

2010年度卒業研究レポート ボールの軌跡

明治大学工学部数学科
石川雅基

2011年2月25日

目次

第1章	はじめに	2
第2章	2次元平面内でのボールの軌道	3
2.1	空気の影響を無視した場合	3
2.2	空気による抗力	4
2.3	回転する物体に働く揚力	6
第3章	3次元空間でのボールの軌跡	9
第4章	まとめ	16
第5章	Ruby を使用する	17
第6章	プログラムの紹介	18

第1章 はじめに

今回私は「ボールの軌跡（魔球を求めて）」を研究のテーマにした。ボールは野球ボール（質量：0.15(kg), 半径:0.035(m)）を考え、空気中の軌跡を明らかにしていく。回転を与えられたボールは、重力、抗力、揚力の力を受け空気中を移動していく。この現象は常微分方程式を用いてモデル化することができる。今まで数値解析を学んできた中で色々な方程式を扱ってきたので、身近なスポーツに用いるボールの軌跡を数値解析できることに非常に興味をもった。

数値シミュレーションを行うのでコンピュータを用いて3次元空間でのボールの軌跡をモデル化するというのが目標である。

第2章 2次元平面内でのボールの軌道

2.1 空気の影響を無視した場合

まずは空気抵抗、揚力を考えず、理想化された平面でのボールの軌跡を考える。水平方向を x 軸、鉛直方向を z 軸として運動方程式は、 $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$ 、 $\mathbf{g} = (0, -g)$ として、

$$(2.1) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g}$$

で与えられる。初期条件を $z(0) = z_0$ 、 $x(0) = x_0$ 、 $\frac{dz}{dt} = v_0$ 、 $\frac{dx}{dt} = u_0$ として解くと、

$$(2.2) \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} u_0 t \\ v_0 - gt \end{pmatrix}$$

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + u_0 t \\ z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{pmatrix}$$

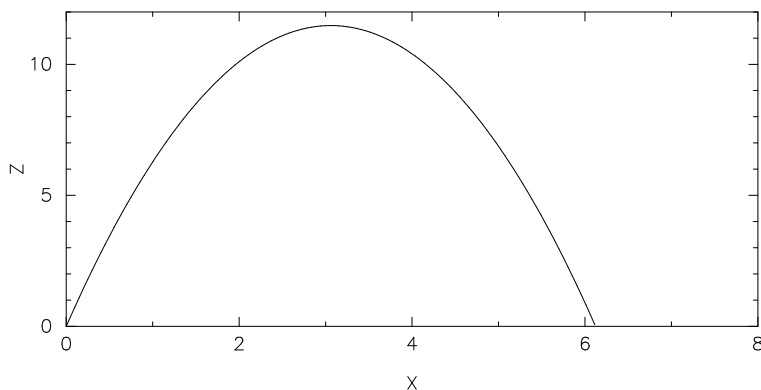


図 2.1: $\mathbf{v} = (2.0, 15.0)$ とした空気力のない平面上で放物運動。

2.2 空気による抗力

通常、空気中を移動する物体には空気による抗力が働く。先の理想化された2次元空間内でのボールの軌跡のようにきれいな放物線は描かない。それをこれから紹介する。

空気抵抗は速度に並行で逆向きに働き、速度の2乗に比例する。力は、速度を v として

$$(2.4) \quad -cv|v|$$

と表せる。 c は比例係数であり、空気対ボールや人で計算する場合、その表式を与えると、

$$(2.5) \quad \frac{-C_d \rho S v |v|}{2}$$

となる。 C_d は抗力係数、 ρ は空気密度、 m は質量、 S はボールの断面積を表す。板やボールである場合は C_d は0.2から1の間になる。空気抵抗を考慮したボールの軌跡を求める方程式は、

$$(2.6) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -c\mathbf{v}v + \mathbf{g}$$

それぞれ、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ である。初期条件を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ で $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ として解いていく。図3.1に抗力を加えたグラフ¹は以下の通りになった。

¹プログラムは巻末に掲載。

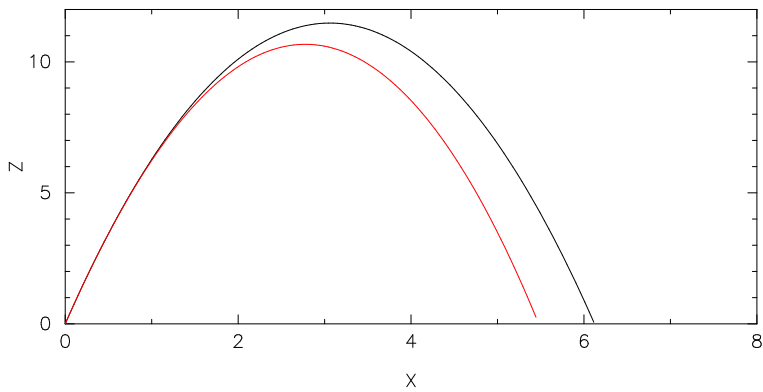


図 2.2: $\boldsymbol{v} = (2.0, 15.0)$ に、 $C_D = 0.4$ として投げた場合。赤線が抗力を加味した軌跡

このように理想化された場合と違い、空気抵抗を加味すると水平方向の速度が減少していき、飛距離に差がでる。また、鉛直方向の速度にも空気抵抗は働いているため飛ぶ高さも小さくなっている。

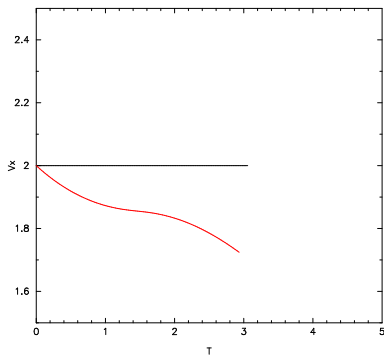


図 2.3: $z(t) > 0$ の間、図 2.2 を時間 t に対して v_x の変化をプロットしたもの

抗力が速度の二乗に比例しているということと、抗力が働いている方が早い時間で地面に着いていることもわかる。

2.3 回転する物体に働く揚力

トップスピンとバックスピンというものがある。トップスピンは進行方向に対して垂直で地面と平行な回転軸で前回転するスピンであり、バックスピンは回転軸はトップスピンと一緒に、回転が逆回転しているものをいう。空気中を移動する物体に回転を加えることで進行方向に垂直な方向に揚力という力が加わる。実際に、野球のピッチャーが投げたボールをバッターが打とうとするとき、ボールがホップしてくるような感覚を受け、打ちづらくなるという現象は揚力が関係している。

揚力は一般に次のように与えられる。揚力係数を C_L 、空気密度 ρ 、ボールの断面積 S 、速さ V とした時、揚力 L は、

$$(2.7) \quad L = \frac{C_L \rho S V^2}{2}$$

と書ける。 C_L は

$$(2.8) \quad C_L = \frac{2\alpha r \omega}{V}$$

で表せる。 r はボールの半径、 ω は回転の角速度、 α は比例係数²である。つまり揚力はボールの速度と回転速度の積によるものとわかる。(回転速度は回転数と半径の積)

解く方程式は (2.6) 式に揚力 L をつけたもの

$$(2.9) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -c\mathbf{v}\mathbf{v} + \frac{L}{m}\mathbf{n} + \mathbf{g}$$

を解く。 \mathbf{n} は速度方向の単位ベクトルを反時計回りに 90° 回転させたもので、

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \begin{pmatrix} -v_z \\ v_x \end{pmatrix}.$$

と表す。揚力の影響を加味した軌跡を図 3.1 に加えて描くと

² α はボールの表面の状態やレイノルズ数などによって決まる比例係数

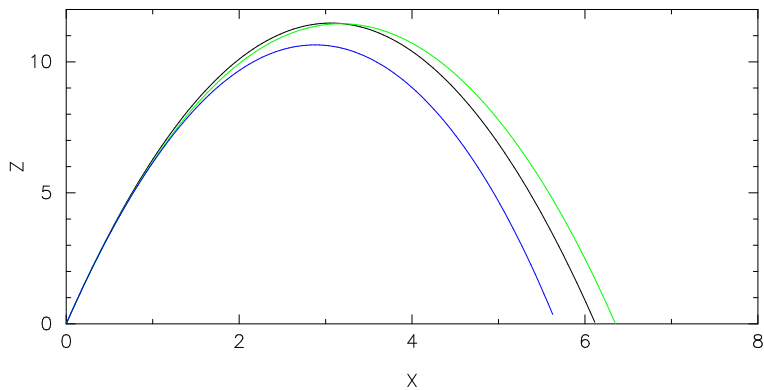


図 2.4: トップスピン : $\mathbf{v} = (2.0, 15.0)$ に、 $C_L = 0.028$ 、 $C_D = 0.4$ を加味した場合。緑線が揚力、青線が抗力&揚力が働いている軌跡

となる。(プログラムは巻末掲載)あまり差が見られないと思うが、ボールが最高点に達して落下するまでの間にも揚力が働いて飛距離が少し伸びているのがわかる。

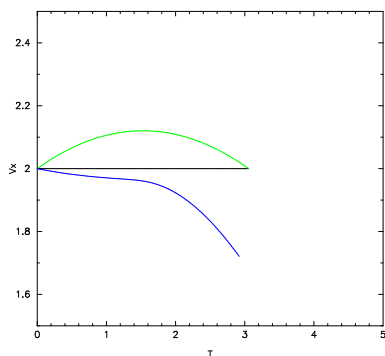


図 2.5: $z(t) > 0$ の間、図 2.4 を時間 t に対して v_x の変化をプロットしたもの

トップスピンをかけることで揚力が働くがその影響に注目。ボールが鉛直斜め上向きに進んでるときは、進行方向とは垂直な方向に揚力が働いている。そのため揚力の水平方向の力が v_x に加わり速度を上げている。

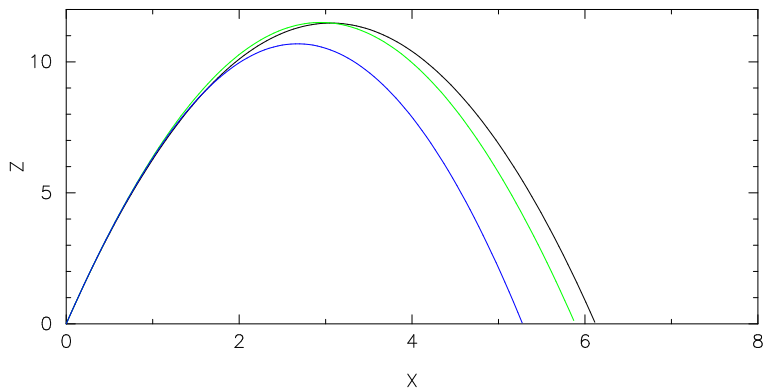


図 2.6: バックスピン : $\mathbf{v} = (2.0, 15.0)$ に、 $C_L = 0.028$ 、 $C_D = 0.4$ を加味した場合。緑線が揚力、青線が抗力&揚力が働いている軌跡

トックスピンと違い飛距離が短くなっている。また高さの最高点に到達する位置が空気力を無視した場合より早くきていることがわかる。これは揚力の水平方向・鉛直方向の力が v_x 、 v_z に加わったためだとわかる。

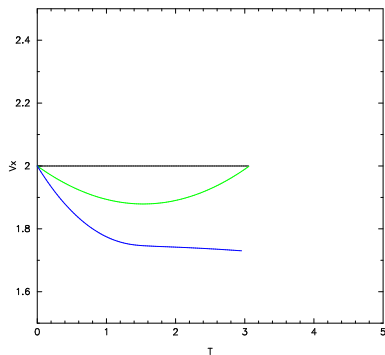


図 2.7: $z(t) > 0$ の間、図 2.6 を時間 t に対して v_x の変化をプロットしたもの

バックスピンの場合は、揚力の水平方向・鉛直方向の力が速さの水平方向・鉛直方向とは逆向きに働くため投げ始めは速度減少している。落ち始めると揚力の力成分が正に働くため水平方向の速度があがってくるのがわかる。

第3章 3次元空間でのボールの軌跡

今まで2次元でやっていた軌跡を3次元でシミュレーションすることを試みる。

3次元での場合、回転軸の方向が揚力に影響するので、回転軸と速度で表せることができる揚力を用いる。それはマグヌス力¹と呼ばれており、関係式は $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 、 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ として

$$(3.1) \quad \vec{F}_M = \tilde{S}(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

で与える。 $\vec{\omega}$ は回転軸の向きであり、 $|\vec{\omega}|$ が回転数を表す。 \tilde{S} は比例係数で (2.7) 式と (2.8) 式から $L = \alpha r \omega \rho S \mathbf{v}$ と表せ、マグヌス力の \tilde{S} と比較すると $\tilde{S} = \alpha r \rho S$ となり、 $\alpha = 0.35$ とすれば $\frac{\tilde{S}}{m} = 4.1 \times 10^{-4}$ で与えられる。 $(() \times ())$ は外積

解く方程式は $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ として (3.11) 式の $L\mathbf{n}$ を \vec{F}_M に置き換えたもの

$$(3.2) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -c\mathbf{v}\mathbf{v} + \frac{1}{m}\vec{F}_M + \mathbf{g}$$

をコンピュータで解き、プロットしていく。

¹<http://ayapin.film.s.dendai.ac.jp/~matuda/TeX/PDF/compss03-4.pdf>

これからはプロットした結果を載せる。野球選手が投げる場合を想定し、 $\boldsymbol{x}=(0,0,1)$ からのプロットを載せる。それぞれ x - z 平面と x - y 平面の2つのグラフを載せる。

- 抗力、揚力、揚力&抗力を表す。
- バックスピン

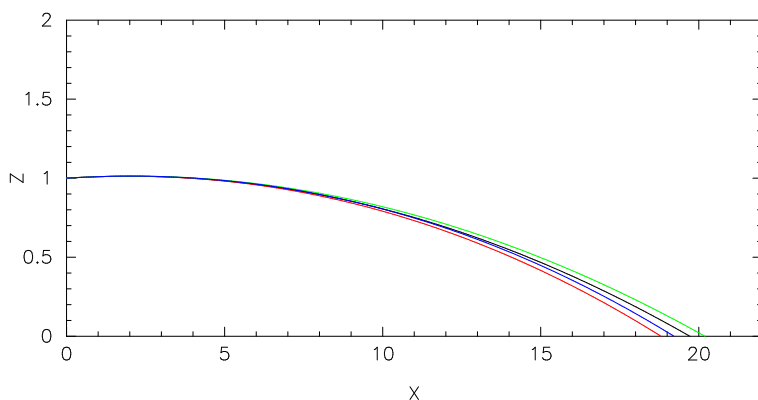


図 3.1: $\boldsymbol{v} = (39, 0, 0.5)$ 、 $\boldsymbol{\omega} = (0, -40, 0)$ 、 $C_D = 0.4$

バックスピンでの揚力は、揚力の水平方向の力の成分がボールの水平方向の速度に正に働くので揚力がない場合に比べて飛距離が伸びている。

- トップスピン

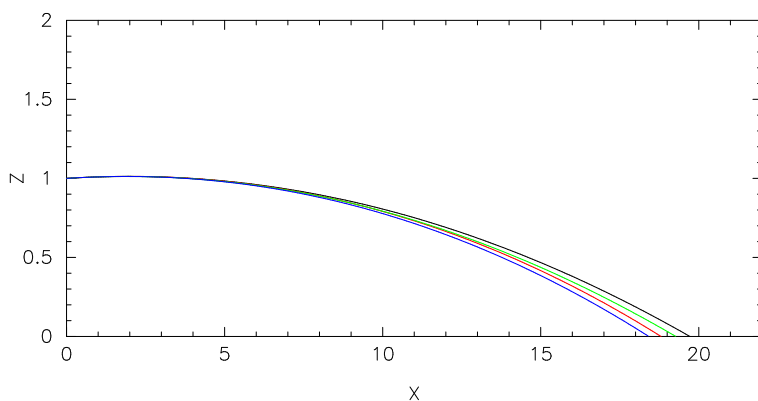


図 3.2: $\boldsymbol{v} = (39, 0, 0.5)$ 、 $\boldsymbol{\omega} = (0, 40, 0)$ 、 $C_D = 0.4$ の場合

トップスピンでは揚力は、揚力の水平方向の力の成分がボールの水平方向の速度に負に働くので揚力がない場合に比べて飛距離が短くなる。

- シュート…投手の利き腕方向に曲がる球種。特に速度の速いものは高速シュートとも呼ばれる。

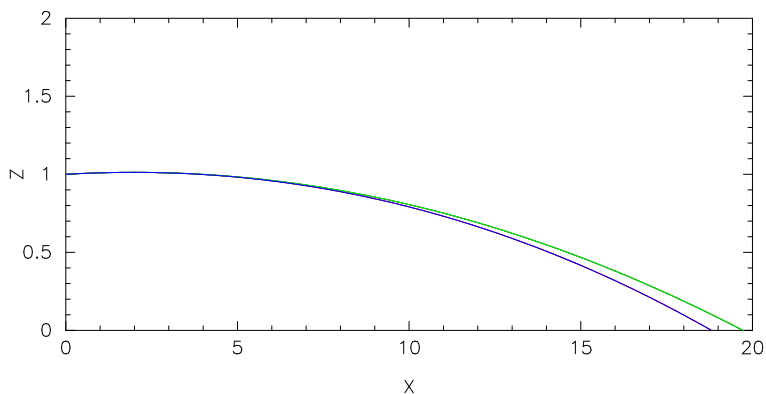


図 3.3: $\mathbf{v} = (39, 0, 0.5)$ 、 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 40)$ 、 $C_D = 0.4$ の場合

ここで回転軸は z 軸に並行であり、揚力は飛距離にあまり影響しない。またここで差がついたのは抗力の有無であった。下の図も条件は一緒である。

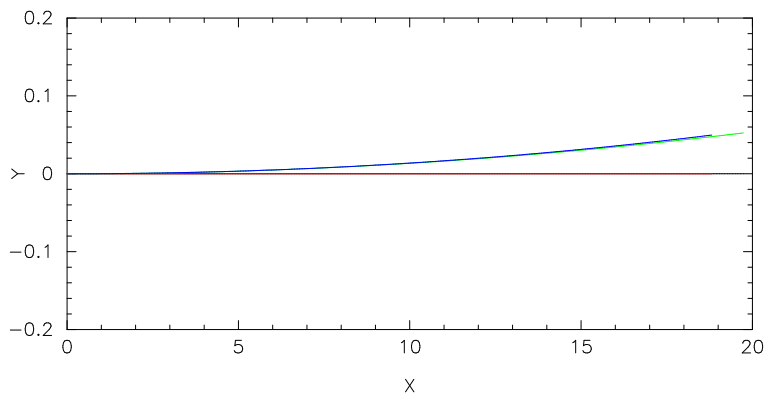


図 3.4: x-y 平面で見た図

進行方向に対して左に曲がりながら進んでいる。また緑線と青線を見ると曲がり方には抗力の有無の影響は小さいということがわかった。

- シンカー…投手の利き腕方向に曲がりながら落ちる球種。
シンカーの場合、回転軸は $(0,1,1)$ (または $(0,-1,-1)$) となることに注意してプロットする。

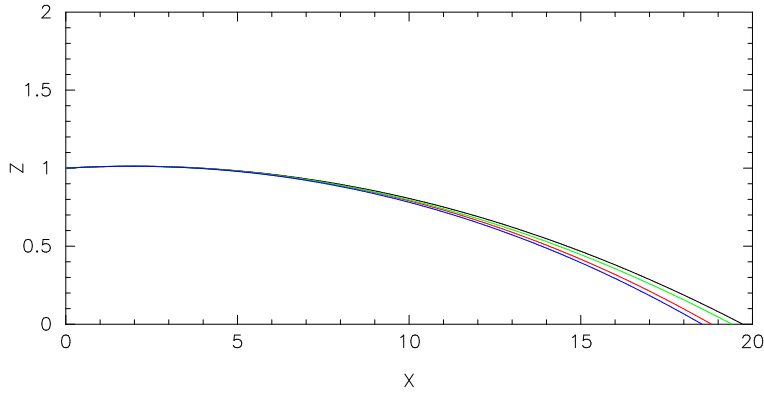


図 3.5: $\mathbf{v} = (39.0, 0.0, 0.5)$ 、 $\boldsymbol{\omega} = (0.0, 28.0, 28.0)$ 、 $C_D = 0.4$

シュートの場合と違ってシンカーの回転は揚力の力成分に鉛直下向きの成分ができるので、揚力や抗力がかかるほどボールは落ちている。

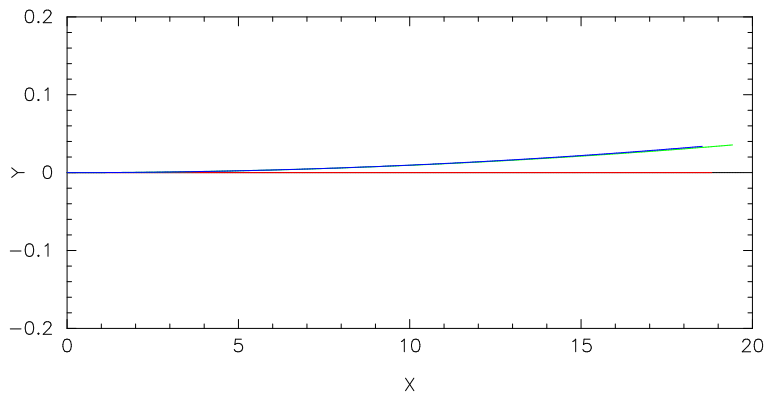


図 3.6: x-y 平面で見ると

鉛直方向では落ち方に差がでたが、上からみるとほぼ同じ軌道を描いている。また、シュートが $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 40)$ に対して、シンカーは $\boldsymbol{\omega} = (0, 28, 28)$ であるのでその分 x-y 平面での曲がり方に差がでてくる。シュートの方が曲がり方が強い。

- スライダー…投手の利き腕と反対の方向に滑る（スライドする）ように曲がる球種。今回はシンカーのボールの回転が逆回転しているものをスライダーボールとして調べる。

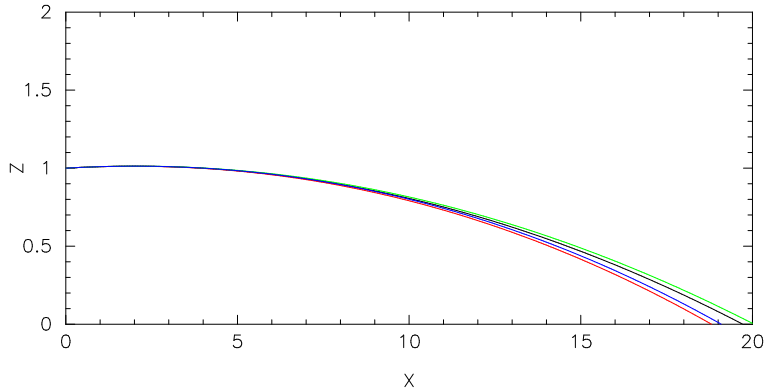


図 3.7: $\mathbf{v} = (39.0, 0.0, 0.5)$ 、 $\boldsymbol{\omega} = (0.0, -28.0, -28.0)$ 、 $C_D = 0.4$

シンカーとは違い揚力がある方が飛距離が伸びているのがわかる。これはスライダー回転には揚力の力成分に鉛直上向きの力がでることによって滞空時間が少し伸び、その分水平距離を伸ばしたものと考えられる。x-y 平面で見た図は

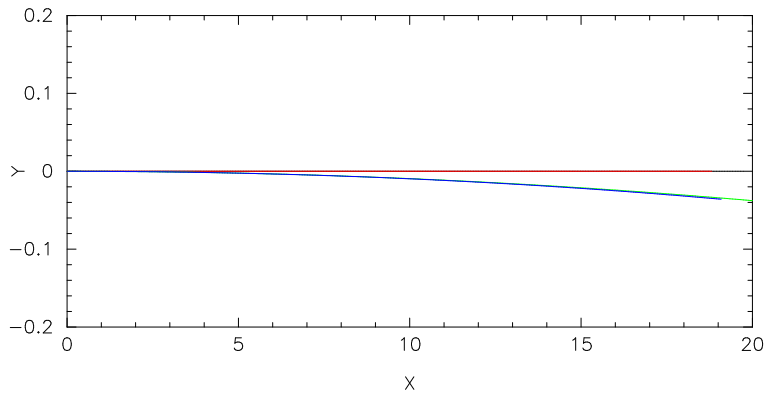


図 3.8: x-y 平面で見る

スライダーも揚力の影響を受け進行方向に対して右に曲がっているのがわかる。

- アンダースロー…地面すれすれのところからボールを放つ投球フォーム、回転は進行方向に平行になり、“ジャイロボール”と言われる

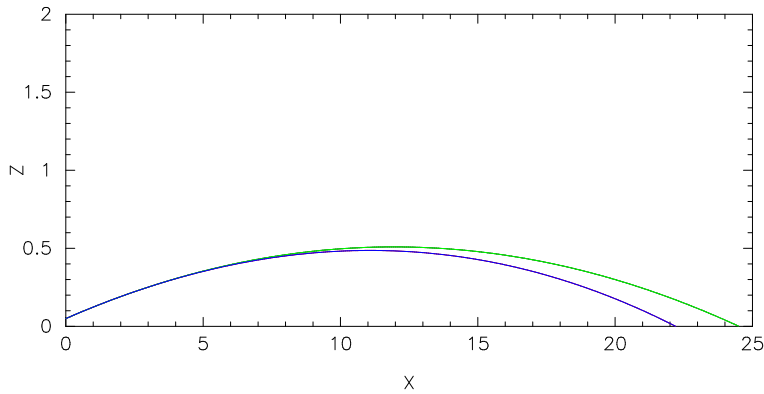


図 3.9: $\mathbf{v} = (39.0, 0.0, 3.0)$ 、 $\boldsymbol{\omega} = (40.0, 0.0, 0.0)$ 、 $C_D = 0.4$

ジャイロボールで放たれたボールは回転をしながらも軌道は空気力の影響を受けていないボールの軌道と一緒である。

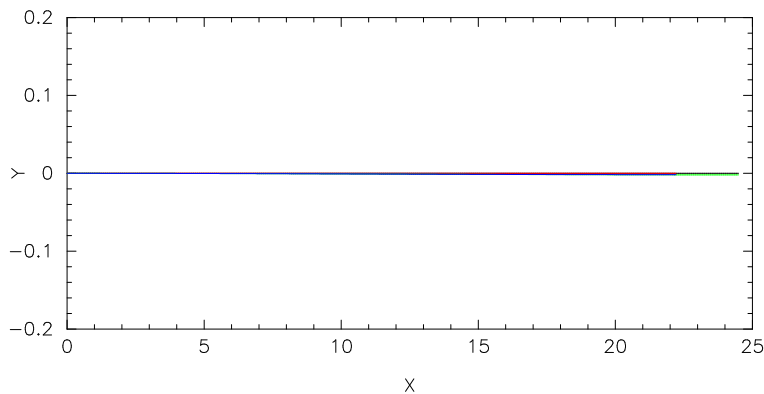


図 3.10: 左右に変化しないジャイロボール

上から見てもボールは回転していても左右に変化はない。これはマグヌス力をベクトル積で表したが、この時の $\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{v} の外積の計算によるものである。ボールというのは投げる際回転がかかってしまうものであり、バッターもそれに慣れている。ジャイロボールというのは回転しながらも変化しないが故にバッターは打ちづらさを感じてしまうのだと考える。

第4章 まとめ

今回、牧野氏の「とんでる力学」を参考に3次元でのボールの運動をシミュレーションした。抗力や揚力の影響を受けることで軌跡に大きな変化を与えることが今回の研究を通して知ることができた。また、プログラムを作成することにより、手軽に（実際は少し時間がかかる）シミュレーションで確かめることができるのは発展性を与えてくれた。今回は考察をしていないが、抗力・揚力が働いている空間での投げる角度と飛距離の関係や、速度変化、他のボールでの解析など、まだまだ考察の余地は有り余っているのだと感じた。

回転する物体には揚力が働くが、その揚力、マグヌス力というのが明確に一般化できたわけではなく、今回はある程度の近似を行ったにすぎない。より精度を上げるためにはどのような手段が必要なのか、まだまだこの研究の面白さが残っている。

明確にできたことが少ないにせよ、方程式を導き、プログラムを作成し、一つ結果が残せたということで数学科4年間の生活を締めくくる研究としては、非常に充実感を味わえた。

最後に、至らない学生ながらも色々お手助けして下さった桂田祐史教授に敬意と共に感謝いたします。

2010年度 石川雅基

第5章 Rubyを使用する

この研究ではRubyというプログラミングソフトを使用する。
Rubyを使用した理由は以下の通りである。

- まず、私は「とんでる力学」著：牧野 淳一郎氏の本を読み、今回の研究をスタートしたが、その本の中のプログラムはRubyで書かれていた。
 - ・本の記述のみでは書かれている内容を理解できないためにプログラムを読み解く必要があった。
- 桂田先生の助けもあり、牧野氏が作ったプログラムを走らせ、理解に努めることにした。
- 牧野氏の作った2次元でのモデル¹を土台（プログラムの基盤）とし、3次元でのシミュレーションを試みた。

¹<http://www.artcompsci.org/~makino/rikigaku/>

第6章 プログラムの紹介

関連図書

- [1] 牧野淳一郎『とんでる力学』パリティ編集委員会 編（丸善株式会社,2005）
- [2] 姫野龍太郎『魔球をつくる 究極の変化球を求めて』（岩波書店）
- [3] 今井功『流体力学入門書』（物理学選書）