レポート課題　version 1

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2015 年 7 月 3 日

以下のうち 1 つの課題を選んでレポートする。

提出は原則としてメール (katurada@meiji.ac.jp) で送る。締め切りは 7 月　日　時, 件名は「現象数理研究 I レポート」, メール本文の先頭に氏名を書く。プログラムを用いた場合はソース・プログラムも含めること。

- ゼミはさ来週 7/17 で終了。その後は期末試験があるため、時間はあまりない。
- 提出前に少なくとも一度桂田にレポートを見せて、修正・改善意見を聞いてから、最終稿を提出して下さい (レポート原稿をメールで送って、それから話を聞きに来るのがオススメ)。
- 時間の許す限り質問・相談受け付けます (自由課題でも OK)。ある程度時間が必要になりそうな場合、前日までにメールで連絡を取って予約して下さい。
  火曜、水曜、金曜の午前中, 月曜 4,5 限はたいてい都合が付く。その他は相談次第。

課題 0　(自由課題) 数値計算に係ることなら何でも可。自分で実際に数値計算すること。

発展系に対する差分法 (1 次元区間の熱方程式)

課題 1　heat1d-i-glsc.c または heat1n-i-glsc.c をたたき台にして調べられる方程式をいくつかあげるので、どれか 1 つ選んで調べて下さい。(最初は簡単、2 番目のも分かりやすい、3 番目以降は難度が上がる。)

参考になる資料

- 「発展系の数値解析」の §6「熱方程式以外の問題」
- 「熱方程式に対する差分法 I」の第 1 章「同次 Dirichlet 境界条件以外の境界条件」

(a) (温度に比例して熱が発生する場合) k を正の定数として、熱方程式の代わりに

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t)$$

という方程式を調べる。k が小さいうちは、$k=0$ の場合と同様に、どういう初期値であっても、最後は冷えきってしまう ($u \to 0$ となる) が、k がある程度大きいとそうならなくなる。その閾値 k^* は何か？

温度に比例して熱が発生するということになるが、$k<0$ の場合は外界の温度が 0 で熱の絶縁が完全でなくて冷却される、と考えることも出来る。

(数値計算しなくても k^* が分かる人はいるでしょうが、数値計算もして調べて下さい。)

(b) (同次 Dirichlet, Neumann 境界条件以外の境界条件) 両端の温度がいつでも 0, あるいは両端が完全に断熱、というのは単純ですが、そうでない場合のシミュレーションをして、それが自分の予想通りになるか調べて下さい。

例えば A, B を定数として、

$$u(0,t)=A,\quad u(1,t)=B\quad (t\in(0,\infty))$$

(両端の温度を 0 以外に指定) とするとか、

$$u_x(0,t)=A,\quad u_x(1,t)=B\quad (t\in(0,\infty))$$

(両端の熱流を指定) とするとか、色々考えられる。

(c) (熱の移流のある場合) k を比例定数として、熱方程式の代わりに

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+ku_x(x,t)$$

という方程式を調べる。熱の移流がある、ということになる。(これは Fourier の方法で厳密解を求めるのは面白い問題となるのだけど、それが出来なくても、シミュレーションは出来るでしょう。)

(d) (ある連立半線形熱方程式) k,ℓ を既知定数, u_0, v_0 を恒等的に 0 ではない非負の既知関数とするとき、

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+ku(x,t)v(x,t)\quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)),\\
&v_t(x,t)=v_{xx}(x,t)+\ell u(x,t)v(x,t)\quad ((x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)),\\
&u_x(0,t)=u_x(1,t)=v_x(0,t)=v_x(1,t)=0\quad (t\in(0,\infty)),\\
&u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x)\quad (x\in[(0,1])
\end{aligned}$$

という方程式の解 u, v が $t\to\infty$ のときどうなるかを調べる。k,ℓ の符号だけが本質的なことが分かるので (なぜ？)、$k,\ell=0,1,-1$ の場合だけを考えれば良い。定数 (0 だったり、そうでなかったり) に収束したり、有限時間で発散したりします。

課題 2　サンプル・プログラム `heat1d-i-glsc.c`[1] を自分が得意なプログラミング言語、環境 (例えば同じ C 言語でも OpenGL を使ってグラフィックスを実現する等) に移植する。プログラムが動くところを桂田に見せられることが必要条件である。プログラミング言語や環境、プログラムの実行法 (コンパイルの方法等も含む) も説明すること。

[1] `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fdm/heat1d-i-glsc.c`