

# 戦闘における Lanchester の法則

理工学部数学科 4 年 1 6 組 6 3 番  
渡邊隆之

2011 年 2 月 21 日

# 目次

第1章	はじめに	2
1.1	Lanchester の法則とは	2
1.2	Frederick W. Lanchester	2
1.3	戦の移り変わり	2
第2章	Lanchester の一次則	4
第3章	Lanchester の二次則	8
3.1	Lanchester の二次則	8
3.2	Koopman の戦力分割	14
3.3	Engel の硫黄島の激戦モデル	16
3.4	モデルの検証	20
3.5	Samz による米軍補給人数の仮定	26
3.6	Engel の値と Samz の値の Theil の尺度による比較	30
第4章	三次則モデルの紹介	32

# 第1章 はじめに

## 1.1 Lanchesterの法則とは

Lanchesterの法則とは、ある仮定の下交戦が行われた時、その戦闘の戦闘員の損耗過程を連立微分方程式で定式化したものの法則である。交戦形態を大きく三つに分け、今ではその交戦形態の仮定の下、一次、二次、三次則に分類されている。軍事OR(オペレーションズリサーチ)つまり軍事作戦研究の中で最も基本的、かつ中心的なものである。

## 1.2 Frederick W. Lanchester

Lanchesterは1866年にロンドンで生まれ、1946年に死亡した。もともとエンジニアであった彼は1916年に自費で[1]を出版した。これの第5章に $n$ -二乗法則、今でいうLanchesterの二次則が述べられており、Lanchesterにより軍事ORの礎は築かれた。これは今でもOR学会でLanchester賞が設けられるほど高く評価されているという。このモデルは第二次世界大戦中に米海軍ORグループの研究者たちが発掘し、拡張して以降、軍事ORの中心的なテーマとして盛んに研究されるようになった。

## 1.3 戦の移り変わり

昔、まだ鉄砲伝来前の戦は局地戦であった。剣を剣で受け流したり、矢を楯で守るような一騎打ちが行われていた。したがって戦闘員の士気や訓練の成果などの資質や、武装などの条件がともに等しければ、戦闘で勝利を得るために敵より一人でも戦闘員を増やすことが勝利を得るために重要であった。この様な場合は、後で紹介する一次則が成り立つ。

これに対して近代戦では武器の主役は銃や大砲となり、攻撃と防御が間接的に行われるようになった。戦闘が集団的に行われ、自軍の持てる士気や物資を戦場の一点に集中させるのも特徴である。この戦は特定の戦闘員を目標にするのでな

く、各戦闘員がランダムに狙われると考えられる。したがって、戦闘員数が多いほど攻撃は有利になり、逆に少なければ少ないほど不利になる。このような場合は、後で紹介する二次則が成り立つ。

最近の情報化社会では目標を探知する能力もおおいに戦いに影響するようになった。よりの確に攻撃を与え、よりの確に防空することでさらに戦闘が有利になると考えられるようになった。このような場合は、後で紹介する三次則が成り立つ。

時代の移り変わりによって戦闘の形も変わった。その基本的なモデルである Lanchester モデルは今でも軍事 OR の研究対象として発展し続けている。

## 第2章 Lanchesterの一次則

この章は Lanchester[1], 佐藤 [2] を参考にする。

Lanchester の一次則は、弓矢や剣などを用いた局地戦（一騎打ち）に見られる法則である。以下の仮定の下考えられる。

- ・ 両軍の兵士はどちらも敵一人を攻撃目標にする。
- ・ 兵士の資質は両軍とも自軍の中では同じである。
- ・ 戦は時間的に一様である。
- ・ 戦闘員補給は行われない。

赤軍  $x_0$  人 vs 白軍  $y_0$  人で戦闘を開始するとする。時刻  $t$  での有効戦闘員の数  $x(t), y(t)$  の関係式は  $\alpha, \beta > 0$  を損害率 (単位時間に撃破される兵力の期待数) の定数として

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta$$

で表わされる。これは次のように導かれる。 $\Delta t$  時間内に生じる戦闘員の減少数  $\Delta x, \Delta y$  はそれぞれ敵損害率に比例すると考える。 $\alpha, \beta$  をそれぞれ赤軍、白軍の損害率を損害率を表わす定数として、

$$\Delta x = -\alpha \Delta t, \quad \Delta y = -\beta \Delta t$$

が成り立つ。これより

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\beta$$

がいえる。 $x, y$  は正の整数であるが、両者ともに  $t$  の連続関数で、 $t$  について微分可能だと仮定すると、微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta \tag{2.1}$$

に書き換えられる。戦闘開始時  $t = 0$  の初期条件は

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (2.2)$$

となる。この解は

$$x(t) = x_0 - \alpha t, \quad y(t) = y_0 - \beta t \quad (2.3)$$

である。この兵力の損耗グラフは図 2.1 のようになる。図 2.1 は  $\alpha = \beta = 1$  であり、横軸を  $t$  として、100 人と 70 人で戦闘を開始したものである。

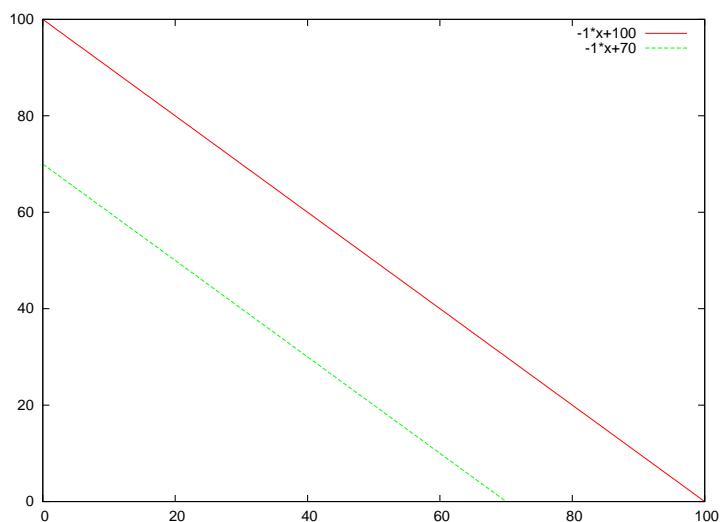


図 2.1:  $\alpha = \beta = 1$  の場合の兵力損耗のグラフ

(2.3) より時間  $t$  を消去すると

$$\frac{x_0 - x(t)}{y_0 - y(t)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.4)$$

である。ここで  $E = \frac{\alpha}{\beta}$  とおき、この  $E$  を 交換比 と呼ぶ。これは損害率の違いを表わす定数である。したがって (2.4) より

$$x_0 - x(t) = E(y_0 - y(t)) \quad (\clubsuit)$$

を得る。これが Lanchester の一次則 (一騎打ちの法則) である。

一方

$$\beta(x_0 - x(t)) = \alpha(y_0 - y(t)) \quad (2.5)$$

であり、 $x_0 - x(t)$ ,  $y_0 - y(t)$  は、それぞれ戦闘開始からある時点  $t$  までの赤軍白軍の戦死者数を表わし、 $\alpha, \beta$  はそれぞれ相手方の武器の性能とも考えられるから、この弓矢などの戦における法則は戦力の概念として

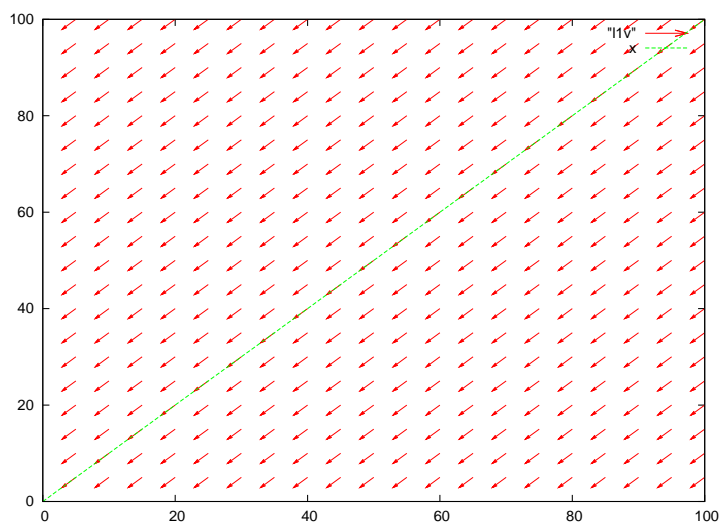


図 2.2:  $E = 1$  の場合の解直線と優勢分岐線

$$\text{戦闘力} = \text{武器の性能} \times \text{戦闘員数}$$

とも考えられているようである。ゆえに、敵味方が同じ性能の武装の場合、戦闘員数を多く持つことが勝利につながるといえる。

図 2.2 は、横軸を  $x$  軸、縦軸を  $y$  軸として、Lanchester の一次則の解軌道を表わしたものである。初期条件 (2.2) を決めれば、平面上の 1 点  $(x_0, y_0)$  を始点にし、一本の線分が決まる。すなわち、(2.1) の解がただ一つきまるのである。

また、この解のグラフより優勢分岐線、つまりその線分を境に優勢軍が代わる線分がはっきり分かる。Lanchester の一次則の場合優勢分岐線は

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \tag{2.6}$$

である。図 2.2 は  $E = 1$  の場合であり、この場合  $y = x$  である。そして  $x_0 > y_0$  のとき、すなわち赤軍の初期戦闘員数が白軍のそれより多い場合、やはり白軍の全滅時に赤軍が生存する。また  $y_0 > x_0$  すなわち白軍の初期戦闘員数が赤軍のそれを上回る場合も同じことがいえる。

これは次のことから分かる。(♣)において  $E = 1$  とすると

$$x - y = x_0 - y_0$$

となり、ここで一方の軍が全滅した時を考えて  $y = 0$  とおき  $x > 0$  に注意すると

$$x = x_0 - y_0 > 0$$

すなわち

$$x_0 > y_0$$

である。このことから  $E = 1$  のとき、Lanchester の一次則では初期戦闘員数が大きい軍が勝利することがいえる。

もし赤軍 100 人、白軍 70 人が同じ性能の武器で戦うとすると、白軍が全滅したときの赤軍の生存者数は (♣) より、 $E = 1$ ,  $y(t) = 0$ ,  $x_0 = 100$ ,  $y_0 = 70$  とおいて

$$x(t) = x_0 - y_0 = 100 - 70 = 30(\text{人}).$$

これが赤軍の生存者数である。図 2.1 はこの戦いの戦闘員の損耗を描いたものである。



# 第3章 Lanchesterの二次則

## 3.1 Lanchesterの二次則

この節は Lanchester[1], 佐藤 [2] を参考にする。

Lanchester の二次則は銃や大砲を使うような近代戦に見られる法則である。一対一でなく集団的に行われ、両軍とも戦場の一点に物資など兵力を集中し戦闘を有利にする努力がされる。またこれを集中効果と呼ぶ。この戦いは以下の仮定の下考えられる。

- ・ 両軍の兵士はどちらも敵全員から攻撃目標にされる。
- ・ 兵士の資質は両軍とも自軍の中では同じである。
- ・ 両軍の兵士の死傷率は敵軍兵士の数に比例する。
- ・ 戦は時間的に一様である。
- ・ 戦闘員補給は行われない。

赤軍  $x_0$  人 vs 白軍  $y_0$  人で戦闘を開始するとする。時刻  $t$  での有効戦闘員、つまり戦うことのできる兵士の数  $x(t), y(t)$  の関係式は  $\alpha, \beta > 0$  を損害率 (単位時間に敵の単位兵力に撃破される兵力の期待数) を表わす定数 として

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta x$$

で表わされ、その解から、時間  $t$  を消去して  $x(t), y(t)$  の関係を表わしたフェーズ解は、 $E = \frac{\alpha}{\beta}$  を用いて

$$x_0^2 - x(t)^2 = E(y_0^2 - y(t)^2) \quad (\diamond)$$

となる。これが Lanchester の二次則である。

微分方程式は次のように導かれる。 $\Delta t$  内の戦闘員の減少数は敵の総数  $x, y$  と損害率  $\alpha, \beta$  に比例すると考えるから  $\alpha, \beta > 0$  を定数として

$$\Delta x = -\alpha y \Delta t, \quad \Delta y = -\beta x \Delta t$$

である。両辺を  $\Delta t$  で割ると

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\alpha y, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\beta x$$

となる。したがって

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta x \quad (3.1)$$

が導かれる。

戦闘開始時  $t = 0$  の初期条件を

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (3.2)$$

である。(3.2) を満たす (3.1) の解法を考える。まず (3.1) を次のように書き換える

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

また初期条件 (3.2) は

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

と書ける。これを

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.5)$$

とおき、この (3.5) の初期値問題を解く。この解は

$$x(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left( x_0 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y_0 \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} + \left( x_0 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y_0 \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \right\} \quad (3.6)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x_0 + y_0 \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} - \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x_0 - y_0 \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \right\} \quad (3.7)$$

となる。

この解法は以下の様である。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

より、この固有値は  $t^2 - \alpha\beta = 0$  から

$$t = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

であるから

$$\pm\sqrt{\alpha\beta}$$

である。 $\alpha, \beta > 0$  だから固有値は相異なる実数となる。この場合の行列のスペクトル分解を行う。

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

とし、固有値  $\lambda_i$  に対する固有空間を  $F_i = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}\} (i = 1, 2)$  とする。 $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$ ,  $X = \mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$  (直和) であり、 $X$  から  $F_i$  の上への射影を  $P_i : X \rightarrow F_i$  で表わす。すると  $P_1 + P_2 = I$ ,  $P_i^2 = P_i$ ,  $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ ,  $(\mathbf{A} - \lambda_i)P_i = 0 (i = 1, 2)$  が成り立つ。これらより  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(P_1 + P_2) = \mathbf{A}P_1 + \mathbf{A}P_2 = \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2$  が成り立つ。

$$\lambda_1P_1 = \mathbf{A}P_1 = \mathbf{A}(I - P_2) = \mathbf{A} - \mathbf{A}P_2 = \mathbf{A} - \lambda_2(I - P_1)$$

であることより

$$(\lambda_1 - \lambda_2)P_1 = \mathbf{A} - \lambda_2I$$

であり、ゆえに

$$P_1 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2I}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

である。同様にして

$$P_2 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_1I}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

である。また

$$\mathbf{A}^n = (\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)^n = \lambda_1^n P_1 + \lambda_2^n P_2$$

であるから、従って

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\lambda_1} P_1 + e^{t\lambda_2} P_2$$

となる。これより (3.5) の解は次のように表わせる。

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 = (e^{t\lambda_1} P_1 + e^{t\lambda_2} P_2)\mathbf{x}_0$$

これより Lanchester の二次則を導く微分方程式系 (3.1) の解を (3.2) の初期条件のもとで求める。(3.8) より

$$P_1 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (e^{t\lambda_1} P_1 + e^{t\lambda_2} P_2) \mathbf{x}_0 \\ &= \left\{ e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} - e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \right\} \mathbf{x}_0 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} x_0 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y_0 \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x_0 + y_0 \end{pmatrix} + e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} x_0 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y_0 \\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x_0 + y_0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

である。よって (3.2) を満たす (3.1) の解は (3.6), (3.7) つまり

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left\{ (x_0 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y_0) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} + (x_0 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y_0) e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \right\} \\ y(t) &= \frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x_0 + y_0) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} - (\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x_0 - y_0) e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \right\} \end{aligned}$$

となる。

例

$\alpha = \beta = 1$ ,  $x_0 = 100$ ,  $y_0 = 70$  として (3.6), (3.7) は

$$x(t) = 5(17e^{-t} + 3e^t), \quad y(t) = 5(17e^{-t} - 3e^t) \quad (3.9)$$

である。 $x_0, y_0 \geq 0$  でないと意味がないので、(3.9) より  $y(t) \geq 0$  となる  $t$  の範囲を求めると

$$\begin{aligned} 5(17e^{-t} - 3e^t) \geq 0 &\rightarrow 3e^t \leq 17e^{-t} \\ &\rightarrow e^{2t} \leq \frac{17}{3} \\ &\rightarrow 2t \leq \log \frac{17}{3} \\ &\rightarrow t \leq \frac{\log \frac{17}{3}}{2} = \frac{1.734601}{2} = 0.867301. \end{aligned}$$

したがって  $t$  の定義域は

$$0 \leq t \leq 0.867301$$

である。

$$x(0.867301) \doteq 71.414284$$

であるから、赤軍 100 人白軍 70 人で戦闘を始めた場合白軍にはどんどん死傷者が出て、赤軍にはさほど戦死者が出ないことが分かる。この時の赤軍の死傷者は

$$x_0 - x(0.867301) \doteq 100 - 71.4 = 28.6$$

となり、したがって 29 人に留まる。このグラフは横軸を  $t$  として図 3.1 に描いてある。弓矢などの戦いでは赤軍にも 70 人死傷者が出るが、集中効果の大きい近代戦ではそうはならないのが大きな違いである。

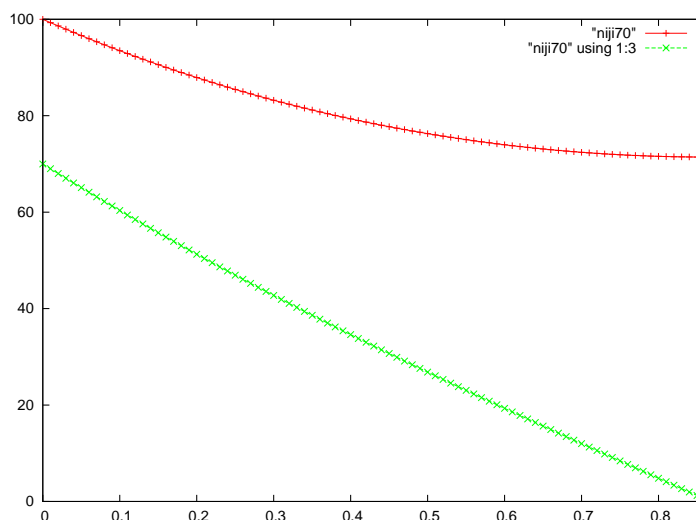


図 3.1:  $E = 1$ , (3.9) の戦闘員損耗グラフ

Lanchester の二次則を用いると、初期条件 (3.2) を満たす (3.1) の解が具体的に求まらなくとも、同様の結論を導けるとともに、Lanchester の一次則との法則の違いをはっきりできる。 $\frac{dx}{dt} = -\alpha y$  に  $2\beta x$  をかけ  $\frac{dy}{dt} = -\beta x$  に  $-2\alpha y$  をかけて足し合わせると

$$\beta 2x \frac{dx}{dt} - \alpha 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

であり、 $t$  について積分すると、

$$\beta x^2 - \alpha y^2 = C$$

を得る。ここで  $t = 0$  とおくと、初期条件より

$$C = \beta x_0^2 - \alpha y_0^2$$

これを代入して整理すると

$$\beta(x_0^2 - x^2) = \alpha(y_0^2 - y^2) \quad (3.10)$$

となる。 $x, y$  は戦闘中の任意の時点の赤軍と白軍の有効戦闘員数であるから  $x_0^2 - x^2$  と  $y_0^2 - y^2$  は戦死者が戦闘員の数の二乗の割合で生ずることを表わす。また、 $\alpha, \beta$  は武器の性能とも考えられるから、この法則は戦力内容の概念として

$$\text{戦闘力} = \text{武器の性能} \times (\text{戦闘員数})^2$$

と考えられているようである。交換比  $E$  を用いて

$$x_0^2 - x(t)^2 = E(y_0^2 - y(t)^2) \quad (\diamond)$$

と表わされる。こうして Lanchester の二次則は導かれた。

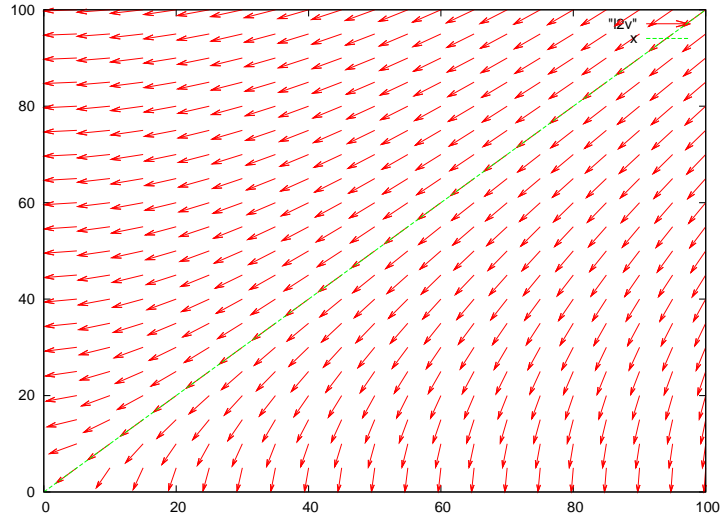


図 3.2:  $E = 1$  の場合の解曲線と優勢分岐線

図 3.2 は横軸を  $x$  軸とし縦軸を  $y$  軸として Lanchester の二次則の解曲線を表わすものである。初期条件 (3.2) を決めれば、平面上の 1 点  $(x_0, y_0)$  を始点にし、一本の双曲線が決まる。すなわち、(3.1) の解がただ一つきまる。

またその線分を境に優勢軍が代わる優勢分岐線は Lanchester の二次則の場合

$$y = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x \quad (3.11)$$

である。

百発百中の白砲一門は百発一中の赤砲百門に対抗できるかという軍備の質対量論争に Lanchester の二次則モデルは大きな影響を与えた。(3.11) に見て取れるように、兵力は損害率の平方根に比例し、交換比が  $\frac{1}{100}$  なので赤砲百門と同等な白砲は 10 門必要となる。

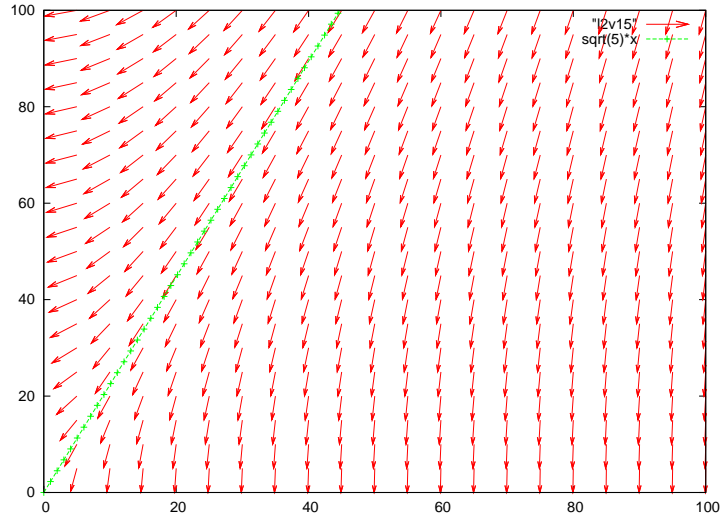


図 3.3:  $E = \frac{1}{5}, \alpha = 1, \beta = 5$  の場合の解曲線と優勢分岐線

図 3.3 は 優勢分岐線が  $y = \sqrt{5}x$  となり、交換比によってグラフは大きく変化することが分かる。

## 3.2 Koopman の戦力分割

この節は佐藤 [2] を参考にする。

Koopman は Lanchester の二次則を分析し、人数が少ない軍でも人数の多い軍を何らかの方法で分割できれば勝つこともできると考えた。

$E = 1$  の場合、つまり戦闘員の数以外同じ条件で戦闘が行われる場合。赤軍  $x_0$  人、白軍  $y_0$  人で戦闘開始するとし、白軍全滅時を考える。(◇)にて  $E = 1, y = 0$  とおくと

$$x^2 = x_0^2 - y_0^2 = (x_0 - y_0)(x_0 + y_0)$$

である。また、 $x_0 > 0, y_0 > 0$  であるから

$$x_0 > y_0$$

であり、これが赤軍が勝利するための条件である。この時の赤軍の残りの戦闘員数は

$$x = \sqrt{x_0^2 - y_0^2}$$

となる。

次に赤軍は  $x_0$  人で戦い、白軍は  $y_0$  人を分割して戦闘を開始する場合を考える。分割の割合を  $\theta(0 < \theta < 1)$  で表わし、白軍が戦闘員の一部  $\theta y_0$  人を温存して、残りの戦闘員  $(1 - \theta)y_0$  人で赤軍の  $x_0$  人と戦うものとする。したがって、初期条件は

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = (1 - \theta)y_0$$

である。このとき (◇) より

$$x_0^2 - x^2 = (1 - \theta)^2 y_0^2 - y^2$$

がいえ、前と同様な計算で赤軍が白軍第一陣を全滅させる条件は

$$x_0 > (1 - \theta)y_0 \tag{3.12}$$

であることがわかる。この時の赤軍の残りの戦闘員数  $x_1$  は

$$x_1 = \sqrt{x_0^2 - (1 - \theta)^2 y_0^2}$$

である。この後、白軍の温存していた第二陣  $\theta y_0$  人が赤軍の残りの戦闘員  $x_1$  と戦う。赤軍が白軍第二陣を全滅させて勝利を得る条件は、これまで同様に

$$x_1 > \theta y_0$$

であることがわかる。この両辺を二乗して  $x_0, y_0$  で書き換えると

$$x_0^2 > y_0^2(1 - 2\theta + 2\theta^2)$$

であり、両辺の平方根をとると

$$x_0 > y_0 \sqrt{1 - 2\theta + 2\theta^2} \tag{3.13}$$

である。ここで

$$1 - 2\theta + 2\theta^2 > (1 - \theta)^2$$

であるから、(3.12), (3.13) より  $x_0 > y_0 \sqrt{1 - 2\theta + 2\theta^2} > y_0(1 - \theta)$  がいえ、(3.13) が白軍を全滅させる条件であることが分かる。この最終時点での赤軍の生存者数は

$$x_2 = \sqrt{x_1^2 - \theta^2 y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - (1 - 2\theta + 2\theta^2)y_0^2}$$

である。

ところが、もし  $x_0 \leq y_0$  つまり赤軍の兵力が白軍に劣る場合であっても、何らかの方法で白軍を分割することができれば赤軍が勝つ場合も生まれてくる。それ



は  $\theta$  が (3.14) を満たすかで決まる。赤軍に最も有利な白軍の分割法は  $x_2$  を最大とする  $\theta$  の値で決まる。それは  $1 - 2\theta + 2\theta^2$  が最小となる  $\theta$  の値である。  $\theta$  について微分して

$$\frac{d}{d\theta}(1 - 2\theta + 2\theta^2) = -2 + 4\theta = 0$$

これより  $\theta = \frac{1}{2}$ , つまり白軍の初期戦闘員数  $y_0$  を半分に分割することができれば、初期戦闘員の少ない赤軍も勝てるのである。

$\theta = \frac{1}{2}$  を (3.14) に代入すると

$$x_0 > \frac{y_0}{\sqrt{2}} = 0.707y_0$$

すなわち、赤軍は白軍の約 71 パーセントの戦闘員数で勝つことができる。

次に  $E = 1$  の場合にこれまで同様に考えると、赤軍が勝利する条件は ( $\diamond$ ) より

$$x_0 > \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y_0 \quad (3.14)$$

であることが分かる。

### 3.3 Engel の硫黄島の激戦モデル

この節は Engel[3], 佐藤 [2], 飯田 [6] を参考にする。

太平洋戦争でアメリカ空軍 B-29 が日本を空爆するためには往復約 16 時間も要した。そこでアメリカは中継基地として硫黄島を占有したかった。この歴史的な戦争を J. H. Engel は詳しく分析し、Lanchester 二次則の方程式を拡張したモデルを考案し、硫黄島の戦いにおいてこのモデルが成立することを実証した。Lanchester 二次則を導く仮定を戦闘員補給のあるものに変え、この戦争において

- ・ 両軍の兵士はどちらも敵全員から攻撃目標にされる。
- ・ 兵士の資質は両軍とも自軍の中では同じである。
- ・ 両軍の兵士の死傷率は敵軍兵士の数に比例する。
- ・ 戦は時間的に一様である。
- ・ 米軍のみは三度の戦闘員補給を行った。

という仮定をする。そこで Engel は  $x, y$  はそれぞれ米軍、日本軍の有効戦闘員の数であり、  $p(t)$  は期間中単位時間当たり補給される兵力と考え、

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y + p(t), \quad \frac{dy}{dt} = -\beta x \quad (3.15)$$

このように拡張した。また、初期条件を

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0 \quad (3.16)$$

として、この解は

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cosh \sqrt{\alpha\beta} t - y_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta} t + \int_0^t \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t-s)p(s)ds \\ y(t) = -x_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sinh \sqrt{\alpha\beta} t + y_0 \cosh \sqrt{\alpha\beta} t - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t-s)p(s)ds \end{cases} \quad (3.17)$$

と表わされる。

以下の様な解法で (3.16) を満たす (3.15) の解 (3.17) を求める。まず (3.15) を行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし、これを

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p}(t) \quad (3.18)$$

と表わすとする。また、初期条件 (3.16) を行列を用いて

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.19)$$

と表わすとする。ここで定数変化法を用いて解く。(3.19) を満たす (3.18) の解をひとまず  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t)$  とおく。また  $\mathbf{y}$  は  $t$  について微分可能で  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  である。ここで  $\mathbf{x}$  を  $t$  について微分すると

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}'$$

であり、これを (3.18) に代入してまとめると

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}' = \mathbf{p}(t)$$

となり、逆行列をかけて

$$\mathbf{y}' = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{p}(t)$$

を得る。 $t$  について積分し  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  に注意すると

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{p}(s)ds + \mathbf{x}_0$$

であり、 $\mathbf{x}$  に戻すため  $e^{\mathbf{A}t}$  を両辺に左からかけると

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{p}(s)ds + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

である。 $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}s} = e^{\mathbf{A}(t-s)}$  より、(3.19) を満たす (3.18) の解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{p}(s)ds \quad (\star)$$

である。

さて  $\mathbf{A}$  の固有値は  $\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha \\ -\beta & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \alpha\beta = 0$  より、 $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\beta}, \lambda_2 = -\sqrt{\alpha\beta}$  である。これより  $\lambda_1, \lambda_2$  に対応する固有空間の上への射影は

$$P_1 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = I - P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & 1 \end{pmatrix}$$

であり、従って

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 &= (e^{t\lambda_1}P_1 + e^{t\lambda_2}P_2)\mathbf{x}_0 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & 1 \end{pmatrix} + e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}}{2} & -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{e^{\sqrt{\alpha\beta}t} - e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}}{2} \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{e^{\sqrt{\alpha\beta}t} - e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}}{2} & \frac{e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{\alpha\beta}t & -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta}t \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sinh \sqrt{\alpha\beta}t & \cosh \sqrt{\alpha\beta}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \cosh \sqrt{\alpha\beta}t - y_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta}t \\ -x_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sinh \sqrt{\alpha\beta}t + y_0 \cosh \sqrt{\alpha\beta}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。一方

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{p}(s) ds &= \int_0^t \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) & -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) & \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^t \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) p(s) ds \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) p(s) ds \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。これらのものを (\*) に代入すれば、(3.16) を満たす (3.15) の解として (3.17) つまり

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cosh \sqrt{\alpha\beta} t - y_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta} t + \int_0^t \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) p(s) ds \\ y(t) = -x_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sinh \sqrt{\alpha\beta} t + y_0 \cosh \sqrt{\alpha\beta} t - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) p(s) ds \end{cases}$$

を得る。

硫黄島の戦いでは戦闘開始時点  $t = 0$  では、硫黄島に上陸していた米兵はいなかったため、初期条件 (3.16) は

$$x(0) = x_0 = 0, \quad y(0) = y_0 \quad (3.20)$$

と考えられる。したがって (3.17) は

$$\begin{cases} x(t) = -y_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta} t + \int_0^t \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) p(s) ds \\ y(t) = y_0 \cosh \sqrt{\alpha\beta} t - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t-s) p(s) ds \end{cases} \quad (3.21)$$

と考えられる。

この式を利用して第  $t$  日から第  $t+1$  日の兵力を導く式を求める。まず、戦闘開始から  $t$  日たったその日の間に補給された米兵を  $C_t$  とする。これは  $t$  によって決まる負でない整数であるから

$$p(s) = C_t, \quad (t \leq s < t+1) \quad (3.22)$$

とおく。次に、(3.21) は

$$x(t+1) = -y_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t+1) + \int_0^{t+1} \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t+1-s) p(s) ds$$

であるが、右辺の第二項は

$$\begin{aligned} \int_0^{t+1} \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t+1-s) p(s) ds \\ = \int_0^t \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t+1-s) p(s) ds + \int_t^{t+1} \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t+1-s) p(s) ds \end{aligned}$$

である。ここで  $\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$  であるから

$$\begin{aligned} \int_0^t \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t+1-s)p(s)ds \\ &= \cosh \sqrt{\alpha\beta} \int_0^t \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t-s)p(s)ds \\ &\quad + \sinh \sqrt{\alpha\beta} \int_0^t \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t-s)p(s)ds \\ \int_t^{t+1} \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t+1-s)p(s)ds &= C_t \int_t^{t+1} \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t+1-s)ds \\ &= C_t \left[ -\frac{\sinh \sqrt{\alpha\beta}(t+1-s)}{\sqrt{\alpha\beta}} \right]_t^{t+1} \\ &= \frac{C_t \sinh \sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} \end{aligned}$$

となる。これを元の式に代入し、 $\cosh \sqrt{\alpha\beta}, \sinh \sqrt{\alpha\beta}$  についてまとめると

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \cosh \sqrt{\alpha\beta}(-y_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta} t + \int_0^t \cosh \sqrt{\alpha\beta}(t-s)p(s)ds) \\ &\quad - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta}(y_0 \cosh \sqrt{\alpha\beta} t - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t \sinh \sqrt{\alpha\beta}(t-s)p(s)ds - \frac{C_t}{\alpha}) \end{aligned}$$

を得る。ここで  $y(t+1)$  についても同様に計算すると

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) \cosh \sqrt{\alpha\beta} - (y(t) - \frac{C_t}{\alpha}) \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sinh \sqrt{\alpha\beta} \\ y(t+1) = -x(t) \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sinh \sqrt{\alpha\beta} + (y(t) - \frac{C_t}{\alpha}) \cosh \sqrt{\alpha\beta} + \frac{C_t}{\alpha} \end{cases} \quad (*)$$

を得る。

### 3.4 モデルの検証

この節は Engel[3], 佐藤 [2], 飯田 [6], Morehouse[7] を参考にする。

硫黄島の戦いは 1945 年 2 月 19 日から 3 月 26 日までの 36 日間行われた。しかし、戦闘開始から 28 日目の 3 月 18 日には硫黄島は米軍によってほぼ完全に制圧さ

れた。Engel はモデル (\*) を検証するため、係数  $\alpha, \beta$  を次のように推定した。 $T$  を戦闘最終日、すなわち  $T = 36$  とし、 $S = 28$  を硫黄島がほぼ完全に制圧された日と考える。まず、(3.15) の第二式を  $T$  まで積分すると

$$y(T) - y(0) = -\beta \int_0^T x(t) dt$$

となる。これより

$$\beta = \frac{(y(0) - y(T))}{\int_0^T x(t) dt}$$

となる。ここで分母の積分を  $\sum_{t=1}^T x(t)$  で置き換えれば、 $\beta$  の値は

$$\beta = \frac{(y(0) - y(T))}{\sum_{t=1}^T x(t)} \quad (3.23)$$

と考えられる。これより、 $y(t)$  の近似式

$$\bar{y}(t) = y(0) - \beta \left( \sum_{u=1}^t x(u) \right), \quad \bar{y}(0) = y(0) \quad (3.24)$$

が得られる。次に (3.15) の第一式を 0 から  $S$  まで積分すると

$$x(S) - x(0) = -\alpha \int_0^S y(t) dt + \int_0^S p(t) dt \quad (3.25)$$

である。また (3.22) より  $p(t)$  は負でない階段状の関数であるから

$$\int_0^S p(t) dt = \sum_{t=0}^S p(t) \quad (3.26)$$

である。一方、(3.25) の  $y(t)$  に (3.24) の  $\bar{y}(t)$  を代入すれば、近似的に (3.25) は

$$x(S) - x(0) = -\alpha \sum_{t=0}^S \bar{y}(t) + \sum_{t=0}^S p(t)$$

と考えられる。ここで  $x(0) = 0$  であるから

$$\alpha = \frac{\left( \sum_{t=0}^S p(t) - x(S) \right)}{\sum_{t=0}^S \bar{y}(t)} \quad (3.27)$$

と考えられる。

Engel は 1954 年に表 3.1 の Morehouse の文献による実測値から  $\alpha, \beta$  の近似値を求めた。今回私は、表 3.1 の Morehouse の文献のデータから計算機を用いて Engel が試みた計算を追試した。栗林忠道中将率いる日本軍は硫黄島を約 21500 人で防衛しようとし、36 日間戦い、この時点で戦闘能力をなくしたと考えられているから、

$$y(0) = 21,500(\text{人}), \quad y(36) = 0(\text{人})$$

と考える。一方、米軍は表 3.1 の Morehouse の文献による実測値より

$$x(0) = 0(\text{人}), \quad \sum_{t=0}^{36} x(t) = 2,024,829(\text{人})$$

である。これらの値を (3.23) に代入して  $\beta$  を計算すると

$$\beta = \frac{21,500}{2,024,879} \doteq 0.0106 \quad (3.28)$$

である。また米軍の補給は次のように行われたという。

$$p(t) = \begin{cases} 54000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 6000 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t < 4 \\ 0 & 4 \leq t < 5 \\ 13000 & 5 \leq t < 6 \\ 0 & 6 \leq t \end{cases} \quad (3.29)$$

28 日目にあたる 3 月 18 日に硫黄島はほぼ完全に制圧されたことを考え、表 3.1 の主戦闘期間の戦史データを用いて以下の計算結果を得る。

$$x(28) = 52,735, \quad \sum_{t=0}^{28} p(t) = 73,000, \quad \sum_{t=0}^{28} \bar{y}(t) \doteq 372,242$$

であるから

$$\alpha = \frac{73,000 - 52,735}{372,242} \doteq 0.0544 \quad (3.30)$$

このときの交換比は

$$E = \frac{\alpha}{\beta} \doteq 5.1271 \quad (3.31)$$

表 3.1: Morehouse の  $t$  日終了時の有効米兵数実測データ

1	52839
2	50945
3	56031
4	56031
5	53749
6	66155
7	65250
8	64378
9	62874
10	62339
11	61405
12	60667
13	59549
14	59345
15	59081
16	58779
17	58196
18	57259
19	56641
20	54792
21	55308
22	54796
23	54038
24	53938
25	53347
26	53072
27	52804
28	52735
29	52608
30	52507
31	52462
32	52304
33	52155
34	52155
35	52155
36	52140



である。この値より米軍の損害率は日本軍の損害率の約5倍にもなり、日本軍は米軍より武器も人数も圧倒的に不利であったにも関わらず、巧みな戦術で跳ね返し、効果的な戦闘を展開したことが分かる。太平洋戦争の中でもこの戦いで被った米軍の損害は、第一位の沖縄攻略戦について大きなものだったといわれている。

算出した  $\alpha, \beta$  の値と  $C_t$  に (3.29) を代入することにより、(\*) の計算を  $t = 0$  から行くと、米軍と日本軍の兵力の時間的推移がわかる。図 3.3 は計算機を用いて米軍と日本軍の時間的推移を算出し、横軸を  $t$  として表わしたものである。

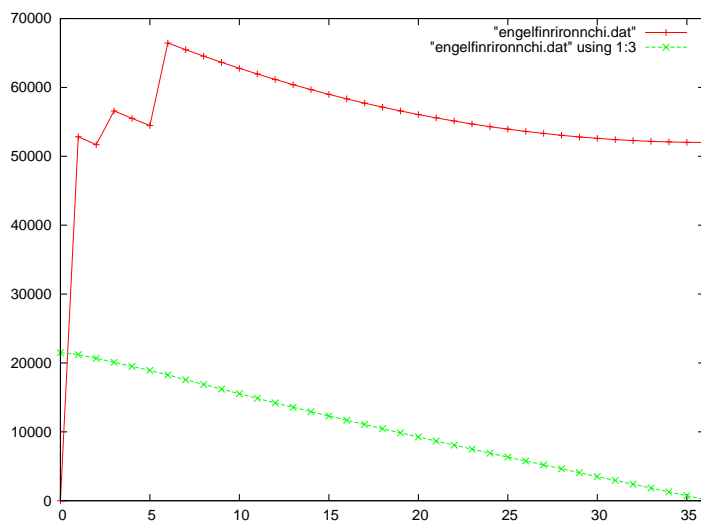


図 3.4: 米軍、日本軍の時間的推移

日本軍の実測データは「東京大空襲時に焼失してしまった」ということで、はっきりしたデータは分からなかった。しかしながら約 21,500 人という値を記したものは多かったので Engel の扱った値を採用した。この図 3.5 は、横軸  $t$  として米軍のデータを比較したものであるが、Morehouse の実測データと比べたこの図は、Lanchester の二次則の方程式を拡張したこの Engel のモデルにとてもよく当てはまることを見て取れる。

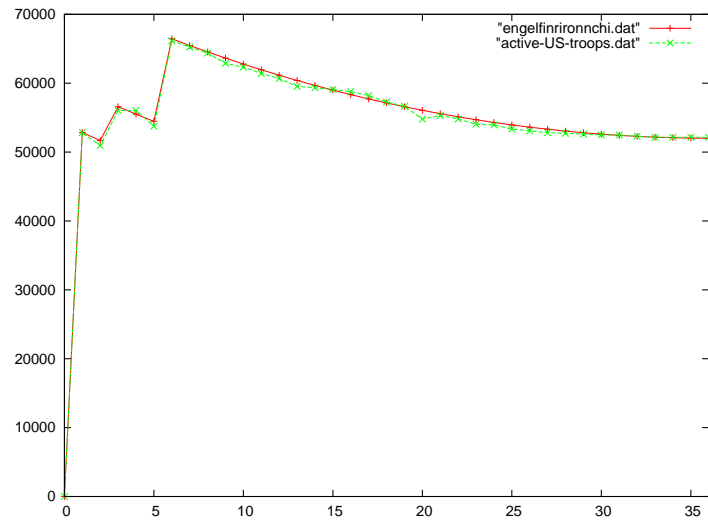


図 3.5: Engel のモデルの計算値と Morehouse の実測データの比較

### 3.5 Samz による米軍補給人数の仮定

この節は Samz[4], Lind[5], Morehouse[7] を参考にする。

Samz は硫黄島の戦いにおける米軍の戦闘員補給について、Engel の三度の補給説を否定した。54,000 人も的人数を一日に上陸させるのは不可能であり、船も足りなければ、上陸しても浜辺が混雑してしまうだけであると考えた。このことから Samz は Bartley と Morehouse の文献より、新しい上陸者数を仮定した。新しい仮定は次のようである。

$$p(t) = \begin{cases} 30000 & 0 \leq t < 1 \\ 1200 & 1 \leq t < 2 \\ 6735 & 2 \leq t < 3 \\ 3626 & 3 \leq t < 4 \\ 5158 & 4 \leq t < 5 \\ 13227 & 5 \leq t < 6 \\ 3054 & 6 \leq t < 7 \\ 3359 & 7 \leq t < 8 \\ 3180 & 8 \leq t < 9 \\ 1454 & 9 \leq t < 10 \\ 252 & 10 \leq t < 11 \\ 0 & 11 \leq t \end{cases} \quad (3.32)$$

私はこの Samz の仮定について、Engel の方法で戦闘員の時間的推移を計算機を用いて計算をした。しかしながら、表 3.1 のデータは初日を終えた時点で 52,839 人という値であり、初日の上陸者数 30,000 人という Samz の仮定が全く当てはまらない。(しかし表 3.1 は実践記録による一次資料として信頼されているようである)

そこで私はまず、被害者数から新しく有効戦闘員数のデータを算出することを試みた。(3.29) の  $p(t)$  のその日までの通算上陸者数つまり表 3.2 の 2 列目から Morehouse の実測データつまり表 3.2 の 3 列目の差をとり、その日までの総被害者数を求めた。それが表 3.2 の 4 列目である。そして総被害者数よりその日ごとの被害者数を求めた。表 3.2 はこれらを算出した値の表である。

次に、有効戦闘員数を算出する。私は、その日までの通算上陸者数つまり表 3.3 の 2 列目からその日までの総被害者数つまり表 3.2 の 4 列目を引けば、Samz の仮定によるその日ごとの有効兵力が算出できると考えた。Morehouse の文献の有効戦闘員数のデータが active-US-troops という名前であったのに対し、Samz の仮定か

表 3.2: 左から  $t$ ,  $p(t-1)$  の通算, Morehouse の  $t$  日目終了時の有効米兵数,  $t$  日目終了時までの米軍総被害者,  $t$  日目終了時の米軍被害者, を表わす表

0	0	0	0	0
1	54000	52839	1161	1161
2	54000	50945	3055	1894
3	60000	56031	3969	914
4	60000	56031	3969	0
5	60000	53749	6251	2282
6	73000	66155	6845	594
7	73000	65250	7750	905
8	73000	64378	8622	872
9	73000	62874	10126	1504
10	73000	62339	10661	535
11	73000	61405	11595	934
12	73000	60667	12333	738
13	73000	59549	13451	1118
14	73000	59345	13655	204
15	73000	59081	13919	264
16	73000	58779	14221	302
17	73000	58196	14804	583
18	73000	57259	15741	937
19	73000	56641	16359	618
20	73000	54792	18208	1849
21	73000	55308	17692	-516
22	73000	54796	18204	512
23	73000	54038	18962	758
24	73000	53938	19062	100
25	73000	53347	19653	591
26	73000	53072	19928	275
27	73000	52804	20196	268
28	73000	52735	20265	69
29	73000	52608	20392	127
30	73000	52507	20493	101
31	73000	52462	20538	45
32	73000	52304	20696	158
33	73000	52155	20845	149
34	73000	52155	20845	0
35	73000	52155	20845	0
36	73000	52140	20860	15

ら導くものを newactive-US-troops とすると、第  $n$  日の終了時点の  $newactive(n)$  は

$$newactive(n) = \sum_{t=0}^{n-1} p(t) - (\text{第 } n \text{ 日終了時までの総被害者}) \quad (3.33)$$

この算出した newactive-US-troops を用いて Engel の方法で計算しなおす。また、算出した newactive-US-troops は表 3.3 の右端に書いた。

日本軍のデータは先も述べたように残っていないため

$$y(0) = 21500(\text{人}), \quad y(36) = 0(\text{人})$$

として考える。一方

$$x(0) = 0(\text{人}), \quad \sum_{t=0}^{36} newactive(t) = 1,843,451(\text{人})$$

であるから。これを (3.23) に代入して計算すると。

$$\beta = \frac{21500}{1843451} \doteq 0.0117 \quad (3.34)$$

である。また表 3.3 より

$$newactive(28) = 50,980 \quad \sum_{t=0}^{28} p(t) = 71,245, \quad \sum_{t=0}^{28} \bar{y}(t) \doteq 390,768$$

であるから

$$\alpha = \frac{71,245 - 50,980}{390,768} \doteq 0.0519 \quad (3.35)$$

となり、このときの交換比は

$$E = \frac{\alpha}{\beta} \doteq 4.4466 \quad (3.36)$$

である。

表 3.3: 左から  $t$ , Samz の仮定した  $p(t-1)$  の通算, 第  $t$  日終了時の newactive-US-troops を表わす表

0	0	0
1	30000	28839
2	31200	28145
3	37935	33966
4	41561	37592
5	46719	40468
6	59946	53101
7	63000	55250
8	66359	57737
9	69539	59413
10	70993	60332
11	71245	59650
12	71245	58912
13	71245	57794
14	71245	57590
15	71245	57326
16	71245	57024
17	71245	56441
18	71245	55504
19	71245	54886
20	71245	53037
21	71245	53553
22	71245	53041
23	71245	52283
24	71245	52183
25	71245	51592
26	71245	51317
27	71245	51049
28	71245	50980
29	71245	50853
30	71245	50752
31	71245	50707
32	71245	50549
33	71245	50400
34	71245	50400
35	71245	50400
36	71245	50385

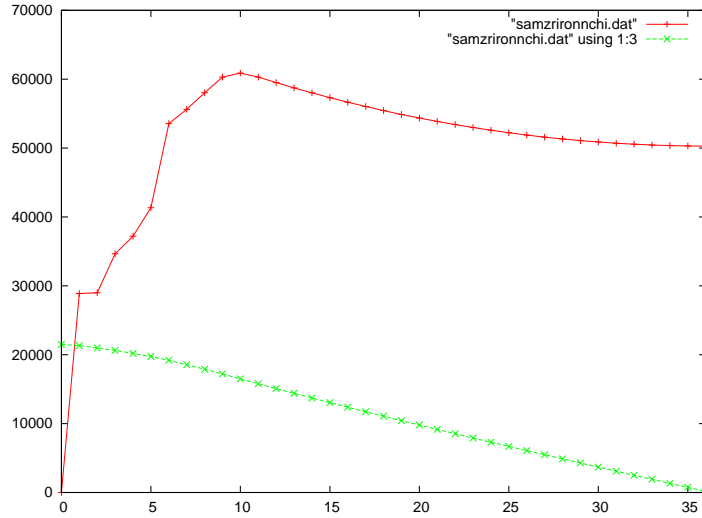


図 3.6: Samz の仮定から算出した米軍と日本軍の時間的推移

### 3.6 Engel の値と Samz の値の Theil の尺度による比較

この節は Samz[4] を参考にする。

Theil の尺度とは実測データと理論値のずれを計算するものであり、 $[0, 1]$  の中に収まり 0 に近ければ理論値が実測値に近いことを表わす。例えば  $U = 0.01$  は精度がよく、 $U = 0.50$  ならば悪いのである。

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{36} (D_i - O_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{36} D_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{36} O_i^2}} \quad (3.37)$$

$D_i$  はその日の変化の予測値で、 $D_i = x(i) - x(i-1)$  で表わせる。

$O_i$  は実際の変化の値で、 $O_i = p(i-1) - (\text{i 日の被害者})$  で表わせる。

計算機を用いて Engel の追試の値と表 3.1 の値より  $U$  を計算する。また  $p(t)$  の値は (3.29) であり、被害者数は表 3.2 の右端の値を用いる。Engel の計算結果は、先に述べたように

$$\alpha \doteq 0.0544, \quad \beta \doteq 0.0106, \quad E \doteq 5.1271$$

であった。これより計算結果は

$$U \doteq 0.025762$$

となる。

また、Samz の仮定から算出した値と表 3.3 の右端の newactive-US-troops の値より  $U$  を計算する。Samz の (3.32) の仮定を用い、被害者数は表 3.2 の右端の値を用いる。先に述べたように

$$\alpha \doteq 0.0519, \quad \beta \doteq 0.01117, \quad E \doteq 4.4466$$

であった。これより計算結果は

$$U \doteq 0.043207 \tag{3.38}$$

となる。

Samz の論文には、Morehouse の文献にはその日の実測被害者数が載っていると書いてあるが、今回 Morehouse の文献を見ることはできなかった。そのため表 3.1 の値と Engel の  $p(t)$  から被害者数を算出した表 3.2 の右端のデータを利用した。これによれば Engel のモデルは、もし Morehouse の表 3.1 の値が正しければ、Theil の尺度から見てもかなり正確であったと言える。

また Samz の算出した  $U$  の値は 0.0234688 となり、私の算出した値 0.043207 とは違っていた。やはり Morehouse の文献 [7] を一度読む価値がありそうである。



## 第4章 三次則モデルの紹介

この章は佐藤 [2], 飯田 [6] を参考にする。

Lanchester の法則は軍事 OR の研究によってさらなる進化を遂げている。ここでは、最近の技術革新により戦場の精密情報の取得が可能になり、高性能の兵器が戦域を支配するようになった現代の戦闘の法則に少し触れたいと思う。

Lanchester 自身は一、二次則のみ提唱したが、その後、研究により三次則が提唱された。三次則は情報化が進んだ現代の戦いに見られる法則である。現代のミサイル戦での戦闘力は、攻撃力と防空力の両面から作用し、射撃目標の偵察能力と防空力を考慮する必要がある。次のような仮定の下考えられる。

- ・ 兵士の資質は両軍とも自軍の中では同じである。
- ・ 両軍の兵士の死傷率は自軍の一単位に対する攻撃力に (攻撃密度) 比例する。
- ・ 戦は時間的に一様である。
- ・ 戦闘員補給は行われない。

赤軍  $x_0$  人 v s 白軍  $y_0$  人で戦闘を開始するとすると、時刻  $t$  での有効戦闘員の数  $x(t), y(t)$  の関係式は  $\alpha, \beta > 0$  を損害率の定数として

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta \frac{x}{y}$$

で表わされ、そのフェーズ解は  $E = \frac{\alpha}{\beta}$  を用いて

$$x_0^3 - x(t)^3 = E(y_0^3 - y(t)^3) \quad (\spadesuit)$$

となる。これが Lanchester の法則を発展させた三次則である。

また次のように三次則を導く。  $\Delta t$  内の戦闘員の減少数は 自軍の一単位兵力に加えられる敵数と損害率に比例すると考えるから  $\alpha, \beta > 0$  を損害率を表わす定数として

$$\Delta x = -\alpha \frac{y}{x} \Delta t, \quad \Delta y = -\beta \frac{x}{y} \Delta t$$

と表わせる。両辺を  $\Delta t$  で割ると

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\alpha \frac{y}{x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\beta \frac{x}{y}$$

となり、したがって

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta \frac{x}{y} \quad (4.1)$$

と表わされる。

三次則では、自軍の損耗は二次則のように敵の総数に比例するのではなく、自軍の一単位に対する敵数（攻撃密度）に比例するので、劣性軍の損耗は時間の経過に伴って増加し、優勢軍のそれは減少していく。ルンゲクッタ法で (4.1) の戦闘員の損耗を表わす時間解を書くと、横軸を  $t$  として図 4.1 のようになる。

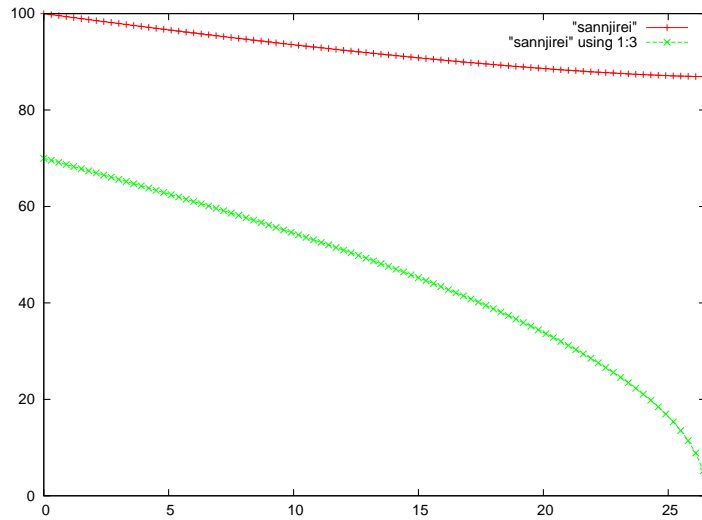


図 4.1:  $E = 1$ , 初期条件  $x(0) = 100$ ,  $y(0) = 70$  の場合の戦闘員損耗グラフ

また (4.1) より

$$\beta x^2 \frac{dx}{dt} = \alpha y^2 \frac{dy}{dt}$$

であり、

$$\begin{aligned} \beta x^2 \frac{dx}{dt} - \alpha y^2 \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \beta x^2 dx - \alpha y^2 dy &= 0 \end{aligned}$$

である。  $t$  について積分すると、

$$\beta \frac{1}{3} x^3 - \alpha \frac{1}{3} y^3 = C$$

となる。初期条件  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  とすると

$$C = \frac{1}{3}(\beta x_0^3 - \alpha y_0^3)$$

を得る。これを代入して整理すると

$$\beta(x_0^3 - x^3) = \alpha(y_0^3 - y^3) \quad (4.2)$$

となる。 $x, y$  は戦闘中の任意の時点  $t$  の赤軍と白軍の有効兵士数であるから  $x_0^3 - x^3$  と  $y_0^3 - y^3$  は戦死者が兵士の数の三乗の割合で生ずることを表わす。また、 $\alpha, \beta$  は武器の性能であるとも考えられるから、この法則は戦力内容の概念として

$$\text{戦闘力} = \text{武器の性能} \times (\text{戦闘員数})^3$$

と考えられているという。交換比  $E$  を用いて

$$x_0^3 - x(t)^3 = E(y_0^3 - y(t)^3) \quad (\spadesuit)$$

と表わされる。これが三次則と呼ばれる所以である。こうして三次則は導かれた。三次則の解曲線は急速な展開をする。これは横軸  $x$  縦軸  $y$  として図 4.2 に表わされている。

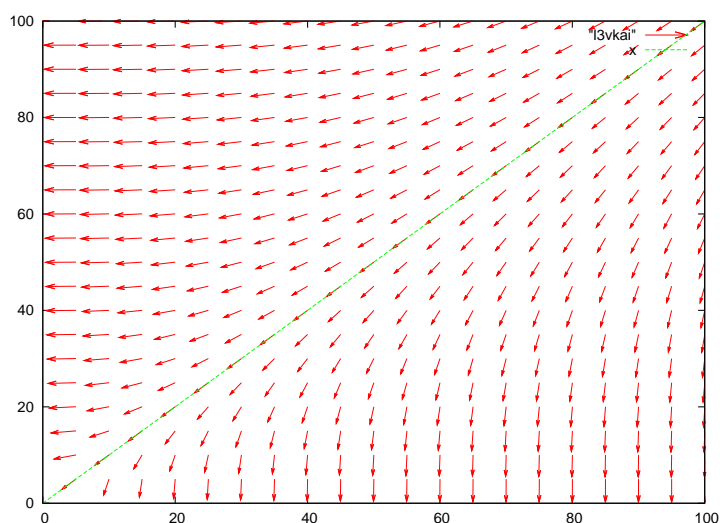


図 4.2:  $E=1$  の場合の三次則モデルの解曲線と優勢分岐線

図 4.2 より、初期条件を決めれば、平面上の 1 点  $(x_0, y_0)$  を始点にし、一本の曲線が決まる。すなわち、(4.1) の解がただ一つ決まるのである。

二次則の時よりも急速な展開をすることが図 4.3 より見て取れる。また図 4.3 は赤が三次則、青が二次則を表わしている。

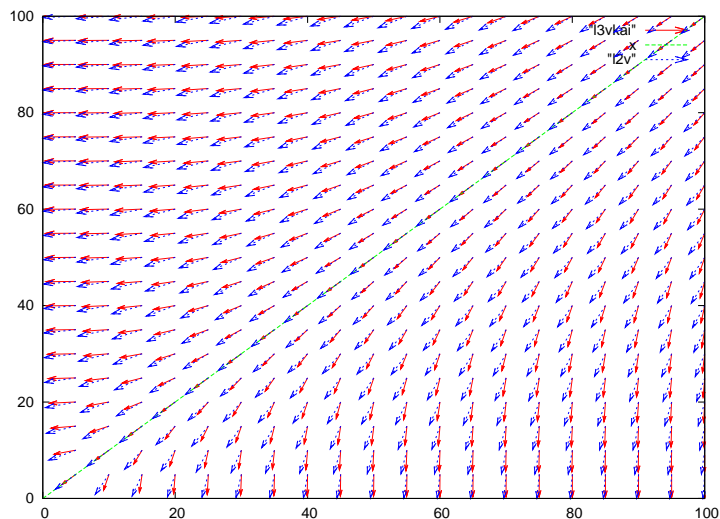


図 4.3: Lanchester 二次則モデルと三次則モデルの解曲線の比較

また、その線を境に優勢軍が代わる優勢分岐線は三次則の場合

$$y = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}x \quad (4.3)$$

である。これより

$$\sqrt[3]{\beta}x_0 > \sqrt[3]{\alpha}y_0$$

の時赤軍が優勢であり、白軍全滅時の赤軍の残りの有効戦闘員数は

$$x = \sqrt[3]{x_0^3 - \frac{\alpha}{\beta}y_0^3}$$

である。

## 関連図書

- [1] Frederick W. Lanchester : Aircraft in Warfare; the Dawn of the Fourth Arm, Constable and Company, Ltd, London (1916).
- [2] 佐藤 總夫、自然の数理と社会の数理 I, 日本評論社 (1984).
- [3] J. H. Engel : A Verification of Lanchester's Law, Journal of the Operations Research Society of America, Vol.2, No.2 (1954), pp.49-52.
- [4] Robert W. Samz : Some Comments on Engel's "A Verification of Lanchester's Law" Operations Research, Vol.20, No.1 (1972), pp.49-52.
- [5] Christine Lind : verifying Lanchester's Combat Model Battle of Iwo Jima (2009).
- [6] 飯田耕司、改訂 軍事 OR の理論, 三恵社 (2010).
- [7] Capt Clifford P. Morehouse : The Iwo Jima Operation, Headquarters US Marine Corps, Washington (1946).