流体力学ノート

桂田 祐史

2007 年 10 月 15 日〜2022 年 5 月 9 日

目 次

TODO

- ベルヌーイの法則

この文書を書き始めたのは古く。その後、これとは別に授業やゼミ等で必要になって作成した資料も多い。適当にマージすれば良いと思うのだが…

応用複素関数という授業のために用意した「複素関数と流体力学」[3] や、オンライン資料 (http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/applied-complex-function-2021/)
応用数値解析特論という授業のために準備したオンライン資料 http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana2021/ もある。
Green の公式については、http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/ana/ANA09_1122_handout.pdf が最新版である。

第1章　基礎方程式

1.1　記号

以下では $\mathbf{R}^n$ の領域 (連結開集合) Ω に満たされた流体の運動を考える。
流体の速度 (ベクトル) を $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,t)$, (質量) 密度を $\rho=\rho(x,t)$ とする ($x\in\overline{\Omega}$, $t\ge 0$)。

1.2　渦度

3 次元の場合、速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に rot を施したベクトル場 $\boldsymbol{\omega}$ を**渦度 (vorticity)** と呼ぶ:

$$\boldsymbol{\omega}:=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}. \tag{2.1}$$

実質的に 2 次元流である場合、すなわち $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)=(u(x,y,t),v(x,y,t),0)^T$ となっている場合

$$\boldsymbol{\omega}=\left(0,0,\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^T$$

となり、渦度は実質的に 1 成分しか持たない。そこで 2 次元流 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,y,t)=(u(x,y,t),v(x,y,t))$ の場合、渦度は

$$\omega:=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

で与えられるスカラーであるとみなすことにする[1]。

1.3　連続の方程式

湧き出し (source) も吸い込み (sink) もなければ、質量保存が成り立つので、任意の領域 V (ただし $\overline{V}\subset\Omega$) 内の流体の質量の変化は、$V$ の境界 S から出入りする質量に等しい[2]:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dx=-\int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

積分記号下の微分と、Gauss の発散定理から

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\,dx=-\int_V \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\,dx.$$

V の任意性から

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{3.1}$$

[1]そもそも、2 次元ベクトル解析では、$\operatorname{rot}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=v_x-u_y$ と定義することも多い。それを使えば $\omega:=\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$.

[2]某ゼミで、学生がちゃんと説明できないのに立ち会った。雨が降って池に水が流れ込んだら、流れ込んだ分だけ水かさが増える、という簡単なことなのだが…

これを**連続の方程式** (the (mass) continuity equation) と呼ぶ。要するに質量が保存されるということを表している。これは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\,\rho + \rho\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

と書き直すこともできる。後述の物質微分 $D/Dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$ を用いると

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.2}$$

とも書ける。

1.4 応力テンソル

(今井先生の本 [4] をちゃんと読め。)

流体の満たされた領域上の各点 $\boldsymbol{a}$ において、微小な曲面 $x_i = a_i$ を通して、正の側 (x_i 座標の大きい側) が負の側におよぼす単位面積あたりの力を

$$(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})^T$$

とする。これをまとめた $P = (p_{ij})$ を**応力テンソル** (**stress tensor**) と呼ぶ。角運動量保存則より、P は対称テンソル ($p_{ij} = p_{ji}$) であることが分かる (と本には書いてあるけれど、どういうことか?)。

単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である面について、単位面積当たりの力は $P\boldsymbol{n}$ である。

多くの等方的な流体では

$$P = -pI + 2\mu E \tag{4.1}$$

の形となる。ここで p は圧力、I は単位テンソルである。また μ は流体の**粘性率**と呼ばれる定数で、E は**歪み速度テンソル** (変形速度テンソル, **rate of strain tensor**, **strain rate tensor**) である:

$$E := (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

これは $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ のヤコビ行列の対称部分である。

とある解説で、

$$P = -pI + \lambda\ \operatorname{div} u\, I + 2\mu E$$

としてあるものがあった (λ があるのが、上の仮定より一般的)。非圧縮条件を仮定すると、結局は同じことになる。

$\mu = 0$ の場合、$P = -pI$ であるから、単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である面について、単位面積当たりの力は $-p\boldsymbol{n}$ である。方向は面に垂直で、大きさは方向によらず一定である。

1.5 物質微分

Euler の方法 (x, y, z, t を独立変数に取って考える) と、Lagrange の方法 (Lagrange 的記述) がある。

Lagrange の方法は、流体粒子と一緒に動いて観測する。Euler の方法は、空間に固定された座標で観測する。

Lagrange の方法においては、x, y, z は従属変数である:

$$x = f_1(a, b, c, t), \quad y = f_2(a, b, c, t), \quad z = f_3(a, b, c, t).$$

(a, b, c) は**物質座標** (**material coordinate**) である。
物質微分 (**material differentiation**) または **Lagrange 微分**という。
Lagrange 微分の Euler 流儀の表現は、

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{5.1}$$

Euler 流儀でも、Lagrange 流儀でも、独立変数として t が生じるが、偏微分を考える際に、「他の変数は止めておいて」というところが、食い違う。Lagrange 流儀では「a, b, c をとめておいて」、Euler 流儀では「x, y, z をとめておいて」となるわけである。

1.6 運動量の保存

ある瞬間に微小部分 $dx\,dy\,dz$ を占める流体質量は、$\rho\,dx\,dy\,dz$ である。流体の速度 $\boldsymbol{v}$ の物質微分 $\dfrac{D\boldsymbol{v}}{dt}$ が加速度である。両者をかけたものが、その微小部分に働く力に等しい。領域 Ω を占める流体で、そのトータルは $\displaystyle\int_\Omega \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{Dt}\,dx\,dy\,dz$ となるが、これが D の境界からうける応力のトータルに等しいとして、次の等式が得られる。

$$\iiint_\Omega \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} P \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

右辺を Gauss の定理を用いて三重積分に直した後 (詳しくは 1.14.1)、領域 D の任意性を用いると

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} - \operatorname{div} P = 0. \tag{6.1}$$

ただし $\operatorname{div} P$ の定義については、1.14.1 を見よ。

1.7 境界条件

領域の境界の外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。

1.7.1 準備: 応力テンソルの復習

$\sigma(\mu, \boldsymbol{v}, p)$ を応力テンソルとする:

$$\sigma(\mu, \boldsymbol{v}, p) = -pI + 2\mu D(\boldsymbol{v}).$$

$D(\boldsymbol{v})$ は変形速度テンソル (歪み速度テンソル) である:

$$D(\boldsymbol{v}) = (D_{ij}(\boldsymbol{v})), \quad D_{ij}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

σ の成分は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

1.7.2　粘着境界条件

Navier-Stokes 方程式向け。
壁面 (固体表面) では流速は 0 になる:

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \Gamma).$$

1.7.3　自然境界条件

応力境界条件と呼ぶのが正しい？
Navier-Stokes 方程式向け。

$$\sigma(\mu, \boldsymbol{v}, p)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{P} \quad (\text{on } \Gamma).$$

1.7.4　滑り境界条件

流体の速度 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{n}$ と直交し、応力ベクトル $\sigma(\mu, \boldsymbol{v}, p)\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{n}$ と同じ方向である、という条件を**滑り境界条件**と呼ぶ。

(7.1)
$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \sigma(\mu, \boldsymbol{v}, p)\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = 0 \quad (\text{on } \Gamma).$$

この条件を

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad 2D(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = 0 \quad (\text{on } \Gamma)$$

と書いた人がいた。なるほど p の部分はすぐ消えるので、そうかもしれない。
弱形式では $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ だけやればよい？

1.8　状態方程式

1.8.1　熱力学の常識と状態方程式

熱力学的な量として、圧力、密度、温度、内部エネルギー、エントロピーなど色々なものがあるが、一様に単一の相をなしているときは、独立な量の個数は 2 である。
状態変数 (state variable) の間の関係式を**状態方程式** (an equation of state) と呼ぶ。

1.8.2　Boyle-Charles の法則

低い圧力、ほどほどの (あまり冷たくない) 温度の気体については、まあまあ良く合致する。
今井 [4] では、次のように説明されている。
理想気体 (ideal gas) では、Boyle-Charles の法則

(8.1)
$$\rho = \frac{R}{m}\rho T$$

が成り立つ。ここで ρ は密度、m は分子量、T は**絶対温度** (absolute temparature)、R は気体定数 (gas constant) と呼ばれる定数である:

(8.2)
$$R = 8.314^t unes 10^7 \text{erg/K} = 1.987 \text{cal/K}.$$

(cgs 系である。)

現実の気体に対しても、低い圧力、ほどほどの (あまり冷たくない) 温度の気体については、まあまあ良く合致する。

理想気体がどれくらいあるかという量を物質量 (モル数) で表わす場合は、高校の化学でおなじみの

$$pV = nRT \tag{8.3}$$

が成り立つ。p が圧力 (単位 Pa), V が体積 (単位 L), n が物質量 (単位 mol), T が絶対温度 (単位 K) の場合は

$$R = 8.314 \times 10^3 \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{LK}^{-1}\mathrm{mol}^{-1}. \tag{8.4}$$

1.8.3　等温変化

等温変化する場合は

$$p \propto \rho \tag{8.5}$$

が成り立つ。

1.8.4　断熱変化 (等エントロピー的変化)

理想気体で ρ とエントロピー S を独立変数に選ぶと

$$p = k\rho^\gamma \exp\frac{S - S_0}{c_v}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \tag{8.6}$$

c_p, c_v は定圧比熱、定積比熱である。気体運動論によると、比熱の比は構成分子の自由度 f により

$$\gamma = \frac{f+2}{f}$$

で与えられる。ゆえに一原子分子では $\gamma = \frac{5}{3}$, 二原子分子 $\gamma = \frac{7}{5}$, 三原子分子では $\gamma = \frac{4}{3}$.
S は定数とすると

$$p \propto \rho^\gamma. \tag{8.7}$$

1.8.5　バロトロピー流

より一般に

$$\rho = f(p) \tag{8.8}$$

のような関数関係が成り立つ場合、流れはバロトロピー流 (barotropic flow) であるという。

1.9 非圧縮性条件

連続の方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0$$

から

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

この同値な条件のいずれか一方 (従って両方) が成り立つとき、その流れは**非圧縮** (incompressible) であると呼ぶ。

今井先生によると、流体が縮まないとは、

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

すなわち

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\rho = 0$$

ということらしい。

通常は

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.1}$$

を**非圧縮性条件**と呼ぶことが多い (ようだ)。

1.10 完全流体の方程式

今井 [4] の第 2 章「完全流体」は内容豊富である。そこからいくつかピックアップする必要を感じている。

1.10.1 定義, Lagrange の渦定理

粘性を無視した (できる?) 理想化された流体を**完全流体** (**perfect fluid**) と呼ぶ。非粘性流体 (inviscid fluid) と呼ばれることもある。これに対して粘性を無視できない流体は**粘性流体** (**viscous fluid**) と呼ばれる。

以下は、今井 [4] からの受け売り。ここに書くのはややフライング気味だが、書くべきであろう。

「粘性のないバロトロピー流体が保存力のもとに運動するとき、渦は発生することも消滅することもない。」という Lagrange の渦定理が成り立つ。

実在の流体は必ず粘性を持つが、Reynolds 数の大きい場合は完全流体という近似 (“理想化”) が許される。

物体表面の薄い境界層では、粘性の効果が現れ渦が発生するが、それ以外の場所では渦の発生は見られない。また境界層から渦がはがれて、渦が “主流” の中に押し出されて行くことがあるが、その場合その渦はなかなか消えない。

1.10.2 圧力

(準備中)

1.10.3 Euler の運動方程式

完全流体中に滑らかな境界 S を持つ閉領域 V を取る。V にかかる圧力の総和は (Gauss の発散定理より)

$$F_1 = -\int_S p\boldsymbol{n}\,d\sigma = -\int_V \operatorname{grad} p\,dx.$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は S 上の外向き単位法線ベクトルで、$d\sigma$ は S の面積要素である。

外力がない場合を考えると、上の力と V に働く慣性力

$$F_2 = -\int_V \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,dx$$

の和が 0 でなければならない:

$$F_1 + F_2 = -\int_V \left(\operatorname{grad} p + \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right) dx = 0.$$

これが任意の V について成り立つことから、

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{10.1}$$

であるから、

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{10.2}$$

これを **Euler の運動方程式**と呼ぶ。

1.10.4 完全流体に対する境界条件、初期条件

固体表面が境界となっているような場合、境界条件は

$$v_n = u_n \quad (x \in \partial\Omega,\, t \geq 0). \tag{10.3}$$

ただし

$$v_n = \boldsymbol{v}\cdot n, \quad u_n = \boldsymbol{u}\cdot n, \quad \boldsymbol{u} = \text{境界面の速度}.$$

ゆえに静止境界ならば

$$v_n(x,t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega,\, t \geq 0).$$

一方初期条件は、初期速度 $\boldsymbol{v}_0$ を用いて

$$\boldsymbol{v}(x,0) = \boldsymbol{v}_0(x) \quad (x \in \Omega) \tag{10.4}$$

の形で与えられる。

圧力に対する初期条件、境界条件はない。

1.11 縮まない完全流体

1.11.1 縮まない完全流体の運動方程式

非圧縮性条件が成り立っているとき、Euler の運動方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \boldsymbol{F} \tag{11.1}$$

となる。ここで $\boldsymbol{F}$ は単位質量あたりの外力を表わす。

もしも $\boldsymbol{F}$ が保存力である、すなわちポテンシャル V を持つ (i.e., $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} V$) ならば、

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + V\right)$$

と書ける。

ベクトル解析の公式

$$\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2\right) - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

を用いると、運動方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 + \frac{p}{\rho} + V\right) + \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}.$$

1.11.2 縮まない完全流体の渦無しの流れ

流体が**渦無し**、すなわち流体の占める領域の至るところで

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0$$

が成り立つならば、(よく知られているように) 少なくとも局所的には (領域内の各点の単連結近傍では)、$\boldsymbol{v}$ はポテンシャル $\phi = \phi(x,t)$ を持つ:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi.$$

速度場が渦無しならば、局所的にはポテンシャルを持つ

ここでは Ω 全体におけるポテンシャル ϕ が存在すると仮定する (例えば、流体の占める領域が単連結であればそうなる)。

この ϕ を**速度ポテンシャル**と呼ぶ。すると非圧縮性条件は

$$\triangle\phi = 0,$$

境界条件は

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = u_n \quad (\text{境界上})$$

となる。

すなわち Laplace 方程式の Neumann 境界値問題が得られる。運動方程式は ϕ を用いて

$$\operatorname{grad}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\operatorname{grad}\phi\|^2 + \frac{p}{\rho} + V\right] = 0$$

となるので、p は次のように求まる。

$$p = -\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\operatorname{grad}\phi\|^2 + V + g(t)\right].$$

ここで $g = g(t)$ は任意関数である。

1.11.3　2次元の縮まない完全流体

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とすると、非圧縮性の条件 (9.1) は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

となる。これから

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \tag{11.2}$$

を満たす ψ が領域の各点の単連結近傍で存在する。この ψ を**流れ関数** (**stream function**) と呼ぶ。

速度場が非圧縮ならば、局所的には流れ関数を持つ

大域的な流れ関数の存在条件

領域 Ω 自身が単連結ならば、ψ は Ω 全体で定義される。また Ω が単連結でなくても、Ω 全体で 1 価関数として定義できる場合がある。実際、1 価関数となるための必要十分条件は、領域内の任意の閉曲線 C に対して

$$\int_C u\,dy - v\,dx = \int_C \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = 0$$

となることである。

複素速度ポテンシャル (渦無しの場合)

流体が渦無しで速度ポテンシャル ϕ を持つ場合、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

が成り立つ。すなわち流れ関数 ψ は速度ポテンシャル ϕ の共役調和函数である。

$$f\left(x + \sqrt{-1}y\right) := \phi(x,y) + \sqrt{-1}\,\psi(x,y)$$

で定義される正則関数 f を**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

Euler 方程式の流れ関数による表現

Euler の運動方程式を ψ で表わそう。

$$\frac{\partial}{\partial t} \triangle \psi - J(\psi, \triangle \psi) = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{11.3}$$

ただし $J = J(\cdot,\cdot)$ はいわゆるヤコビアンであり、$\triangle$ はラプラシアンである:

$$J(f,g) := \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \triangle := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が、(11.2) で与えられるとき、$\boldsymbol{v}$ は自動的に非圧縮性条件 (9.1) を満たすので、(11.3) は Euler 方程式の書き直しと言っても良い。

流れ関数と境界条件

境界条件 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ は、ψ で書くと

$$\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{s}}=0 \quad (\boldsymbol{s}\text{ は接線方向})$$

となるので、流れ関数 ψ は境界をなす各閉曲線の上で定数である。

流れ関数と渦度

流れ関数 ψ について、

$$-\triangle\psi=-(\psi_{xx}+\psi_{yy})=-(-v_x+u_y)=v_x-u_y$$

であるが、この右辺は渦度と呼ばれ、ω で表されるものであった。ゆえに流れ関数は Poisson 方程式

$$-\triangle\psi=\omega. \tag{11.4}$$

を満たす。

もしも ψ の境界上での値 (定数) が分かれば、ω から ψ を決定できる。

1.12 縮む完全流体

非粘性ではあるが、気体のように圧力変化に応じて密度変化を生ずる場合を考える。

この節の記述は藤田・池部・犬井・高見 [5] による (結構色々なことが書いてある)。

1.12.1 状態方程式

Euler の運動方程式、連続の方程式、境界における速度の法線成分を与える境界条件が基礎となる。

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p \quad (\text{in }\Omega\times[0,\infty)),$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0 \quad (\text{in }\Omega\times[0,\infty)),$$

$$v_n=u_n \quad (\text{in }\partial\Omega\times[0,\infty))$$

縮まない完全流体の方程式と比べて、未知数が一つ (ρ) 増えたので、それを補うような条件が必要だが、密度 ρ と圧力 p の間に成り立つ**状態方程式**と呼ばれる関数関係

$$p=f(\rho)$$

を用いる。例えば、等温変化では $\rho\propto p$, 断熱変化では $\rho\propto p^{1/\gamma}$ (ここで γ は 1 より大きい定数) である。

1.12.2 定常渦無し運動

定常なポテンシャル流を考える。すなわち

$$\boldsymbol{v}=\nabla\Phi$$

を満たす Φ が存在する場合を考察する。

(工事中)

1.13 波動方程式

流体の微小振動

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t} = \triangle u, \quad c = \sqrt{f'(\rho_0)} = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0}}$$

(工事中)

1.14 非圧縮粘性流体の方程式

密度が定数で (従って非圧縮性条件 (9.1) が成り立つ)、粘性を持つ流体を考える。

1.14.1 Navier-Stokes の運動方程式

応力テンソル $P = (p_{ij})$ を用いると、運動量保存則から運動量の保存は、

$$\int_\Omega \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

ところで $\boldsymbol{P}$ の第 i 行を $\boldsymbol{p}_i$ と書くと、

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^T\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{p}_2^T\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{p}_3^T\cdot\boldsymbol{n} \end{pmatrix}.$$

ゆえに Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}\,d\sigma = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}_1^T\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}_2^T\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}_3^T\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{p}_1^T\,dx \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{p}_2^T\,dx \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{p}_3^T\,dx \end{pmatrix}.$$

そこで

$$\operatorname{div}\boldsymbol{P} := \begin{pmatrix} \operatorname{div}\boldsymbol{p}_1^T \\ \operatorname{div}\boldsymbol{p}_2^T \\ \operatorname{div}\boldsymbol{p}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

とおくと、次のようにコンパクトに書ける:

$$\int_\Omega \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} dx = \int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{P}\,dx.$$

これから

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \operatorname{div}\boldsymbol{P}.$$

言い換えると

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{P}. \tag{14.1}$$

角運動量保存則より、$\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ は対称テンソルである、すなわち

$$p_{ij} = p_{ji}.$$

既に説明した仮定 (4.1) をもう一度提示する。

$$\boldsymbol{P} = -pI + 2\mu E. \tag{14.2}$$

ここで、p は圧力、I は単位テンソル、μ は**粘性率** (**粘性係数**, **coefficient of viscosity**) (ここでは定数と考える)、$E = (e_{ij})$ は**ひずみ速度テンソル**で、

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

これはしばしば

$$E = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right)$$

と書かれる。$\nabla \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ ということらしい。

(14.1) の右辺の第 i 成分は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + 2\mu\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\mu}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\left(\triangle u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right).
\end{aligned}$$

ゆえに (14.1) は、次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho}\left(\triangle \boldsymbol{v} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right). \tag{14.3}$$

非圧縮性条件が成り立つときは、

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\triangle \boldsymbol{v}. \tag{14.4}$$

ただし ν は、

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \tag{14.5}$$

で定義され、**運動粘性率** (**kinematic viscosity**) と呼ばれる。(14.4) を **Navier-Stokes 方程式** (**Navier-Stokes equation**) と呼ぶ。

1.14.2 粘着条件

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \quad (\text{境界上}). \tag{14.6}$$

特に静止境界であれば $\boldsymbol{u} \equiv 0$ であるから、

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{境界上}). \tag{14.7}$$

非粘性流 (Euler 方程式) の場合は、速度の法線成分のみを指定する条件であったが、粘性流の場合は速度そのものを指定する条件になっていることに注意。

1.14.3 無次元化, Reynolds 数

無次元化された Navier-Stokes 方程式は

(14.8)
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{R} \triangle \boldsymbol{v}.$$

ただし R は、代表的な速度 U と代表的な長さ L を用いて

(14.9)
$$R := \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

で定義される無次元数 (dimensionless number) で、**Reynolds 数** (the Reynolds number) と呼ばれる。

無次元化方程式の導出

代表的な長さ L, 代表的な速さ U を取って

(14.10)
$$x' := \frac{x}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad u' := \frac{u}{U}$$

とおくと、x' と t' は無次元の独立変数であり、u' は無次元の従属変数である。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'}.$$

∇', $\triangle'$ を x' に関する微分作用素とすると

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2'} \\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3'} \end{pmatrix} = \frac{1}{L}\nabla', \quad \triangle = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2} \triangle'.$$

以上を Navier-Stokes 方程式に代入して

$$\rho\left[\frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'}Uu' + \left(Uu' \cdot \frac{1}{L}\nabla'\right)Uu'\right] = -\frac{1}{L}\nabla' p + \mu\frac{1}{L^2} \triangle' Uu'.$$

左辺、右辺それぞれ整理して

$$\frac{\rho U^2}{L}\left[\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla')\, u'\right] = -\frac{1}{L}\nabla' p + \frac{\mu U}{L^2}.$$

両辺を $\rho U^2/L$ で割ると

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla')u' = -\frac{1}{\rho U^2}\nabla' p + \frac{\mu}{\rho U L} \triangle' u'.$$

そこで

(14.11)
$$p' := \frac{1}{\rho U^2}p, \quad R_{\mathrm{e}} := \frac{\rho U L}{\mu}$$

とおくと、どちらも無次元の量で

(14.12)
$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla')u' = -\nabla' p' + \frac{1}{R_{\mathrm{e}}} \triangle' u'.$$

R_{e} を **Reynolds 数**と呼ぶ。

1.15 流線、粒子の軌道、流脈線

岡本さん曰く「定常解を可視化するために最も適当な方法は流線を描くことである」。

定義 1.15.1 (流線) 時刻 t における流れの**流線** (stream line) とは、流れの領域のなかの曲線で、その各点における接線ベクトルと、その点における流れの速度ベクトルの方向が一致するものをいう[a]。式で表わすと、曲線 $s \mapsto \boldsymbol{x}(s)$ で、

$$\boldsymbol{x}'(s) \parallel \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(s), t)$$

を満たすものが流線である。

[a]ベクトルが一致する必要はない。

流線は時刻 t を指定して確定する概念であることに注意。
時刻 t における速度ベクトル場 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ の積分曲線というわけだ。

定理 1.15.2 (流れ関数の等高線は流線) 2 次元定常流の場合、流れ関数の任意の等高線は流線である。

定義 1.15.3 (粒子の軌道) 曲線 $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ で、

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

を満たすものを**粒子の軌道**と呼ぶ。

流線と粒子の軌道は異なる概念であるが、定常流 (速度場 $\boldsymbol{v}$ が時刻に依存しない流れ) の場合は、流線と粒子の軌道は一致する。

定義 1.15.4 (流脈線) ある範囲の時間 $t \in [0, T]$ にわたって、領域内のある固定された点から粒子が連続的に排出されたときに、時刻 $t = T$ で粒子達の描く曲線を**流脈線**と呼ぶ。時刻 $t = s$ で点 $\boldsymbol{z}$ を出発する粒子の軌道を $t \mapsto \boldsymbol{x}(t; s, \boldsymbol{z})$ と表わすと、

$$[0, T] \ni s \mapsto \boldsymbol{x}(T; s, \boldsymbol{z})$$

が流脈線である。

流れの実験で、染料を使った流れの可視化で見える曲線は流脈線である。流脈線は流線でも粒子の軌道でもない。

第2章　Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\triangle\boldsymbol{v}. \tag{0.1}$$

ただし

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

2.1　適切性

2.1.1　定常解

この項は岡本 [6] による。

命題 2.1.1 (アプリオリ評価)

$$\nu\|\nabla\boldsymbol{v}\| \le c_0\|\boldsymbol{F}\|$$

定理 2.1.2 (定常解の一意性) $\nu^{-1}\|\boldsymbol{F}\|$ がある程度以上小さければ、定常解はただ一つしかない。

- 外力の大きさに比べて粘性係数が大きければ定常解は一つだけである。
- 特に境界条件が $\boldsymbol{v}=0$ で、外力がなければ、粘性係数が何であっても定常解は自明な (恒等的に 0 の) ものしかない。
- 粘性係数が小さい場合には、定常解は複数個存在しうる。
- 粘性係数が 0 の場合 (Euler 方程式であって、もはや Navier-Stokes 方程式ではない)、無限に多くの定常解が存在する。

定理 2.1.3 (定常解の存在) $\boldsymbol{g}\equiv 0$ で、$\boldsymbol{F}\in L^2$ と仮定し、$\partial\Omega$ は区分的に滑らかとする。このとき Navier-Stokes 方程式の定常解は (粘性係数が何であっても) 少なくとも一つ存在する。

岡本 [6] に曰く、「この定理は、粘性がいかに小さくても存在を保証しているところが重要なポイントである。粘性が小さいとき、Navier-Stokes の解は一般に乱流状態を示し、定常解は実現しない。しかし、これは定常解が不安定であるだけであって、不安定解でも存在していることは力学的に重要である。」

境界データ $\boldsymbol{g}$ が恒等的に 0 でなくても定常解は存在し得るが、まったく任意の $\boldsymbol{g}$ に対して解が存在するわけではない (Temam [7] を見よ)。

2.2 定常解の安定性

2.3 Hagen-Poiseuille 流 (ハーゲン・ポアズィユ流)

(管内流、ポアズィユ流とも言う。)

空間内の円柱領域

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; y^2+z^2 < a^2\}$$

における定常 Navier-Stokes 方程式

$$\rho\,(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} p + \mu \triangle\, \boldsymbol{v} \quad (\text{in } \Omega), \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{3.3}$$

を考える。無限遠での境界条件の指定はしていないので、このままでは解が一意には定まらない。

一方向の流れ、つまり速度場 $\boldsymbol{v} = (u,v,w)$ が

$$v = w = 0, \quad \text{i.e.} \quad \boldsymbol{v} = (u,0,0) \tag{3.4}$$

となっている場合を考える。

非圧縮条件 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ は、

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

となるので、$u = u(y,z)$ となる。

結局 Navier-Stokes 方程式中の非線型項 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = 0$ となる。実際 ($v = w = 0$, $\partial u/\partial x = 0$ であるので)

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

従って

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu \triangle\, \boldsymbol{v}.$$

成分表示すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \triangle\, u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$0 = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

後の二つの式から $p = p(x)$. 最初の式を移項した

$$-\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

において、左辺は x に依らず、右辺は y, z に依らないので、結局は定数である。それを α とおくと、

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=-\alpha,$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\alpha.$$

後者を積分して

$$p(x)=p(0)-\rho\alpha x.$$

$p_0:=p(0)$ とおくと、

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=-\alpha,$$
$$p(x)=p_0-\rho\alpha x.$$

流れが軸対称であることを仮定する。yz 平面に極座標

$$y=r\cos\varphi,\quad z=r\sin\varphi$$

を導入すると、軸対称性により $u=u(r)$ であるから、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right).$$

ゆえに

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{\alpha}{\nu}.$$

これから、

$$u(r)=-\frac{\alpha}{4\nu}r^2+A\log r+B.$$

ここで A, B は積分定数である。$r=0$ において u は有限でなければならないから $A=0$. また円柱の壁面 $r=a$ において、流速は 0 でなければならないから

$$0=u(a)=-\frac{\alpha}{4\nu}a^2+B.$$

ゆえに $B=\dfrac{\alpha}{4\nu}a^2$. これから

$$u(r)=\frac{\alpha}{4\nu}\left(a^2-r^2\right).$$

流量は

$$Q=2\pi\int_0^a ru(r)\,dr=\frac{\alpha}{8\nu}\pi a^4.$$

平均流速はこれを πa^2 で割った

$$U_{\text{mean}}=\frac{\alpha}{8\nu}a^2.$$

Navier-Stokes 方程式で、非線型項 $=0$ とおいて得られる Stokes 方程式の厳密解でもある。

2 次元版として、平行版の間の領域 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;-a<y<a\}$ における流れ、

$$u(x,y)=\frac{\alpha}{2\nu}(a^2-y^2),\quad p(x)=-\rho\alpha x+p_0$$

が得られる。

2.4 Couette 流

第3章　Stokes 方程式

3.1　Stokes 近似

Navier-Stokes 方程式の非線形項を無視 (落と) した方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu \triangle \boldsymbol{v} \tag{1.1}$$

を **Stokes 方程式** (**Stokes equation**) と呼ぶ。Reynolds 数が十分小さい (あらく言って速度が小さい) ような場合に Navier-Stokes 方程式をよく近似していると考えられる。

無次元化の方程式では、

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{R}\triangle \boldsymbol{v} \tag{1.2}$$

Stokes 方程式 (1.1) の両辺の div を取り、非圧縮性の条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ を用いると

$$\triangle p = 0.$$

つまり「Stokes 近似においては圧力は調和関数である」。

また Stokes 方程式 (1.1) の両辺の rot を取ると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \triangle \boldsymbol{\omega}. \tag{1.3}$$

3.2　球面を過ぎる流れ

球 $B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2 < a^2\}$ を過ぎる一様流を考える。つまり球の外部 $\Omega = \mathbf{R}^3 \setminus \overline{B}$ において、

$$\nu \triangle \boldsymbol{v} - \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

を満たし、球面 ∂B 上で $\boldsymbol{v} = 0$ となり、無限遠での境界条件

$$\lim_{(x,t,z)\to\infty} \boldsymbol{v}(x,y,z) = (c,0,0)^T$$

を満たすような $\boldsymbol{v}$, p を探す。$(1,0,0)$ を北極とする極座標

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\sin\theta\sin\phi$$

を用いると、この解は次のように表される。

$$\begin{aligned}
v_r &= c\left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}\right)\cos\theta, \\
v_\theta &= -c\left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right)\sin\theta, \\
p &= -\frac{3}{2}\nu c a \frac{\cos\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

(よくわからんぞ！)

3.3 Stokes の抵抗法則

3.4 Stokes のパラドックス

少し長くなるが、岡本 [6] から引用する。

> これはすなわち、円柱のまわりを流れるゆっくりした流れは Stokes 方程式では記述しえないという否定的な事実を表している。「線形方程式は解けるが非線形方程式は解けない」とよく言われるが、方程式の線形化が解の存在を否定することもあることは、流体力学にとどまらず、現象のモデル化では注意すべきであろう。以前にも述べたように、方程式を導いただけでは理論は終わらないのであって、その方程式が現象を記述しているということを別途証明しなくてはならないのである。もし、例えば Stokes のパラドックスのように逆の結果が示されたならば、その方程式の限界あるいは適用範囲を定めなくてはならない。大雑把に言って、Stokes 方程式は有界領域内の遅い流れの記述には優れている。しかし、円周の外側のような非有界領域では適用に注意する必要がある。

3.5 適切性

ラジゼンスカヤ [1] の第 2 章「線形化された定常問題」, 第 3 章「流体力学的ポテンシャル論」, 第 4 章「線形非定常問題」に Stokes 方程式についての数学的考察が載っている。

3.5.1 R^3 の有界流域における定常問題

$$\nu \triangle \boldsymbol{v} = \nabla p + \boldsymbol{F} \quad (\text{in } \Omega), \tag{5.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{5.3}$$

$\boldsymbol{g}$ は、$\operatorname{div} \boldsymbol{g} = 0$ を満たす $\boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$ の元に拡張できると仮定する。

$$C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega) := \{\boldsymbol{f} \in C_0^{\infty}(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0\}$$

に内積

$$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}] := \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{f} \cdot \nabla \boldsymbol{g}\, dx$$

を導入し、それから導かれるノルムについて完備化してえられる Hilbert 空間を $\boldsymbol{H}(\Omega)$ と表す。

定義 3.5.1 (内部定常 Stokes 問題の弱解) $\boldsymbol{v}$ が定常 Stokes 問題 (5.1), (5.2), (5.3) の弱解であるとは、次の (i), (ii) を満たすことである。

(i) $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{g} + \boldsymbol{H}(\Omega)$

(ii) $\forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ に対して

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}\, dx = -\int_{\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx.$$

定理 3.5.2 (弱解の一意性) 定常 Stokes 問題 (5.1), (5.2), (5.3) の弱解は一意的である。

定理 3.5.3 (弱解の存在) $\boldsymbol{\psi} \mapsto \int_\Omega \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx$ が $\boldsymbol{H}(\Omega)$ 上の有界線型形式を定義し、$\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$ かつ $\operatorname{div} \boldsymbol{g} = 0$ ならば、定常 Stokes 問題 (5.1), (5.2), (5.3) の弱解が存在する。

3.5.2 3 次元外部問題

$$\nu \triangle \boldsymbol{v} = \nabla p + \boldsymbol{F} \quad (\text{in } \Omega), \tag{5.4}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad (\text{on } \partial\Omega), \quad \boldsymbol{v}(x) \to \boldsymbol{0} \quad (\|x\| \to 0) \tag{5.6}$$

ここで境界条件が同次であることに注意。この場合は簡単である。

定理 3.5.4 (同次境界条件下の弱解の一意存在) $\boldsymbol{\psi} \mapsto \int_\Omega \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\psi} dx$ が $\boldsymbol{H}(\Omega)$ 上の有界線型形式を定義するならば、外部定常 Stokes 問題 (5.4), (5.5), (5.6) の弱解は一意的に存在する。すなわち

$$\exists! \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(\Omega) \quad \text{s.t.} \quad \forall \psi \in \boldsymbol{H}(\Omega) \quad \nu[\boldsymbol{v}, \psi] = -\int_\Omega \boldsymbol{F} \cdot \psi\, dx.$$

第4章　Ossen 方程式

4.1　Ossen 近似

$$\boldsymbol{v} = U\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{u}$$

$$\|\boldsymbol{u}\| \ll U$$

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = U\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \fallingdotseq U\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}$$

と置き換えて、

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + U\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{1.1}$$

第5章　Euler 方程式

ある程度まとまった数学的解説としては、岡本 [6] がある。

5.1　復習

非圧縮非粘性流体の支配方程式は既に述べたように Euler 方程式である:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \boldsymbol{F},$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

2 次元流で、流れ関数 ψ が存在する場合、これは

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle\psi - J(\psi, \triangle\psi) = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{1.1}$$

と書直される。ただし

$$J(f,g) := \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \triangle := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

5.2　保存則

5.2.1　運動エネルギーの保存

定理 5.2.1 (運動エネルギーの保存) (2 次元, 3 次元のいずれでも) Euler 方程式で、外力がなく ($\boldsymbol{F}\equiv 0$)、境界条件が $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ のとき、

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \|\boldsymbol{v}(x,t)\|^2 dx$$

は時間に依存しない。

証明　岡本 [6] を見よ。■

5.2.2　2 次元流におけるエンストロフィーの保存

2 次元流の場合、(1.1) は、

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

となる。これを 2 次元**渦度方程式**と呼ぶ。これから次の定理が得られる。

定理 5.2.2 (2 次元流におけるエンストロフィーの保存) 2 次元 Euler 方程式で、外力がなく ($\boldsymbol{F} \equiv 0$)、境界条件が $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ もしくは周期境界条件のとき、

$$\int_\Omega |\omega(x,t)|^2 dx$$

は時間に依存しない。

3 次元の場合、渦度は

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$$

を満たす (Euler の運動方程式に rot を施せば得られる)。

5.2.3 循環の保存

定義 5.2.3 (循環) 領域 Ω 内の閉曲線 C に対して、

$$\Gamma(t,C) := \oint_C \boldsymbol{v}(\xi,t) \cdot d\boldsymbol{\ell}_\xi$$

を時刻 t における C に関する**循環**と呼ぶ。

Stokes の定理によって、C を境界とするような曲面 S に対して、

$$\Gamma(t,C) = \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(x,t) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

が成り立つ。

定理 5.2.4 (Kelvin) Euler 方程式の支配する流れにおいて、外力が働いていないならば、流体とともに動く閉曲線 C に関する循環は時間に依存しない。

5.2.4 ヘリシティーの保存

ヘリシティー (**helicity**) とは、

$$\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dx = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} v_k \omega_k\, dx \tag{2.2}$$

で定義される量である。

定理 5.2.5 (ヘリシティー保存則, Moffatt (1969)) 領域 Ω が直方体で周期境界条件を満たせば

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, dx = 0.$$

$\Omega = \mathbf{R}^3$ で、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{\omega}$ が無限遠方で十分で速く減衰する場合にも同じことが成り立つ。

5.3 適切性

- 2 次元の場合、初期値・境界値が適当に与えられたら、解は $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ で存在して一意である。
- 3 次元の場合、初期値・境界値が適当に与えられたら、ある時刻 $T > 0$ が存在して、解は $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ で存在して一意である。
- 3 次元の場合、解が有限時間で爆発するかどうかは分かっていない。

5.4 Euler 方程式の厳密解の例 — 渦無しの流れ、せん断流、Arnold 流

5.4.1 渦無しの流れ

Ω で調和で、境界上で Neumann 境界条件を満たす C^2 級のスカラー値関数 U が存在すると仮定する。つまり

$$\triangle U = 0 \quad (\text{in } \Omega), \qquad \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{n}} = g \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

U は時刻 t に依存しても良い。

定理 5.4.1 () U は Ω で調和で、境界上で Neumann 境界条件を満たす C^2-級のスカラー値関数であるとするとき、

$$\boldsymbol{v} = \nabla U,$$

$$p = -\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial U}{\partial z}\right|^2\right) - \frac{\partial U}{\partial t} \tag{4.1}$$

とおくと、$(\boldsymbol{v}, p)$ は Euler 方程式の解になる。この解の渦度は 0 である。

この定理は Neumann 境界条件を満たす調和関数に対応して Euler 方程式の解が存在することを示している。この解を**渦無しの流れ**と呼ぶ。(4.1) を **Bernoulli の等式**と呼ぶ。

例 5.4.2 (球を過ぎる渦無しの流れ) Ω は原点を中心とする半径 a の球の外部とする:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; a^2 < x^2 + y^2 + z^2\}.$$

このとき U を

$$U(x,y,z) = cx\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

とおくと (c は定数)、U は

$$\triangle U = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$
$$\lim_{r\to\infty} \nabla U(x,y,z) = (c,0,0)^T,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

を満たす。■

例 5.4.3 (円柱を過ぎる渦無しの流れ) 領域は $\{(x,y,z); a^2 < x^2+y^2\}$ で、2 次元流を考える。$\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; a^2 < x^2+y^2\}$ として、c を定数として

$$U(x,y) = cx\left(1 + \frac{a^2}{x^2+y^2}\right)$$

とおく。

$$\triangle U = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad \lim_{r\to\infty} \nabla U(x,y) = (c,0)^T$$

流れ関数は

$$V(x,y) = cy\left(1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right).$$

$\partial\Omega$ で V が定数であることから、$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ がわかる。 ■

5.4.2 せん断流

$\phi = \phi(y,z)$ を任意の C^1-級の関数とするとき、

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \phi(y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定められるベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は Euler 方程式の定常解になる。圧力は p となる。

ϕ が定数でない限り、この流れを**せん断流**と呼ぶ。ϕ が定数の場合は一様流と呼ぶ。

5.4.3 Arnold 流

A, B, C を任意の実定数として、

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} A\sin z + C\cos y \\ B\sin x + A\cos z \\ C\sin y + B\cos x \end{pmatrix}$$

で定まる $\boldsymbol{v}$ が Euler 方程式の定常解になる。この例では

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v}$$

が成り立つ。

5.5 Euler 方程式の弱解

Ω が有界領域の場合。

$$X := \{\boldsymbol{\phi} \in C^1([0,T]\times\overline{\Omega}, \mathbf{R}^n);\ \operatorname{div}\boldsymbol{\phi} = 0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

定義 5.5.1 () $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ が Euler 方程式の弱解であるとは、

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_\Omega \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\|^2 d\boldsymbol{x} < \infty$$

で、すべての $\boldsymbol{\phi}\in X$ に対して、$[0,T]\ni t\mapsto(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{\phi})$ が連続関数で、

$$(\boldsymbol{v}(T),\boldsymbol{\phi}(T)) - (\boldsymbol{v}(0),\boldsymbol{\phi}(0)) - \int_0^T \left(\boldsymbol{v}(t),\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial t}\right)dt$$
$$-\int_0^T((\boldsymbol{v}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\phi}(t),\boldsymbol{v}(t))dt - \int_0^T(\boldsymbol{F}(t),\boldsymbol{\phi}(t))dt = 0$$

定義 5.5.2 (Euler 方程式の定常弱解) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ が定常 Euler 方程式の弱解であるとは、Ω 内の任意のコンパクト集合 K に対して、

$$\int_K \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\|^2 d\boldsymbol{x} < \infty$$

で、すべての $\boldsymbol{\phi}\in C_{0,\sigma}^\infty$ に対して、

$$\sum_{i,j=1}^3\int_\Omega v_i\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}v_j d\boldsymbol{x} + \sum_{k=1}^3\int_\Omega v_k f_k d\boldsymbol{x} = 0.$$

第6章　渦糸の力学系

(既に書いたものがある…それを持って来よう)

第7章　Stokes 方程式の弱形式

7.1　Green の公式, Gauss の発散定理

　菊地先生いうところの Green の公式は

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_j}dx = \int_\Gamma uvn_j\, d\sigma - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}v\, dx \quad (1 \le i \le N). \tag{1.1}$$

例えば $v \equiv 1$ とすると

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}dx = \int_\Gamma un_j d\sigma \tag{1.2}$$

が得られる[1]。逆に一般に (1.2) を仮定して、u の代りに uv を代入すると、 (1.1) が得られる。つまり、ある意味で (1.1) と (1.2) は同値である。

　ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_j)$ が与えられているとき、(1.2) の u として f_j を代入し、$j = 1, 2, \ldots, N$ について加えると

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{f}\; dx = \int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\; d\sigma. \tag{1.3}$$

これは **Gauss の発散定理**である。

　逆に (1.3) で $\boldsymbol{f}$ として、第 j 成分のみ u で、他は 0 というベクトル場を持って来ると、

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}dx = \int_\Gamma un_j\; d\sigma$$

が得られる。つまり (1.2) が得られた。

　要するに、出て来る関数を一般とすると、三つの式 (1.1), (1.2), (1.3) は同値である。

7.2　いわゆる Green の定理

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v dx = \int_\Gamma \nu_i uv\; d\sigma - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\; dx.$$

[1]森本先生はこれを Gauss の発散定理と呼んでいるような気がする。良く考えてみると、発散が出て来ないが。

定理 7.2.1 (Green の積分公式) Ω は Gauss の発散定理が成り立つような $\mathbf{R}^n$ の有界領域で、Γ はその境界とする。

(1) u, v が $\overline{\Omega}$ の近傍でそれぞれ C^2-級, C^1-級ならば

$$\int_\Omega v \triangle u\, dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma - \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx.$$

(2) u, v が $\overline{\Omega}$ の近傍で C^2-級ならば

$$\int_\Omega (v \triangle u - u \triangle v)\, dx = \int_\Gamma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma.$$

(3) u が $\overline{\Omega}$ の近傍で C^2-級ならば

$$\int_\Omega \triangle u\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma.$$

特に u が調和関数である場合は $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0.$

7.3 ベクトル値関数版 Green の公式、Gauss の定理

$$\int_\Omega \triangle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{v}\, d\sigma - \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\, dx.$$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx = \int_{\partial\Omega} p \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma - \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, dx.$$

7.4 関数空間

$$\mathbb{C}^\infty_{0,\sigma} := \{\}$$

7.5 弱形式の導出 (1)

これは森本 [8] にあるもの。

$\mathbf{R}^3$ の有界領域 Ω と $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ が与えられたとき、

$$-\nu \triangle \boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad (\text{in } \Omega) \quad \text{in } \Omega, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \partial\Omega \tag{5.3}$$

を満たす $\boldsymbol{v}$, p を求める。

$\boldsymbol{\varphi}\in\mathbb{C}^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ を (5.1) にかけて積分すると、

$$-\nu\int_\Omega \triangle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx+\int_\Omega \nabla p\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx=\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx.$$

これは成分で書くと

$$-\nu\sum_{i=1}^3\int_\Omega \triangle v_i\varphi_i\,dx+\sum_{i=1}^3\int_\Omega\frac{\partial p}{\partial x_i}\varphi_i\,dx=\sum_{i=1}^3\int_\Omega f_i\varphi_i\,dx.$$

左辺第 1 項は通常の Green の公式から

$$\int_\Omega\triangle v_i\varphi_i\,dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v_i}{\partial\boldsymbol{n}}\varphi_i\,dx-\int_\Omega\nabla v_i\cdot\nabla\varphi_i\,dx=-\int_\Omega\nabla v_i\cdot\nabla\varphi_i\,dx.$$

ここで $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$ (on $\partial\Omega$) を用いた。これから

$$\int_\Omega\triangle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx=-\int_\Omega\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,dx.$$

これは成分で書くと

$$\sum_{i=1}^3\int_\Omega\triangle v_i\varphi_i\,dx=-\sum_{i,j=1}^3\int_\Omega\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,dx.$$

さて、左辺第 2 項については、Gauss の発散定理から

$$\int_\Omega\frac{\partial p}{\partial x_i}\varphi_i\,dx=\int_{\partial\Omega}p\varphi_i n_i\,d\sigma-\int_\Omega p\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\,d\sigma=-\int_\Omega p\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\,d\sigma.$$

もちろん、ここで $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$ (on $\partial\Omega$) を用いた。これから

$$\int_\Omega\nabla p\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx=-\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\,d\sigma.$$

$V:=H^1_{0,\sigma}(\Omega)$

第 1 式に $\varphi\in C^\infty_{0,\sigma}$ をかけて積分して、Green の公式を使う。

$$-\nu\langle\boldsymbol{v},\nabla\varphi\rangle={}_{V'}\langle\boldsymbol{f},\varphi\rangle_V\quad(\varphi\in V).$$

逆にこれを満たす $\boldsymbol{v}\in V$ は....

命題 7.5.1 $T\in(H^1_0(\Omega))'=H^{-1}(\Omega)$ は

$$\langle T,u^*\rangle=0\quad(u^*\in V)$$

を満たすものとする。このとき次式を満たす $p\in L^2(\Omega)$ が unique に存在する。

$$\int_\Omega p(x)\,dx=0,\quad\langle T,u^*\rangle=\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,v^*\,dx\quad(u^*\in H^1_0(\Omega)).$$

7.6 弱形式の導出 (2)

これは福嶋君の修論に書いてある（？）もの。完備化する作業が必要だ。

$$-\nu\langle u^*, u\rangle + \frac{1}{\rho}\ _x[u^*, p] + (u^*, f) = 0, \tag{6.1}$$

$$-\nu\langle v^*, v\rangle + \frac{1}{\rho}\ _y[v^*, p] + (v^*, g) = 0, \tag{6.2}$$

$$-_x[u, p^*] - _y[v, p^*] = 0 \tag{6.3}$$

$$\begin{gathered}
X_{\boldsymbol{b}} := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega); \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \quad \text{on } \partial\Omega\}, \\
X := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega); \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \partial\Omega\} = \boldsymbol{H}^1_0(\Omega), \\
Y := L^2(\Omega), \\
Y_0 := \{q \in L^2(\Omega); (q, 1)_{L^2} = 0\}.
\end{gathered}$$

$$\nu \triangle \boldsymbol{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega, \tag{6.4}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{6.6}$$

$\boldsymbol{u}^* \in X$ と (6.4) の内積を取って、積分すると、

$$\nu\int_\Omega \triangle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}^* dx - \frac{1}{\rho}\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{u}^* dx + \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}^* dx = 0.$$

$$\nu\left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}^* d\sigma - \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^* dx\right) - \frac{1}{\rho}\left(\int_{\partial\Omega} p\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{n} d\sigma - \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{u}^* dx\right) + \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}^* dx = 0.$$

$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{0}$ on $\partial\Omega$ であるから、

$$-\nu\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^* dx + \frac{1}{\rho}\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{u}^* dx + \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}^* dx = 0.$$

$$-\nu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^*\rangle + \frac{1}{\rho}(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u}^*)_{L^2} + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^*)_{\mathbb{L}^2} = 0.$$

弱形式

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in X_{\boldsymbol{b}} \times Y$ s.t.

$$-\nu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^*\rangle + \frac{1}{\rho}(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u}^*)_{L^2} + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^*)_{\mathbb{L}^2} = 0 \quad (\boldsymbol{u}^* \in X),$$

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{u}, p^*)_{L^2} = 0 \quad (p^* \in L^2(Y)).$$

7.7 弱形式の導出 (3)

田端 [9] に書いてあるもの (記号は少し変えてある)。

$$-\triangle \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega, \tag{7.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g_0} \quad \text{on } \Gamma_0, \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} - p\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g_1} \quad \text{on } \Gamma_1. \tag{7.4}$$

$$-\nabla\sigma(\boldsymbol{u},p)=\boldsymbol{f}\quad\text{in }\Omega, \tag{7.5}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\quad\text{in }\Omega, \tag{7.6}$$
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g_0}\quad\text{on }\Gamma_0, \tag{7.7}$$
$$\sigma(\boldsymbol{u},p)=\boldsymbol{g_1}\quad\text{on }\Gamma_1. \tag{7.8}$$

ところで σ の説明なのだけれど、引用すると、

田端 [?] (どれだろう？)

ただし σ は応力テンソル

$$\sigma(\boldsymbol{u},p):=-pI+2D(\boldsymbol{u})$$

である。ここで D は歪テンソル

$$D(\boldsymbol{u}):=\frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u}^T+\left(\nabla\boldsymbol{u}^T\right)^T\right),\quad(\nabla\sigma)_i=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

7.8 要素内の多項式の基底関数

1 つの三角形要素に 6 つの節点。三角形の頂点を P_0, P_1, P_2 とする。(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) とする。

L_i は

$$L_i(x,y)\in\mathbf{R}[x,y],\quad\deg L_i(x,y)=1,\qquad L_i(P_j)=\delta_{ij}\quad(j=0,1,2)$$

で特徴づけられる。

実は

$$\begin{aligned}
L_0(x,y)&=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{D}+\frac{y_1-y_2}{D}x+\frac{x_2-x_1}{D}y,\\
L_1(x,y)&=\frac{x_2y_0-x_0y_2}{D}+\frac{y_2-y_0}{D}x+\frac{x_0-x_2}{D}y,\\
L_2(x,y)&=\frac{x_0y_1-x_1y_0}{D}+\frac{y_0-y_1}{D}x+\frac{x_1-x_0}{D}y.
\end{aligned}$$

ただし

$$D=\begin{vmatrix}1&x_0&y_0\\1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\end{vmatrix}.$$

まあ、素朴にやってみましょう。各 L_i は 1 次式だから、適当な a_i, b_i, c_i を用いて、

$$L_i(x,y)=a_ix+b_iy+c_i=(1\ x\ y)\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}$$

とかけるはず。$(x,y)=(x_j,y_j)$ での値を並べて作るベクトルは

$$\begin{pmatrix}L_i(x_0,y_0)\\L_i(x_1,y_1)\\L_i(x_2,y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x_0&y_0\\1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}.$$

これを $i=0,1,2$ と並べて作った行列を考えると、$L_i(\mathrm{P}_j)=\delta_{ij}$ であるから、

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_0(x_0,y_0)&L_1(x_0,y_0)&L_2(x_0,y_0)\\L_0(x_1,y_1)&L_1(x_1,y_1)&L_2(x_1,y_1)\\L_0(x_2,y_2)&L_1(x_2,y_2)&L_2(x_2,y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x_0&y_0\\1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2\\b_0&b_1&b_2\\c_0&c_1&c_2\end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2\\b_0&b_1&b_2\\c_0&c_1&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x_0&y_0\\1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\end{pmatrix}^{-1}.$$

$$(L_0(x,y)\ L_1(x,y)\ L_2(x,y))=(1\ x\ y)\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2\\b_0&b_1&b_2\\c_0&c_1&c_2\end{pmatrix}=(1\ x\ y)\begin{pmatrix}1&x_0&y_0\\1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\end{pmatrix}^{-1}.$$

やはり逆行列を求めるしかないか。

$$X:=\begin{pmatrix}1&x_0&y_0\\1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\end{pmatrix},\quad D:=\det X$$

とおく。

$$X^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_2&y_2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&y_1\\1&y_2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&y_0\\1&y_2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&y_0\\1&y_1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&x_0\\1&x_2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&x_0\\1&x_1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}x_1y_2-y_1x_2&y_0x_2-x_0y_2&x_0y_1-y_0x_2\\y_1-y_2&y_2-y_0&y_0-y_1\\x_2-x_1&x_0-x_2&x_1-x_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}L_0(x,y)&=\frac{1}{D}\left[(x_1y_2-y_1x_2)+(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y\right],\\L_1(x,y)&=\frac{1}{D}\left[(x_2y_0-y_2x_0)+(y_2-y_0)x+(x_0-x_2)y\right],\\L_2(x,y)&=\frac{1}{D}\left[(x_0y_1-y_0x_1)+(y_0-y_1)x+(x_1-x_0)y\right]\end{aligned}$$

さて、

$$\phi_0=\lambda_0(2\lambda_0-1),\quad\phi_1=\lambda_1(2\lambda_1-1),\quad\phi_2=\lambda_1(2\lambda_1-1),$$

$$\phi_3=4\lambda_1\lambda_2,\quad\phi_4=4\lambda_2\lambda_0,\quad\phi_5=4\lambda_0\lambda_1.$$

とおくと、ϕ_i は 2 次多項式で

$$\phi_i(\mathrm{P}_j)=\delta_{ij}.$$

が成り立つ。

$$\lambda_0(P_0)=1,\quad\lambda_0(\mathrm{P}_1)=\lambda_0(\mathrm{P}_2)=0,\quad\lambda_0(\mathrm{P}_3)=0,\quad\lambda_0(\mathrm{P}_4)=\lambda_0(\mathrm{P}_5)=\frac{1}{2}$$

であるから、

$$\phi_0(\mathrm{P}_0)=\lambda_0(\mathrm{P}_0)(2\lambda_0(\mathrm{P}_0)-1)=1\cdot(2\cdot1-1)=1.$$

$$\phi_0(\mathrm{P}_1) = \lambda_0(\mathrm{P}_1)(2\lambda_0(\mathrm{P}_1) - 1) = 0 \cdot (2 \cdot 0 - 1) = 0,$$
$$\phi_0(\mathrm{P}_2) = \lambda_0(\mathrm{P}_2)(2\lambda_0(\mathrm{P}_2) - 1) = 0 \cdot (2 \cdot 0 - 1) = 0,$$
$$\phi_0(\mathrm{P}_3) = \lambda_0(\mathrm{P}_3)(2\lambda_0(\mathrm{P}_3) - 1) = 0 \cdot (2 \cdot 0 - 1) = 0,$$
$$\phi_0(\mathrm{P}_4) = \lambda_0(\mathrm{P}_3)(2\lambda_0(\mathrm{P}_3) - 1) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} - 1) = 0,$$
$$\phi_0(\mathrm{P}_5) = \lambda_0(\mathrm{P}_3)(2\lambda_0(\mathrm{P}_3) - 1) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} - 1) = 0.$$

まとめると

$$\phi_0(\mathrm{P}_j) = \delta_{0j}.$$

同様にして

$$\phi_1(\mathrm{P}_j) = \delta_{1j}, \quad \phi_2(\mathrm{P}_j) = \delta_{2j}.$$

が分かる。λ_3 はどうか？

1 階導関数

$$\alpha_0 = \frac{y_1 - y_2}{D}, \quad \alpha_1 = \frac{y_2 - y_0}{D}, \quad \alpha_2 = \frac{y_0 - y_1}{D},$$
$$\beta_0 = \frac{x_2 - x_1}{D}, \quad \beta_1 = \frac{x_0 - x_2}{D}, \quad \beta_2 = \frac{x_1 - x_0}{D}$$

とおくとき、

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \alpha_i(4\lambda_i - 1), \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \beta_i(4\lambda_i - 1) \quad (i = 0, 1, 2).$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x} = 4\left(\alpha_2\lambda_0 + \alpha_0\lambda_2\right), \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial x} = 4\left(\alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_0\right), \quad \frac{\partial \phi_5}{\partial x} = 4\left(\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_1\right).$$
$$\frac{\partial \phi_3}{\partial y} = 4\left(\beta_2\lambda_0 + \beta_0\lambda_2\right), \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial y} = 4\left(\beta_0\lambda_1 + \beta_1\lambda_0\right), \quad \frac{\partial \phi_5}{\partial y} = 4\left(\beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_1\right).$$

$$\frac{\partial \phi_{3+i}}{\partial x} = 4\left(\alpha_j\lambda_k + \alpha_k\lambda_j\right), \quad \frac{\partial \phi_{3+i}}{\partial y} = 4\left(\beta_j\lambda_k + \beta_k\lambda_j\right) \quad ((i, j, k) = (0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1))$$

とも書ける。

7.8.1 要素係数行列

$$\left(\widehat{A}_e\right)_{ij} := \langle \phi_i, \phi_j \rangle_i = \iint_e \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx\, dy,$$
$$\left(\widehat{B}_e\right)_{ij} := {}_x\left[\phi_i, \lambda_j\right]_e = \iint_e \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\lambda_j \, dx\, dy,$$
$$\left(\widehat{C}_e\right)_{ij} := {}_y\left[\phi_i, \lambda_j\right]_e = \iint_e \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\lambda_j \, dx\, dy,$$
$$\left(\widehat{D}_e\right)_{ij} := (\phi_i, \phi_j)_e = \iint_e \phi_i\phi_j \, dx\, dy.$$

任意の関数 u に対して、$u_i := u(P_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ とおく。あれれ？

$$\langle \widehat{u}^*, \widehat{u} \rangle$$

$$\widehat{u} = \sum_{i=0}^{5} u_i\phi_i(x,y), \quad \widehat{u}^* = \sum_{i=0}^{5} u_i^*\phi_i(x,y), \quad \widehat{v} = \sum_{i=0}^{5} v_i\phi_i(x,y), \quad \widehat{v}^* = \sum_{i=0}^{5} v_i^*\phi_i(x,y),$$

$$\widehat{p}_i = \sum_{i=0}^{2} p_i\lambda_i(x,y), \quad \widehat{p}_i^* = \sum_{i=0}^{2} p_i^*\lambda_i(x,y), \quad \widehat{f} = \sum_{i=0}^{5} f_i\phi_i(x,y), \quad \widehat{g} = \sum_{i=0}^{5} g_i\phi_i(x,y).$$

$$\langle \widehat{u}^*, \widehat{u} \rangle_e = \widehat{\boldsymbol{u}}_e^* \widehat{\boldsymbol{A}}_e \widehat{\boldsymbol{u}}_e,$$

$$\langle \widehat{v}^*, \widehat{v} \rangle_e = \widehat{\boldsymbol{v}}_e^{*T} \widehat{\boldsymbol{A}}_e \widehat{\boldsymbol{v}}_e,$$

$${}_x[\widehat{u}^*, \widehat{p}]_e = \widehat{\boldsymbol{u}}_e^* \widehat{\boldsymbol{B}}_e \widehat{\boldsymbol{p}}_e,$$

$${}_x[\widehat{v}^*, \widehat{p}]_e = \widehat{\boldsymbol{v}}_e^{*T} \widehat{\boldsymbol{C}}_e \widehat{\boldsymbol{p}}_e,$$

$$(\widehat{u}^*, f)_e = \widehat{\boldsymbol{u}}_e^{*T} \widehat{\boldsymbol{D}_e} \widehat{\boldsymbol{f}_e}$$

7.9 stokes-fukushima.c を読む

$$-\nu \triangle \boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho} = \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega, \tag{9.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{9.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \tag{9.3}$$

$$\sigma = \boldsymbol{S} \tag{9.4}$$

σ は「表面力」

$$\sigma = \left(-pn_x + \nu\rho \left(\nabla u + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \right) \cdot \boldsymbol{n}, -pn_y + \nu\rho \left(\nabla v + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \right) \cdot \boldsymbol{n} \right)$$

ここで $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ は境界における外向き単位法線ベクトル。

nnode	節点の総数	
nelmt	要素の総数	
SIZE	未知数の総数 (?)	
nDBC	Γ_1 に属する節点の総数	
nNBC	Γ_2 に属する節点の総数	
ND	Γ に属する節点の総数	$=$ nDBC $+$ nNBC
cum[]	累積節点番号表	cum[i] は c_i ($0 \le i <$ nnode)
num[][]	要素節点番号表	num[i][j] は第 i 要素の局所節点番号 j の節点の全体節点番
b[]	Γ に属する節点の全体節点番号	b[k] ($0 \le k <$ ND) 境界に属する節点を番号づけ B_0,B_1,..., $B_{\mathtt{ND}-1}$ B_k の全体節点番号を b[k] $B_k \in \Gamma_1$ $(0 \le k < nDBC)$, $B_k \in \Gamma_2$ $(nDBC \le k < ND)$
nu	動粘性係数 ν	
rho	密度 ρ	
x[]	節点の x 座標	x[i] は全体節点番号 i の節点の x 座標
y[]	節点の y 座標	y[i] は全体節点番号 i の節点の y 座標
x[], y[]		
bx[]	?	bx[i] は、境界にある節点の i 番目における 境界データ ($\boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{S}$) の x 成分
by[]	?	
fx[i]	外力 $\boldsymbol{f}$ の x 成分	fx[i] は第 i 節点における $\boldsymbol{f}$ の x 成分
fy[i]	外力 $\boldsymbol{f}$ の y 成分	fy[i] は第 i 節点における $\boldsymbol{f}$ の y 成分
sx[]	応力テンソルの x 成分	
sx[]	応力テンソルの y 成分	
ab[][]	全体剛性行列 (帯圧縮したもの)	

7.9.1 make()

a は $\widehat{A}_e$, b は $\widehat{B}_e$, c は $\widehat{C}_e$, d は $\widehat{D}_e$.

a0, a1, a2 は α_0, α_1, α_2 (p.8)

b0, b1, b2 は β_0, β_1, β_2 (p.8)

c0, c1, c2 は c_0, c_1, c_2 (p.9)

a[][] は $\widehat{A}_e$ の成分 p.19, b[][] は $\widehat{B}_e$ の成分 p.19, c[][] は $\widehat{C}_e$ の成分 p.19, d[][] は $\widehat{D}_e$ の成分 p.19,

7.10 dummy

7.10.1 野沢

非定常 Stokes 方程式の有限要素解析をしている。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \nu \triangle u(x,y,t) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,t) + f(x,y) \\
\frac{\partial v}{\partial t}(x,y,t) = \nu \triangle v(x,y,t) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}(x,y,t) + g(x,y) \\
-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,t) = 0, \\
u(x,y,0) = u_0(x,y), \\
v(x,y,0) = v_0(x,y), \\
\boldsymbol{u}(x,y,t) = \boldsymbol{\zeta}(x,y,t) \quad (\text{on } \Gamma)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(u^*, \dot{u}) = -\nu\langle u^*, u\rangle + \frac{1}{\rho}[u^*, p]_x + (u^*, f), \\
(v^*, \dot{v}) = -\nu\langle v^*, v\rangle + \frac{1}{\rho}[v^*, p]_y + (u^*, f), \\
-[u, p^*]_x - [v, p^*]_y = 0 \qquad (u^*,\, v^* \in H_0^1(\Omega),\, p^* \in L^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

試験関数の範囲は，$u^*,\, v^* \in H_0^1(\Omega),\, p \in L^2(\Omega)$.

第8章　Navier-Stokes 方程式の弱形式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \triangle u + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) - f(x,y) = 0,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \triangle v + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) - g(x,y) = 0,
\end{aligned}
$$

$u^* \in H_0^1(\Omega)$ をかけて積分する。

$$
\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u^* \, dx\, dy - \nu \int_\Omega (\triangle u)\, u^* \, dx\, dy + \frac{1}{\rho}\iint_\Omega \frac{\partial p}{\partial y} \, dx\, dy + \iint_\Omega u^* \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy - \iint_\Omega f u^* \, dx\, dy = 0.
$$

$$
\text{左辺第 3 項} = \frac{1}{\rho}\left(\int_\Gamma u^* p n_i \, ds - \iint_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial x} p \, dx\, dy \right) = -\frac{1}{\rho}\iint_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial x} p \, dx\, dy,
$$

$$
\text{左辺第 2 項} = -\nu \left(\int_\Gamma u^* \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^* \, dx\, dy \right) = \nu \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^* \, dx\, dy
$$

であるから、

$$
\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u^* \, dx\, dy + \nu \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^* \, dx\, dy - \frac{1}{\rho}\iint_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial x} p \, dx\, dy + \iint_\Omega u^* \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy - \iint_\Omega f u^* \, dx\, dy = 0.
$$

同様にして

$$
\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} v^* \, dx\, dy + \nu \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u^* \, dx\, dy - \frac{1}{\rho}\iint_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial y} p \, dx\, dy + \iint_\Omega u^* \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy - \iint_\Omega g u^* \, dx\, dy = 0.
$$

付 録A　常識チェック

A.1　圧力

- 圧力とは？
- MKS 単位系で圧力の単位は？
- 1 気圧は MKS 単位系ではいくら？(1 気圧で、1 m^2 にかかる力は？)
- 1 N はどれくらいの力か、実感できますか？
- ペットボトルの水の質量は？
- 水深 1 m での水圧はどのくらい？
- 海で一番深いところはざっと 10^4 m だけど、水圧はどれくらい？
- アルキメデスの原理とは？
- 浮力が働くのはなぜ？

付 録B　ベクトル解析の記号

B.1　物質微分 (くどく)

物質微分とは

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)$$

で定義されるもの。

2 次元の場合は、

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

ここで

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

に注意しよう。つまり任意の関数 F に対して

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)F = u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y}$$

ということである。ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ に対しては

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)f \\ (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

特に Stokes 方程式, Navier-Stokes 方程式に現われる $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$ については、

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)u \\ (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

3 次元 $\boldsymbol{u} = (u, v, w)^T$ の場合は

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)u \\ (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)v \\ (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

付 録C　NAT2007

九州大学21世紀COEプログラム「機能数理学の構築と展開」の「数値解析チュートリアル2007」

C.1　定常 Stokes 方程式の境界値問題

C.1.1　Dirichlet 境界条件

(鈴木厚氏の解説)

$\mathbf{R}^2$ の有界領域 Ω における定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$-\triangle \boldsymbol{u} + \mathrm{grad}\, p = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \quad \text{on } \Gamma := \partial\Omega \tag{1.3}$$

を考える。ただし $\boldsymbol{g}$ は Γ 上与えられたベクトル値関数である。

関数空間 $V(\boldsymbol{g})$, V, Q を

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^1(\Omega) &:= H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \\
V(\boldsymbol{g}) &:= \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega); \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \quad \text{on } \Gamma\}, \quad V := V(\boldsymbol{0}), \\
Q &:= \{q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q(x)\, dx = 0\}
\end{aligned}$$

で定める。

変形速度テンソル (歪テンソル) $D(w)$ は、

$$[D(\boldsymbol{w})]_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

で定義される。

2次形式 $a()$, $a_1()$, $b()$ を

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &:= 2\iint_\Omega D(\boldsymbol{u}) : D(\boldsymbol{v}) dx\, dy = 2\iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} [D(\boldsymbol{u})]_{ij} [D(\boldsymbol{v})]_{ij}\, dx\, dy, \\
a_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &:= \iint_\Omega \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u} : \mathrm{grad}\, \boldsymbol{v}\; dx\, dy = \iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx\, dy, \\
b(\boldsymbol{v}, q) &:= -\int_\Omega q\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\; dx\, dy
\end{aligned}$$

で定める。

(1.1), (1.2), (1.3) の弱定式化として、次を得る。

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in V(\boldsymbol{g}) \times Q$ s.t.

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in V), \tag{1.4}$$

$$b(\boldsymbol{u}, q) = 0 \quad (q \in Q). \tag{1.5}$$

特に $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$ の場合、次の弱定式化も可能である。

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$a_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in V), \tag{1.6}$$

$$b(\boldsymbol{u}, q) = 0 \quad (q \in Q). \tag{1.7}$$

C.2 Stokes方程式の cavity flow

正方形領域 $\Omega := (0,1) \times (0,1)$ における定常 Stokes 方程式の境界値問題

$$-\triangle \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \quad \text{on } \Gamma := \partial\Omega \tag{2.3}$$

を解く。ただし

$$\boldsymbol{g}(x,y) = \begin{cases} 0 & ((x,y) \in \Gamma_0), \\ (4x(1-x), 0)^T & ((x,y) \in \Gamma_3) \end{cases},$$

$$\Gamma_3 := \{(x,1); 0 \le x \le 1\}, \quad \Gamma_0 := \Gamma \setminus \Gamma_3.$$

つまり正方形領域の上の辺 Γ_3 で x 軸に平行な速度を持ち、他の辺では粘着境界条件ということである。

$$\mathbb{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega) \times H^1(\Omega),$$

$$V(\boldsymbol{g}) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega); \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \quad \text{on } \Gamma\},$$

$$V := V(\boldsymbol{0}),$$

$$Q := \{p \in L^2(\Omega); \int_\Omega p(x)\, dx = 0\},$$

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := 2 \iint_\Omega D(\boldsymbol{u}) : D(\boldsymbol{v}) dx\, dy = 2 \iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} [D(\boldsymbol{u})]_{ij} [D(\boldsymbol{v})]_{ij}\, dx\, dy,$$

$$[D(\boldsymbol{w})]_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$b(\boldsymbol{v}, q) := -\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{v} q\, dx\, dy$$

とおき、次の変分問題を考える。

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in V(\boldsymbol{g}) \times Q$ s.t.

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = 0 \quad (\boldsymbol{v} \in V), \tag{2.4}$$

$$b(\boldsymbol{u}, q) = 0 \quad (q \in Q). \tag{2.5}$$

```
// example 1
// Stokes equations : regularized cavity flow problem
// COE-tutorail 2007, Atsushi Suzuki 2007/03/08
//
mesh Th=square(20,20);
fespace Vh(Th,P2),Qh(Th,P1);
//fespace Vh(Th,P1b),Qh(Th,P1);

Vh u1,u2,v1,v2;
Qh p,q;
macro d11(u1)     dx(u1) //
macro d22(u2)     dy(u2) //
macro d12(u1,u2)  (dy(u1) + dx(u2))/2.0 //

real epsln = 1.0e-6;

solve stokes([u1,u2,p], [v1,v2,q]) =
int2d(Th)( 2.0*(d11(u1)*d11(v1)+2.0*d12(u1,u2)*d12(v1,v2)+d22(u2)*d22(v2))
    - dx(v1)*p - dy(v2)*p - dx(u1)*q - dy(u2)*q
         - p*q*epsln
)
+  on(1,2,4,u1=0,u2=0)
+  on(3,u1=x*(1-x)*4,u2=0) ;

real area = int2d(Th)(1.0);
real meanp = int2d(Th)(p) / area;
cout << "mean pressure = " << meanp << endl;
p = p - meanp;

plot([u1,u2],p,wait=1,value=true,coef=0.1);
```

C.3 Navier-Stokes の cavity flow

```
// example 3
// Navier-Stokes equations : regularized cavity flow problem
// COE-tutorail 2007, Atsushi Suzuki 2007/03/08
//

int i;
real nu = 1.0/400.0;
real dt = 0.1;
real alpha = 1.0/dt;
int timestepmax = 200;

mesh Th=square(20,20);
```

```
fespace Vh(Th,P2),Qh(Th,P1);

Vh u1,u2,v1,v2,up1,up2;
Qh p,q;
macro d11(u1)     dx(u1) //
macro d22(u2)     dy(u2) //
macro d12(u1,u2)  (dy(u1) + dx(u2))/2.0 //
real epsln = 1.0e-6;

problem NS([u1,u2,p], [v1,v2,q],solver=Crout,init=i) =
  int2d(Th)(
           alpha * (u1*v1 + u2*v2)
         + 2.0*nu * (d11(u1)*d11(v1)+2.0*d12(u1,u2)*d12(v1,v2)+d22(u2)*d22(v2))
         - dx(v1)*p - dy(v2)*p - dx(u1)*q - dy(u2)*q
         - p*q*epsln
  )
- int2d(Th)(
           alpha * convect([up1,up2],-dt,up1)*v1
         + alpha * convect([up1,up2],-dt,up2)*v2
)
+  on(1,2,4,u1=0,u2=0)
+  on(3,u1=x*(1-x)*4,u2=0) ;

real area = int2d(Th)(1.0);
real meanp;

u1 = 0;
u2 = 0;
for ( i = 0; i < timestepmax; i++) {
   up1=u1;
   up2=u2;
   NS;
   meanp = int2d(Th)(p) / area;
   p = p - meanp;
   if (i%10 == 0)
     plot([u1,u2],p,wait=1,value=true,coef=0.1);

}
```

C.4 Navier-Stokes の 円柱をよぎる流れ

```
// example 4
// Navier-Stokes equations : flow around a cylinder
// COE-tutorail 2007, Atsushi Suzuki 2007/03/08
//
```

```
int i;
real nu = 1.0/400.0;
real dt = 0.1;
real alpha = 1.0/dt;
int timestepmax = 300;

border ba(t=0,1.0){x=t*5.0-1.0;y=-1.0;label=1;};
border bb(t=0,1.0){x=4.0;y=2.0*t-1.0;label=2;};
border bc(t=0,1.0){x=4.0-5.0*t;y=1.0;label=3;};
border bd(t=0,1.0){x=-1.0;y=1.0-2.0*t;label=4;};
border cc(t=0,2*pi){x=cos(t)*0.25;y=sin(t)*0.25;label=5;};
mesh Th=buildmesh(ba(30)+bb(30)+bc(30)+bd(30)+cc(-30));

fespace Vh(Th,P2),Qh(Th,P1);

Vh u1,u2,v1,v2,up1,up2;
Qh p,q;
macro d11(u1)     dx(u1) //
macro d22(u2)     dy(u2) //
macro d12(u1,u2)  (dy(u1) + dx(u2))/2.0 //
real epsln = 1.0e-6;

problem NS([u1,u2,p], [v1,v2,q],solver=Crout,init=i) =
  int2d(Th)(
           alpha * (u1*v1 + u2*v2)
         + 2.0*nu * (d11(u1)*d11(v1)+2.0*d12(u1,u2)*d12(v1,v2)+d22(u2)*d22(v2))
         - dx(v1)*p - dy(v2)*p - dx(u1)*q - dy(u2)*q
         - p*q*epsln
  )
- int2d(Th)(
           alpha * convect([up1,up2],-dt,up1)*v1
         + alpha * convect([up1,up2],-dt,up2)*v2
)
+ on(1,3,u2=0)
+ on(4,u1=1.0-y*y,u2=0)
+ on(5,u1=0,u2=0);

real area = int2d(Th)(1.0);
real meanp;

plot(Th, wait=1);
u1 = 0;
u2 = 0;
for ( i = 0; i < timestepmax; i++) {
   up1=u1;
   up2=u2;
```

```
    NS;
    meanp = int2d(Th)(p) / area;
    p = p - meanp;
    if (i%10 == 0)
      plot([u1,u2],p,wait=1,value=true,coef=0.1);

}
```

付 録D　圧縮

川原 [10] 第 5 章 (5.8), (5.9) には、次の方程式が書いてある。

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-\mu\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)=f,$$
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}-\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=g.$$

κ は体積粘係数。$\tau=\begin{pmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy}\end{pmatrix}$ を応力、$\begin{pmatrix}d_{xx} & d_{xy}\\ d_{yx} & d_{yy}\end{pmatrix}$ を歪み速度とするとき、

$$\begin{aligned}\tau_{xx}&=-p+\kappa d+2\mu d_{xx},\\ \tau_{xy}&=2\mu d_{xy},\\ \tau_{yy}&=-p+\kappa d+2\mu d_{yy}.\end{aligned}$$

が成り立つ。非圧縮性流体では、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

が成り立つので、

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f,$$
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=g$$

と書き換えられる。これは Navier-Stokes 方程式の通常形である。

付 録E　関数空間

E.1　ラジゼンスカヤ [1]

Ω を $\mathbf{R}^n$ $(N=2,3)$ の領域とし、$\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ を $\boldsymbol{u}=(u_i)$ で、成分 u_i が $L_2(\Omega)$ に属するものからなる Hilbert 空間とする。内積は

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\,dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^N u_k v_k\,dx$$

で定義される。

E.1.1　境界上与えられたベクトル場をソレノイダルなベクトル場に拡張する

Ω を $\mathbf{R}^n$ の境界とし、Ω の境界を S と表わす。

問題 A

S 上定義されたベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対して、Ω におけるソレノイダルなベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ で S 上 $\boldsymbol{a}$ に一致するものを構成せよ。

$$\operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{a}} = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad \widetilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a} \quad (\text{on } S).$$

(以下の議論は S にある程度の滑らかさが必要であると思う。例えばすぐ後で単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が登場し、発散定理も使うが、これは Ω が Lipschitz であれば、$\widetilde{\boldsymbol{a}}\in H^1(\Omega)^n$ に対してなりたつ。)

こういう $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ が存在するには

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = 0 \tag{1.1}$$

であることが必要である (ここで $\boldsymbol{n}$ は S 上の点における Ω の外向き単位法線ベクトル)。実際、発散定理から

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_S \widetilde{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{a}}\,dx = \int_\Omega 0\,dx = 0.$$

$N=3$ とする。

$$\alpha_n := \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{a}_\tau := \boldsymbol{a} - \alpha_n\boldsymbol{n}$$

とおくと

$$\boldsymbol{a} = \alpha_n\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}_\tau$$

が成り立つが、$\alpha_n\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{a}_\tau$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ の法線成分、接線成分と言える。

Ω における Laplace 方程式の Neumann 問題

$$\triangle\varphi = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = \alpha_n$$

を考える。条件 (E.1.1) から、確かに解をもつ (もちろん S に滑らかさを仮定する)。

このとき、

$$\boldsymbol{b} := \operatorname{grad}\varphi$$

とおくと、$\boldsymbol{b}$ は $\overline{\Omega}$ 上のベクトル場で

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} = \operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \alpha_n.$$

求める条件を満たす $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ が存在したとするとき、

$$\boldsymbol{c} := \widetilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|_S$$

とおくと、

$$\operatorname{div}\boldsymbol{c} = \operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b} = 0^0 = 0,$$

$$\boldsymbol{c}|_S = \widetilde{\boldsymbol{a}}|_S - \boldsymbol{b}|_S = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|_S = \boldsymbol{\beta}.$$

また

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|_S, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}) = \alpha_n - \alpha_n = 0.$$

そこで以下次の問題を解くことを目標とする。

問題 B

$\boldsymbol{\beta}$ を S 上与えられたベクトル場で $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ を満たすものとするとき、

$$\operatorname{div}\boldsymbol{c} = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\beta} \quad (\text{on } S)$$

をみたすベクトル場 $\boldsymbol{c}$ を求めよ、

この問題の解 $\boldsymbol{c}$ が得られたとき

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} := \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

とおくと、$\widetilde{\boldsymbol{a}}$ は問題 A の解になるわけである。

我々は $\boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{c} = \operatorname{rot}\boldsymbol{d}$$

の形で求める。

E.1.2 $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ の分解

$$\boldsymbol{J}(\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in C_0^\infty(\Omega); \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0\}$$

とするとき、

$$\boldsymbol{G}(\Omega) := \overline{\boldsymbol{J}(\Omega)}^\perp$$

とおくと

$$\boldsymbol{L}_2(\Omega) = \boldsymbol{G}(\Omega) \oplus \overline{\boldsymbol{J}(\Omega)}.$$

命題 E.1.1 (定理 1)

$$\boldsymbol{G}(\Omega) = \{\operatorname{grad}\varphi \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)\}$$

E.2 Constantin-Foias [2] から

Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。Ω が線分条件 (segment property) を持つとは、

命題 E.2.1 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合で線分条件を満たすならば、$1 \le p < \infty$ を満たす任意の p, 任意の $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して、$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は $W^{m,p}(\Omega)$ で稠密である。

証明 (証明のアウトラインのみ載っている。) ■

命題 E.2.2 (Poincaré の不等式) Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合で、ある方向に有界 ($\mathbf{R}^n$ のある直線 ℓ に対して、Ω の ℓ への射影が有界) であるならば、ある正定数 $C(\Omega)$ が存在して

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

証明 有名だから省略。 ■

$u \in L^2(\Omega)$ に対して、

$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u := \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

とおく。ただし $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ は超関数の意味での導関数とする (つまり $\nabla u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ である)。

$$E(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega)^n; \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}$$

とおき、内積

$$[u, v] := (u, v) + \int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\, dx$$

を与えると、$E(\Omega)$ は Hilbert 空間になる。

命題 E.2.3 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合で線分条件を満たすならば、$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は $E(\Omega)$ で稠密である。

Ω が有界で C^2-級の開集合とする。trace operator と呼ばれる有界線形作用素

$$\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

が、$\overline{\Omega}$ で C^1-級の関数に対して $\partial\Omega$ への制限に等しくなるように定めることができる。γ_0 の核は $H_0^1(\Omega)$ に等しい。その像を $H^{1/2}(\partial\Omega)$ と書くが、それは Hilbert 空間になる (内積は？)。lifting operator $\ell_\Omega \colon H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$ が、$\gamma_0 \ell_\Omega = \mathrm{id}_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ となるように定められる。これらについては、Lions [11], Lions-Magenes [12] を見よ。

$E(\Omega)$ の元 u に対して、法線成分 $u \cdot n_\Omega$ を定義したい。

命題 E.2.4 Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界な C^2-級開集合であるとする。このとき、$\gamma \colon E(\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ で、$\forall u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^n$ に対して、$\gamma(u) = u \cdot n_\Omega$ であるように定めることができる。そして

$$(u, \operatorname{grad} w) + (\operatorname{div} u, w) = \langle \gamma(u), \gamma_0(w) \rangle \quad (u \in E(\Omega),\ w \in H^1(\Omega)) \tag{2.1}$$

がなりたつ。

$$\mathscr{V} := \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n; \operatorname{div} \varphi = 0\} \tag{2.2}$$

とおき、

(2.3) $$H := L^2(\Omega)^n \text{ における } \mathscr{V} \text{ の閉包},$$

(2.4) $$V := H_0^1(\Omega)^n \text{ における } \mathscr{V} \text{ の閉包}$$

とおく。

命題 E.2.5 (Proposition 1.6) Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき、$f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{D}'(\Omega)$ について、次の二条件は同値である。

(i) $\exists p \in \mathscr{D}'(\Omega)$ s.t. $f = \operatorname{grad} p$.

(ii) $\forall v \in \mathscr{V}\ \langle f, v \rangle = 0$.

命題 E.2.6 (Proposition 1.7) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界な開集合で、locally Lipschitz であるとき、

命題 E.2.7 (Proposition 1.8) Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界な開集合で locally Lipschitz であるとき、次の (1), (2) がなりたつ。

(1) $H = \{u \in L^2(\Omega)^n;\ \operatorname{div} u = 0,\ \gamma(u) = 0\}$.

(2) $H^\perp = \{u \in L^2(\Omega)^n;\ u = \operatorname{grad} p,\ p \in H^1(\Omega)\}$.

命題 E.2.8 Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界で C^2-級の開集合とするとき、

$$\begin{aligned} H_1 &= \{u \in L^2(\Omega)^n;\ u = \operatorname{grad} p, \quad p \in H^1(\Omega), \quad \triangle p = 0\}, \\ H_2 &= \{u \in L^2(\Omega)^n;\ u = \operatorname{grad} p, \quad p \in H_0^1(\Omega)\}. \end{aligned}$$

とおくとき

$$L^2(\Omega) = H \oplus H_1 \oplus H_2 \quad (\text{直交直和分解}).$$

注意 E.2.9 (Remark 1.10) $P\colon L^2(\Omega)^n \to H$ を直交射影とする。これはしばしば **Leray 射影** (Leray Projector) と呼ばれる。もしも $u \in H_0^1(\Omega)^n$ ならば、実は $Pu \in H^1(\Omega)^n$ であり、$P_{H_0^1(\Omega)}\colon H_0^1(\Omega)^n \to H^1(\Omega)^n$ は有界線形作用素であることが証明できる。実際、...

命題 E.2.10 (Proposition 1.11) Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界で Lipschitz な開集合とするとき、

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega);\ \operatorname{div} u = 0\}.$$

付 録F　浅水波

この章の内容はしばらく独立した文書にして手を入れる。ちゃんと回収すること。

F.1　一体何か？

浅水波の方程式 (shallow water equation) とは、

F.2　導出

F.2.1

ネットでふらふらしていて見つけた、George [13] がなかなか分かりやすかった。

> 上に述べたような応用は、流体力学のある部分で記述される。重力の影響下の非圧縮流体で、自由境界が未知となっている。さらに流体の粘性は無視される。なぜならば、これらの流れのスケールでは無視可能となるから。非線形浅水波方程式は、この他に流れに関する仮定が付与された場合に問題となる。いくつかの同値な仮定が、同じ方程式系を導く。最も形式的には、3 次元の非圧縮非粘性流体の方程式から出発して、すべての量に関して摂動の手続きを行なった、もっとも低い階数の近似である。この摂動の手続きにおいては、水の深さの何か水平方向の特徴的な長さとの比であるパラメーター ε は、が小さいと仮定する。この手続きによって、水粒子の垂直加速度は 0 となり、垂直方向の水圧分布が 0 ということと同値になる。浅水波方程式の最も直接的な導出、以下に示すものだが、はこの静水力学的仮説をアプリオリにおく。この仮定と非粘性、非圧縮の仮定から、質量保存と運動量保存からただちに導かれる。“variable bottom topography contributes a source of momentum.”

そして参考文献にあがっているのは、

> J. J. Stoker, Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. Interscience Publishers, New York, 1957.

(もう一つの著書が Differential geometry! 一体何者だ？面白い。買ってみよう。)

水底を $z = b(x,y)$ とする。$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

∇p が z によらないので、$\boldsymbol{u}$ は z によらない。
水の占める領域を、下が $z = b(x,y)$, 上が自由境界 $z = h(x,y)$ とする。
運動量の保存から

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega^3} \boldsymbol{u}\,dx\,dy\,dz + \iint_{\partial\Omega^3} [(u)\boldsymbol{u}\cdot n]\,ds + \iint_{\partial\Omega^3} [\Pi\cdot\boldsymbol{n}]\,ds - \iiint_{\Omega^3} \boldsymbol{G}\,dx\,dy\,dz = 0. \tag{2.1}$$

Π は応力テンソル, $\boldsymbol{G}$ は体積力密度 ($\boldsymbol{G} = -g\hat{\boldsymbol{k}}$)

非粘性流体を仮定しているので、応力テンソルは $\Pi = p\boldsymbol{I}$ と静水力学的圧力 $p(x,y,z) = g(h+b-z)$ この静水力学的な仮定から、第 3、4 項の垂直成分はキャンセルする。(2.1) の w に対する 3 番目の方程式は無視される。実際 $Dw/Dt = 0$ を意味している。

$$\frac{d}{dt}\iint_\Omega h\boldsymbol{u}\,dx\,dy + \int_{\partial\Omega}[(h\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]\,ds + \int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2}gh^2\boldsymbol{n}\right]ds = -\iint_\Omega gh\nabla b\,dx\,dy. \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}\iint_\Omega h\,dx\,dy + \int_{\partial\Omega} h\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = 0. \tag{2.3}$$

これは質量の保存を表している。

質量保存を表す (2.3) と、(2.2) から、流れの深さと運動量に対する支配方程式を得る。その方程式系は、保存則の広いクラスに属し、

$$\frac{d}{dt}\iint_\Omega \boldsymbol{q}\,dx\,dy + \int_{\partial\Omega} F(\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \iint_\Omega \psi\,dx\,dy \tag{2.4}$$

のようにコンパクトに書かれる。浅水波の方程式の場合、

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix},\quad F(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} hu & uv \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 & huv \\ huv & hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},\quad \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{pmatrix}$$

である。

(2.4) は保存則の積分形であり、不連続性も許容しうるという点で基本的である。関数のなめらかさを仮定すると、以下のような偏微分方程式系を導くことが出来るが、これはいつも可能であるとは限らないことに注意しよう。

積分記号下の微分と、Gauss の発散定理から、

$$\frac{d}{dt}\iint_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}\,dx\,dy + \int_\Omega \operatorname{div} F(\boldsymbol{q})dx\,dy = \iint_\Omega \psi\,dx\,dy.$$

Ω の任意性から

$$\boldsymbol{q}_t + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \psi.$$

F.2.2

MathWorld には

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(h-b)) + \frac{\partial}{\partial y}(v(h-b)) &= 0.
\end{aligned}$$

付 録G　雑題

G.1 Magnus 効果

関連図書

[1] O. A. ラジゼンスカヤ：非圧縮粘性流の数学的理論, 産業図書 (1979), 藤田宏 竹下彬 訳.

[2] Constantin, P. and Foias, C.: *Navier-Stokes Equations*, The University of Chicago Press (1989).

[3] 桂田祐史：複素関数と流体力学, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).

[4] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 後編は書かれなかった。

[5] 藤田宏, 池部晃生, 犬井鉄郎, 高見穎郎：数理物理に現われる偏微分方程式 I, II, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店 (1977, 1979), 岩波オンデマンドブックスで復刊された (2019/9/10)。「現れる」と書く人が多いが「現われる」が正しい。 岩波書店の WWW サイトでも間違えているのはやめてほしい。

[6] 岡本久：非線形力学 第 I 部「流体の運動と力学系」, 岩波書店 (1995), 岩波講座応用数学の分冊.

[7] Temam, R.: *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, AMS (2001/6), 元々は North-Holland から 1977 年に出版された.

[8] 森本浩子：Navier-Stokes 方程式入門, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/members/pdf/Morimoto/morimoto-ns-2003.pdf (2003).

[9] 田端正久：有限要素法 — 理論から実践まで (3) 鞍点型変分原理に基づく有限要法, 応用数理 VOL. 15, No. 3 (2005), 応用数理に掲載されたものなので、ネットで公開されているはずです。

[10] 川原睦人：有限要素法流体解析, 日科技連 (1985).

[11] Lions, J. L.: *Problèms aux limites dans les équations aux derivées partielles*, Presses de l'Université de Montreal, Montreal (1965).

[12] Lions, J. L. and Magenes, E.: *Problèmes aux limites non homogenes et applications*, Dunod, Paris (1968–1970).

[13] George, D. L.: Numerical Approximation of the Nonlinear Shallow Water Equations with Topography and Dry Beds: A GOdunov-Type Scheme, University of Washington の修士論文？ (2004).

索 引