**数学解析 宿題 No. 6** (2021年6月21日出題, 7月3日 (土)18:00 までに Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は何ページでも可. 1つのPDFにして提出。)

**問6** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次式で定めるとき、以下の (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

(注: $f$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ では有理関数に等しいので、$C^\infty$ 級である。)
(1) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。(2) $f$ は $\mathbb{R}^2$ で $C^1$ 級であることを示せ。(3) $f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を求め、$f$ が $\mathbb{R}^2$ で $C^2$ 級であるかどうか答えよ。

**問 6 解説と解答**

(1) $h \neq 0$ のとき、$f(h,0) = \dfrac{h^3 \cdot 0}{h^2+0^2}$, $f(0,h) = \dfrac{0^3 \cdot h}{0^2+h^2}$, $f(0,0)=0$ であるから

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^3\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0^3\cdot h}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(2) $f$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ では有理関数に等しいので、$C^\infty$ 級である。(1) から、$f$ は $(0,0)$ では偏微分可能である。ゆえに $f$ が $\mathbb{R}^2$ で $C^1$ 級であるためには、$f_x$ と $f_y$ が $(0,0)$ で連続であることを確かめれば良い。$(x,y) \neq (0,0)$ のとき、商の微分法によって

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot 3x^2y - (2x)\cdot x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot x^3 - (2y)\cdot x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$(x,y) \to (0,0)$ のとき

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| = \frac{|y|x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leq |y| \frac{(x^2+y^2)(3x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 3|y| \to 0,$$

$$|f_y(x,y) - f_y(0,0)| = \frac{|x^3(x^2-y^2)|}{(x^2+y^2)^2} \leq |x| \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = |x| \to 0.$$

ゆえに $f_x$, $f_y$ ともに $(0,0)$ で連続であるから、$f$ は $\mathbb{R}^2$ 全体で $C^1$ 級である。

(3) $h \neq 0$ のとき、$f_x(0,h) = \dfrac{0^2\cdot h(0^2+3h^2)}{(0^2+h^2)^2} = 0$, $f_y(h,0) = \dfrac{h^3(h^2-0^2)}{(h^2+0^2)^2} = h$. また $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ であるから

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

もしも $f$ が $\mathbb{R}^2$ で $C^2$ 級ならば、$\mathbb{R}^2$ 全体で $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つはずであるが、($(0,0)$ では) 成り立っていないので、$f$ は $C^2$ 級ではない。■