     f.precision(15);
41     for (int i=0;i<k;i++) {
42       f << i+1 << " " << ev[i] << endl;
43     }
44   }
45
46   // return the number of computed eigenvalue
47   real[int] viso=[0.0];
48   real xx,yy;
49   real h=1.0/N;
50   //real hx=1.0/N,hy=H/N;
51   for (int n=0; n<k; n++) {
52     plot(eV[n], cmm="Eigenvector "+(n+1)+", value =" + ev[n], wait=1,
53     // value=1, viso=viso);
54     value=1);
55     ofstream g("circledir/c"+(n+1)+".dat");
56     for (int j=0; j <= N; j++) {
57       yy = j * h;
58       for (int i=0; i<=N; i++) {
59         xx = i * h;
60         g << eV[n](xx,yy) << " ";
61       }
62       g << endl;
63     }
64   }
65   cout << clock()-start << endl;

```

実行例 (N=160)

```

$ mkdir circledir
$ FreeFem++ cicle.edp
160
$

```

A.3.3 長方形板

自由な縁を持つ長方形 (縦の辺 H , 横の辺 1) の固有値問題を有限要素法により求めるプログラムである。

```

1 // rectangle.edp//
2 load "Morley"
3 verbosity=1;
4 int N;
5 cin >> N;
6 real H;
7 cin >> H;
8 mesh Th=square(N,N,[x,H*y]);
9 plot(Th,wait=1);
10 fespace Vh(Th,P2Morley);
11 Vh [u,ux,uy],[v,vx,vy];
12 real mu = 0.3;
13 real start=clock();
14 real shift = 200; // value of the shift
15 // OP = A - shift B; // the shifted matrix
16 varf op([u,ux,uy],[v,vx,vy])= int2d(Th) ((dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v))
17 // dxx(u)*dxx(v)+dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)+dyy(u)*dyy(v)
18 -(1-mu)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v))
19 -shift*u*v);
20 varf b([u,ux,uy],[v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v); // no Boundary condition
21 matrix OP= op(Vh,Vh,solver=Crout,factorize=1);
22 // crout solver because the matrix in not positive
23 matrix B= b(Vh,Vh,solver=CG,eps=1e-20);
24 // important remark:
25 // the boundary condition is make with exact penalisation:
26 // we put 1e30=tgv on the diagonal term to lock the degre of freedom.
27 // So take dirichlet boundary condition just on a variational form
28 // and not on b variationnal form.
29 // because we solve w=OP^-1*B*v
30
31 int nev=200; // number of computed eigen valeu close to shift
32 real[int] ev(nev); // to store the nev eigenvalue
33 Vh[int] [eV,eVx,eVy](nev); // to store the nev eigenvector
34
35 int k=EigenValue(OP,B,sym=true,sigma=shift,value=ev,vector=eV,

```

```
36             tol=1e-10,maxit=0,ncv=0) ;
37
38 {
39     ofstream f("testdir/h_"+H+"/Eigenvalue"+N+".txt");
40     f.precision(15);
41     for (int i=0;i<k;i++) {
42         f << i+1 << " " << ev[i] << endl;
43     }
44 }
45
46 // return the number of computed eigenvalue
47 real[int] viso=[0.0];
48 real xx,yy;
49 real h=1.0/N;
50 real hx=1.0/N,hy=H/N;
51 for (int n=0; n<k; n++) {
52     // plot(eV[n], cmm="Eigenvector "+(n+1)+", value =" + ev[n], wait=0,
53     // value=1, viso=viso);
54     // value=1);
55     ofstream g("testdir/h_"+H+"/u"+(n+1)+".dat");
56     for (int j=0; j <= N; j++) {
57         yy = j * hy;
58         for (int i=0; i<=N; i++) {
59             xx = i * hx;
60             g << eV[n](xx,yy) << " ";
61         }
62         g << endl;
63     }
64 }
65 cout << clock()-start << endl;
```

実行例 (N=160, H=1.1)

```
$ mkdir testdir
$ mkdir testdir/h_1.1
$ FreeFem++ rectangle.edp
160
1.1
$
```

付録B 正方形膜の重根の探索

Mathematica を使い $\lambda = m^2 + n^2$ ($0 \leq m \leq 200, 0 \leq n \leq 200$) の固有値 (Neumann 境界条件) を小さい方から 200 個計算しその重根を調べた。プログラムは P.98 に記載してある。

– 5 重根… 存在しない。

– 4 重根… 13 組。

$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \lambda_{i+3}$ のとき、 i は以下のものである。

25… (5, 0), (4, 3), (3, 4), (0, 5)

65… (8, 1), (7, 4), (4, 7), (1, 8)

85… (9, 2), (7, 6), (6, 7), (2, 9),

100… (10, 0), (8, 6), (6, 8), (0, 10)

125… (11, 2), (10, 5), (5, 10), (2, 11)

130… (11, 3), (9, 7), (7, 9), (3, 11)

145… (12, 1), (9, 8), (8, 9), (1, 12)

169… (13, 0), (12, 5), (5, 12), (0, 13)

170… (13, 1), (11, 7), (7, 11), (1, 13)

185… (13, 4), (11, 8), (8, 11), (4, 13)

205… (14, 3), (13, 6), (6, 13), (3, 14)

221… (14, 5), (11, 10), (10, 11), (5, 14)

225… (15, 0), (12, 9), (9, 12), (0, 15)

– 3 重根… 2 組。

$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2}$ のとき、 i は以下のものである。

50… (7, 1), (5, 5), (1, 7)

200… (14, 2), (10, 10), (2, 14)

– 2 重根… 66 個。

$\lambda_i = \lambda_{i+1}$ とするとき、 i は以下のものである。

1… (1, 0), (0, 1)

4… (2, 0), (0, 2)

5… (2, 1), (1, 2)

9… (3, 0), (0, 3)

10… (3, 1), (1, 3)

13… (3, 2), (2, 3)

16… (4, 0), (0, 4)

17… (4, 1), (1, 4)

20… (4, 2), (2, 4)

29… (5, 2), (2, 5)

34… (5, 3), (3, 5)

36... (6, 0), (0, 6)
 37... (6, 1), (1, 6)
 40... (6, 2), (2, 6)
 41... (5, 4), (4, 5)
 45... (6, 3), (3, 6)
 49... (7, 0), (0, 7)
 52... (6, 4), (4, 6)
 53... (7, 2), (2, 7)
 58... (7, 3), (3, 7)
 61... (6, 5), (5, 6)
 64... (8, 0), (0, 8)
 68... (8, 2), (2, 8)
 73... (8, 3), (3, 8)
 74... (7, 5), (5, 7)
 80... (8, 4), (4, 8)
 81... (9, 0), (0, 9)
 82... (9, 1), (1, 9)
 89... (8, 5), (5, 8)
 90... (9, 3), (3, 9)
 97... (9, 4), (4, 9)
 101... (10, 1), (1, 10)
 104... (10, 2), (2, 10)
 106... (9, 5), (5, 9)
 109... (10, 3), (3, 10)
 113... (8, 7), (7, 8)
 116... (10, 4), (4, 10)
 117... (9, 6), (6, 9)
 121... (11, 0), (0, 11)
 122... (11, 1), (1, 11)
 136... (10, 6), (6, 10)
 137... (11, 4), (4, 11)
 144... (12, 0), (0, 12)
 146... (11, 5), (5, 11)
 148... (12, 2), (2, 12)
 149... (10, 7), (7, 10)
 153... (12, 3), (3, 12)
 157... (11, 6), (6, 11)
 160... (12, 4), (4, 12)
 164... (10, 8), (8, 10)
 173... (13, 2), (2, 13)
 178... (13, 3), (3, 13)
 180... (12, 6), (6, 12)
 181... (10, 9), (9, 10)
 193... (12, 7), (7, 12)
 194... (13, 5), (5, 13)
 196... (14, 0), (0, 14)
 197... (14, 1), (1, 14)
 202... (11, 9), (9, 11)
 208... (12, 8), (8, 12)

212... (14, 4), (4, 14)
 218... (13, 7), (7, 13)
 226... (15, 1), (1, 15)
 229... (15, 2), (2, 15)
 232... (14, 6), (6, 14)

– 単根...9 個.

0... (0, 0)
 2... (1, 1)
 8... (2, 2)
 18... (3, 3)
 26... (1, 5)
 32... (4, 4)
 72... (6, 6)
 98... (7, 7)
 128... (8, 8)
 162... (9, 9)

B.1 差分法による固有値計算

P.93 のプログラムを実行した. ($\mu = 0.3, N = 1280$)

μ	λ_4	λ_{26}	λ_{27}	λ_{28}
0	250.35752	45643.142094	52278.653308	52278.653473
0.05	239.362566	45786.438743	51452.771433	51452.771575
0.1	228.152714	45887.891911	50564.958823	50564.958966
0.15	216.740134	45943.527094	49614.223013	49614.223138
0.2	205.136192	45948.007505	48601.082625	48601.082729
0.25	193.351025	45894.110813	47528.367558	47528.367662
0.3	181.394289	45771.964443	46402.357323	46402.357397
0.35	169.274829	45234.200231	45234.200287	45567.905037
0.4	157.001023	44040.882664	44040.882691	45262.754970
0.45	144.580348	42842.883249	42842.883252	44829.181763
0.5	132.019949	41652.121385	41652.121420	44227.632401

表 B.1: 0 でない最小固有値 λ_4 と $\lambda_{26}, \lambda_{27}, \lambda_{28}$

参考文献

- [1] Chladni, Ernst Florens Friedrich: Entdeckungen über die Theorie des Klanges (1787).
- [2] Chladni, Ernst Florens Friedrich, Neue Beyträge zur Akustik (1817).
- [3] 平野 裕輝, 正方形領域における重調和作用素の固有値問題 —差分法によるクラドニ図形の解析— (2012).
- [4] 加藤敏夫, 変分法, (自然科学者のための数学概論 応用編:寺沢寛一編、1960年初版).
- [5] 金子 晃, 偏微分方程式入門, 東京大学出版会 (1998年初版).
- [6] 菊地 文雄, 有限要素法概説 新訂版 (1999).
- [7] Lord Rayleigh, The theory of sound (1877).
- [8] 渡部 卓也, 棒の振動, 明治大学数学科卒業研究レポート (2010).
- [9] Mary D. Waller, Vibration of free square plates: PART I. Normal vibrating modes, Proceedings of Physical society (1939).
- [10] Mary D. Waller, Chladni Figure : A study in symmetry (1961).
- [11] Charles Wheatstone, On the Figures Obtained by Strewing Sand on Vibrating Surfaces, Commonly Called Acoustic Figures, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 123, pp.593—634 (1833).