2015年度 数学解析 期末試験問題

2015年7月30日 (木曜) 10:30〜11:30 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1, **7** は必ず解答せよ。**2**, **3**, **4**, **5**, **6** のうちから3題選択して解答せよ。(合計5問解答する。)

1. (1) 実数列が実数に収束することの定義を述べよ。(2) アルキメデスの公理 (原理) を書け。
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ を証明せよ。

2. $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$ として、$-A:=\{x\mid(\exists y\in A)\ x=-y\}$ とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) $S\in\mathbb{R}$ が A の上限であるという条件を論理式で表せ。

(2) $L\in\mathbb{R}$ が $-A$ の下限であるという条件を論理式で表せ。

(3) $S\in\mathbb{R}$ が A の上限であるならば、$-S$ は $-A$ の下限であることを示せ。

3. $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{2}{a_n}\right)$ $(n\in\mathbb{N})$ により $\{a_n\}$ を定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4 を求め、小数 (小数点以下5桁まで) に直せ。

(2) $n\geq 2$ のとき、$a_n\geq a_{n+1}$ であることを示せ。

(3) $\{a_n\}$ が収束することを示せ。定理を用いる場合、その定理を (省略せずに) 書け。

(4) $\{a_n\}$ の極限を求めよ。その値に収束することの根拠も書け。

4. 関数の極限の定義 (ε-δ 論法を用いるもの) を書き、それに基づき以下のことを示せ。

(a) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ とするとき、$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0.$

(b) $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$ とするとき、$\displaystyle\lim_{x\to 1}g(x)=1.$

5. 次の極限を調べよ (収束・発散のいずれかを証明し、収束する場合は極限を求める)。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

6. 講義で紹介した定理を1つ選び、その定理自体と証明を書け。

7. $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ と $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y)=x^2-x+2y^2,\quad g(x,y)=x^2+y^2$$

で定め、$K:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid g(x,y)\leq 1\}$ とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) f と g は連続関数であることを示せ。

(2) K は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ。

(3) f の K 上での最大値と最小値を求めよ。

1. (1) $\{a_n\}$ を実数列, a を実数とする。$\{a_n\}$ が a に収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。 (2) $(\forall a > 0)$ $(\forall b > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $Na > b.$ (3) ε を任意の正数とする。アルキメデスの公理より、ある自然数 N が存在して、$N \cdot \varepsilon > 1.$ ゆえに $\dfrac{1}{N} < \varepsilon.$ $n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

以上より $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$ ■

2.

(1) (i) $(\forall x \in A)$ $x \leq S.$

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists x \in A)$ $x > S - \varepsilon.$

((3) で使うことを考えると、x の代わりに y という文字を使って書いた方が分かりやすいかも。そうすると、

(i′) $(\forall y \in A)$ $y \leq S.$

(ii′) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists y \in A)$ $y > S - \varepsilon.$

となる。)

(2) (a) $(\forall x \in -A)$ $x \geq L.$

(b) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists x \in -A)$ $x < L + \varepsilon.$

(3) S が A の上限であるとすると、(i′), (ii′) が成り立つ。$L := -S$ とおく。このとき (a), (b) が成り立つことを示す。

(a) x を $-A$ の任意の元とすると、$(\exists y \in A)$ $x = -y.$ (i′) より $y \leq S.$ ゆえに $x = -y \geq -S = L.$

(b) ε を任意の正数とする。(ii′) より $(\exists y \in A)$ $y > S - \varepsilon.$ このとき $x = -y$ とおくと、$x \in -A$ かつ $x = -y < -S + \varepsilon = L + \varepsilon.$ これは (b) が成り立つことを示している。

ゆえに L は $-A$ の下限である。 ■

3.

(1)

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5, \\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2 \cdot 2}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1.4166666666 \cdots \fallingdotseq 1.41667, \\
a_4 &= \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{2}{a_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2 \cdot 12}{17}\right) = \frac{577}{408} = 1.41421568 \cdots = 1.41422.
\end{aligned}$$

(2) まず目で見て帰納法で $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. 相加平均と相乗平均の関係から、$a_{n+1} \geq \sqrt{a_n \cdot \dfrac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$. ($少していねいに考えると、$a_{n+1} > \sqrt{2}$ が分かるが、それは必要ない。) ゆえに $n \geq 2$ であれば、$a_n \geq \sqrt{2}$. ゆえに $n \geq 2$ のとき

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a_n} - a_n\right) = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

より $a_n \geq a_{n+1}$.

(3) 「下に有界な単調減少数列は収束する」という定理がある。数列 $\{a_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少で下に有界 $(\because a_n > 0)$ であるから、収束する。ゆえに数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ とするとき、$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ で $n \to \infty$ とすると、$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$. これから $a^2 = 2$. $a_n > 0$ より $a \geq 0$ であるから、$a = \sqrt{2}$. すなわち $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. ■

4. $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $A \in \mathbb{R}$ とするとき、$\lim_{x\to a} f(x) = A$ であるとは、

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

(a) ε を任意の正数とするとき、$\delta := \varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x - 0| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|f(x) - 0| = |x - 0| < \delta = \varepsilon$$

より

$$|f(x) - 0| < \varepsilon.$$

ゆえに $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(b) ε を任意の整数とするとき、$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\right\}$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x - 1| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|x| = |x - 1 + 1| \leq |x - 1| + 1 \leq 1 + 1 = 2.$$

$$\left|x^2 + x + 1\right| \leq |x|^2 + |x| + 1 \leq 2^2 + 2 + 1 = 7,$$

$$|g(x) - 1| = \left|x^3 - 1\right| = \left|(x-1)(x^2 + x + 1)\right| = |x - 1|\left|x^2 + x + 1\right| \leq \delta \cdot 7 < \varepsilon.$$

ゆえに $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$.■

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ を出題するつもりが、間違えた。

(1) 任意の実数 k に対して、$y = kx$ に沿った極限を求める。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot kx}{\sqrt{x^2 + (kx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{|x|\sqrt{1 + k^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{k|x|}{\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

ゆえに極限がもし存在すれば、それは 0 である。そこで

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0\right| = |x|\sqrt{\frac{y^2}{x^2 + y^2}} \leq |x|\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} \leq |x| \to 0 \quad ((x, y) \to (0, 0))$$

ゆえに $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

(2) $|\sin\theta| \le 1$ であるから、

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \blacksquare$$

7.

(1) $f(x,y)$, $g(x,y)$ は 2 変数 x, y の実係数多項式であるから、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。

(2) K は有界である。実際、$R := 1$ とおくと、$(x,y) \in K$ ならば、

$$|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{g(x,y)} \le \sqrt{1} = 1 = R.$$

また $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続であるから、$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \le 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(3) まず f の極値を求める。$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 4y \end{pmatrix}$ であるから、$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (1/2, 0)$. Hesse 行列は

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

で、これは $(1/2,0)$ で正値であるから、f は $(1/2,0)$ で狭義の極小値 $f(1/2,0) = 1/4 - 1/2 + 0 = -1/4$ を取る。

K の境界 ∂K での f の最大値、最小値を求めよう。∂K 上の点 (x,y) は $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と書けるので、

$$f(x,y) = f(\cos\theta,\sin\theta) = \cos^2\theta - \cos\theta + 2\sin^2\theta = 2 - \cos^2\theta - \cos\theta = 2 - (\cos\theta + 1/2)^2.$$

$\cos\theta = -1/2$ のとき最大値 $9/4$, $\cos\theta = 1$ のとき最小値 0.

K は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であり、f は K で連続であるから Weierstrass の最大値定理によって、f の K 上の最大値、最小値が存在する。

f が K の内点で最大値を取るならば、それは f の $\mathbb{R}^2$ における極大値であるが、それは存在しないので、f は K の内点では最大値を取らず、境界 ∂K 上で最大値を取る。それは ∂K 上の最大値になるので、$9/4$ である。$x = -1/2$, $y = \pm\sqrt{1-x^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f が K の内点 (x,y) で最小値を取るならば、それは f の $\mathbb{R}^2$ における極小値であるので、$(x,y) = (1/2,0)$, $f(1/2,0) = -1/4$. 一方、f が境界 ∂K 上で最小値を取るならば、それは ∂K 上の最小値になるので、0 である。$0 > -1/4$ であるから、0 は最小値になりえない。ゆえに $(x,y) = (1/2,0)$ のとき、f は最小値 $-1/4$ を取る。$\blacksquare$