数学解析 第9回

～ 多変数関数の極限・連続性 (第3回), 極限の存在 (第1回) ～

桂田 祐史

2021年6月14日

目次

本日の内容&連絡事項

- 緊急事態宣言が 6 月 20 日までに解除された場合、明治大学はレベル 1 に戻るので、次回 (6 月 21 日) は対面授業を行う。
- 対面授業に戻った場合も、在宅受講配慮者や、体調不良などの理由でやむを得ず欠席した人向けのオンライン講義資料は提供する。対面授業に出席しなくとも、対面授業から 1 週間以内にすべての動画を視聴すれば出席したと認める。
- 本日の授業内容
  多変数関数の極限の応用として、微分に関する各種条件の関係について解説する (講義ノート [1] の §4.8)。その後、数列の極限の存在の話 ([1] §5) に移る。ここは区間縮小法、中間値の定理、$\mathbb{R}$ の完備性、Bolzano-Weierstrass の定理、⋯と有名な定理が盛り沢山である。
- 本日は宿題関係は (解説も新しい宿題も) なしです。

4.7 ∞ のからむ lim

(これはざっと見るだけにする。「数列のとき、1変数関数のときと大体同じ」と納得してもらえれば十分である。)

4.7 ∞ のからむ lim

(これはざっと見るだけにする。「数列のとき、1 変数関数のときと大体同じ」と納得してもらえれば十分である。)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とする時

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x-a| < \delta) \quad f(x) > U,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall L \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x-a| < \delta) \quad f(x) < L$$

と定義する。

4.7 ∞ のからむ lim

(これはざっと見るだけにする。「数列のとき、1 変数関数のときと大体同じ」と納得してもらえれば十分である。)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とする時

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x-a| < \delta) \quad f(x) > U,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall L \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x-a| < \delta) \quad f(x) < L$$

と定義する。

例えば次の定理が成り立つ (証明は各自に任せる)。

命題 9.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とするとき、以下の (1), (2) が成り立つ。

1. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ であれば、$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$
2. $(\forall x \in \Omega)\ f(x) > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$ であれば $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$

4.7 ∞ のからむ lim　$|x| \to \infty$

多次元では $x \to \infty$ や $x \to -\infty$ は意味を持たないが、$|x| \to \infty$ を考えることはある。

4.7 ∞ のからむ lim　$|x| \to \infty$

多次元では $x \to \infty$ や $x \to -\infty$ は意味を持たないが、$|x| \to \infty$ を考えることはある。

Ω は $\mathbb{R}^n$ の非有界な部分集合, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{R}^m$ とするとき

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in \Omega : |x| > R) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Cf. 複素関数 $f(z)$ についての $\displaystyle\lim_{z \to \infty} f(z)$

4.8 偏微分、全微分, C^1 級 (超特急の復習)

4.8 偏微分、全微分, C^1 級 (超特急の復習)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (開集合については後述)、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

4.8 偏微分、全微分, C^1 級 (超特急の復習)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (開集合については後述)、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

- $\boldsymbol{a} \in \Omega$, $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で x_j について**偏微分可能**であるとは、極限

$$\boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}$$

が存在することをいう ($\boldsymbol{e}_j$ は第 i 成分が δ_{ij} に等しいベクトル)。

4.8 偏微分、全微分, C^1 級 (超特急の復習)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (開集合については後述)、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

(i) $\boldsymbol{a} \in \Omega$, $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で x_j について**偏微分可能である**とは、極限

$$\boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}$$

が存在することをいう ($\boldsymbol{e}_j$ は第 i 成分が δ_{ij} に等しいベクトル)。

(ii) $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が Ω で x_j について**偏微分可能である**とは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で x_j について偏微分可能であることをいう。

4.8 偏微分、全微分, C^1 級 (超特急の復習)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (開集合については後述)、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

(i) $\boldsymbol{a} \in \Omega$, $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で x_j について**偏微分可能である**とは、極限

$$\boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}$$

が存在することをいう ($\boldsymbol{e}_j$ は第 i 成分が δ_{ij} に等しいベクトル)。

(ii) $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が Ω で x_j について**偏微分可能である**とは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で x_j について偏微分可能であることをいう。

(iii) $\boldsymbol{f}$ が Ω で C^1 **級** (連続的微分可能) であるとは、任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が Ω で x_j について偏微分可能であり、偏導関数 $\Omega \ni \boldsymbol{x} \mapsto \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ が Ω で連続なこと、すなわち次式が成り立つことをいう。

$$(\forall \boldsymbol{a} \in \Omega) \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right| = 0\right).$$

(iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能**であるとは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}=0$$

が成り立つことをいう。このとき、A を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。

(iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能**であるとは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$

が成り立つことをいう。このとき、A を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。

(v) $\boldsymbol{f}$ が Ω で **(全) 微分可能**であるとは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であることをいう。

4.8 偏微分、全微分, C^1 級 (超特急の復習)　続き

- (iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能**であるとは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$
が成り立つことをいう。このとき、A を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。
- (v) $\boldsymbol{f}$ が Ω で **(全) 微分可能**であるとは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であることをいう。

「C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能かつ連続」が成り立つ。

以上は既に学んだはず。

4.8 偏微分、全微分, C^1 級 (超特急の復習)　続き

- (iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能**であるとは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$

が成り立つことをいう。このとき、A を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。

- (v) $\boldsymbol{f}$ が Ω で **(全) 微分可能**であるとは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であることをいう。

「C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能かつ連続」が成り立つ。

以上は既に学んだはず。

3 つの lim が出て来るが、(i) は 1 変数関数の極限、(iii) と (iv) は多変数関数の極限 (どちらも 0 になるかどうかが問題) である。

4.8 偏微分、全微分, C^1 級 (超特急の復習)　続き

- (iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能**であるとは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}=0$$
が成り立つことをいう。このとき、A を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。
- (v) $\boldsymbol{f}$ が Ω で **(全) 微分可能**であるとは、任意の $\boldsymbol{a}\in\Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であることをいう。

「C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能かつ連続」が成り立つ。

以上は既に学んだはず。

3 つの lim が出て来るが、(i) は 1 変数関数の極限、(iii) と (iv) は多変数関数の極限 (どちらも 0 になるかどうかが問題) である。

実際には、関数が全ての変数につき偏微分可能であり、それら偏導関数が連続であること (C^1 級) を確かめることによって、全微分可能であることが分かる、というのが多い。

5 極限の存在

　ここまでは、数列・点列の極限についての定理といっても、収束するという条件が仮定の中に入っていることが多かった。例外は「上に有界な単調増加数列は収束する (極限が存在する)。」という定理である。

5 極限の存在

ここまでは、数列・点列の極限についての定理といっても、収束するという条件が仮定の中に入っていることが多かった。例外は「上に有界な単調増加数列は収束する (極限が存在する)。」という定理である。

これ以降は、数列・点列の極限が存在する (収束する)」ことがテーマとなる定理が多い。

5.1 区間縮小法

極限の存在を示すために、次の定理はとても使いやすい。

5.1 区間縮小法

極限の存在を示すために、次の定理はとても使いやすい。

定理 9.2 (区間縮小法 (the nested intervals theorem))

$\{a_n\}$ は単調増加数列、$\{b_n\}$ は単調減少数列で、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le b_n$$

が成り立つとき、次の (1),(2) が成立する。

1. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は収束し、極限をそれぞれ A, B とするとき
$$A \le B \quad \text{かつ} \quad [A, B] \subset [a_n, b_n].$$
(ただし $A = B$ の場合もこめて、$[A, B] \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid A \le x \le B\}$ とする。)
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であれば、$A = B$ (つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$).

5.1 区間縮小法　証明の前に解説

$I_n := [a_n, b_n]$ とおくと、I_n は閉区間であり、

$$\{a_n\} \text{ が単調増加かつ } \{b_n\} \text{ が単調減少} \Leftrightarrow I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

区間は縮小する (正確には大きくならない) が、共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [A, B]$ であり、空集合にはならない、という定理である。

念のため数理リテラシーの復習: $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in I_n\}.$

5.1 区間縮小法　証明の前に解説

$I_n := [a_n, b_n]$ とおくと、I_n は閉区間であり、

$$\{a_n\} \text{ が単調増加かつ } \{b_n\} \text{ が単調減少} \Leftrightarrow I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

区間は縮小する (正確には大きくならない) が、共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [A, B]$ であり、空集合にはならない、という定理である。

念のため数理リテラシーの復習: $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in I_n\}.$

ここで閉区間という条件は重要である。例えば $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ のとき、

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

であるが、

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset.$$

もし $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ であれば、

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}.$$

証明　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \le b_n \le b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界であり、また単調増加数列でもあるので、収束する。$\{a_n\}$ の極限を A とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le A.$$

証明　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \le b_n \le b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界であり、また単調増加数列でもあるので、収束する。$\{a_n\}$ の極限を A とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le A.$$

同様に $\{b_n\}$ は、下に有界な単調減少数列であるので、収束する。$\{b_n\}$ の極限を B とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad B \le b_n.$$

証明　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \le b_n \le b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界であり、また単調増加数列でもあるので、収束する。$\{a_n\}$ の極限を A とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le A.$$

同様に $\{b_n\}$ は、下に有界な単調減少数列であるので、収束する。$\{b_n\}$ の極限を B とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad B \le b_n.$$

一方、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \le b_n$ であったから、$n \to \infty$ として $A \le B$ (命題 4.4 による).

証明　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \leq b_n \leq b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界であり、また単調増加数列でもあるので、収束する。$\{a_n\}$ の極限を A とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq A.$$

同様に $\{b_n\}$ は、下に有界な単調減少数列であるので、収束する。$\{b_n\}$ の極限を B とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad B \leq b_n.$$

一方、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ であったから、$n \to \infty$ として $A \leq B$ (命題 4.4 による).

(ii) もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であれば、

$$B - A = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

であるから、$A = B$.

定理 9.3 (中間値の定理 (the intermediate value theorem))

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

定理 9.3 (中間値の定理 (the intermediate value theorem))

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

証明

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。

定理 9.3 (中間値の定理 (the intermediate value theorem))

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

証明

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。もし $f(c_0) > 0$ ならば、

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0$$

とおく。

定理 9.3 (中間値の定理 (the intermediate value theorem))

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

証明

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。もし $f(c_0) > 0$ ならば、

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0$$

とおく。またもし $f(c_0) \leq 0$ ならば

$$a_1 := a_0, \quad b_1 := c_0$$

とおく。

定理 9.3 (中間値の定理 (the intermediate value theorem))

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

証明

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。もし $f(c_0) > 0$ ならば、

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0$$

とおく。またもし $f(c_0) \leq 0$ ならば

$$a_1 := a_0, \quad b_1 := c_0$$

とおく。いずれの場合も

$$c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とおく。

(次のスライドに続く)

5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \\
&f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \le 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \le 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、$\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限 $c \in [a, b]$ に収束する。

5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \le 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、$\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限 $c \in [a,b]$ に収束する。

$a_n \to c$ であり、f は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \le 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限 $c\in[a,b]$ に収束する。

$a_n \to c$ であり、f は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

$b_n \to c$ であり、f は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \le 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限 $c \in [a, b]$ に収束する。

$a_n \to c$ であり、f は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

$b_n \to c$ であり、f は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

$f(a_n) > 0$ より $f(c) \ge 0$. $f(b_n) \le 0$ より $f(c) \le 0$. ゆえに $f(c) = 0$.
$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ であるから $c \ne a, b$. ゆえに $c \in (a, b)$.

5.2 中間値の定理

上の定理の証明中の手順は、方程式 $f(x) = 0$ の近似解を求める**二分法** (the bisection method) というアルゴリズムそのものである。

5.2 中間値の定理

上の定理の証明中の手順は、方程式 $f(x) = 0$ の近似解を求める**二分法** (the bisection method) というアルゴリズムそのものである。

中間値定理の使い方については、高校数学でもある程度以上経験があるであろう。(したがって例は省略する。)

5.2 中間値の定理

上の定理の証明中の手順は、方程式 $f(x)=0$ の近似解を求める**二分法** (the bisection method) というアルゴリズムそのものである。

中間値定理の使い方については、高校数学でもある程度以上経験があるであろう。(したがって例は省略する。)

1 変数の場合に、**連続関数の逆関数の存在・連続性は、しばしば中間値の定理を使って証明できる**。

- $f(x)=x^2$ $(x\in[0,\infty))$ の逆として、$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
- $f(x)=\sin x$ $(x\in[-\pi/2,\pi/2])$ の逆として、$f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ (主値)
- $f(x)=e^x$ $(x\in[0,\infty))$ の逆として、$f^{-1}(x)=\log x$

(詳しいことが知りたければ、講義ノート [1] の問 71 とその後の説明を見よ。)

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理**を証明する。この定理は極めて重要であるが、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理**を証明する。この定理は極めて重要であるが、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

それを使って $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^N$ の**完備性**を証明する。

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理**を証明する。この定理は極めて重要であるが、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

それを使って $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^N$ の**完備性**を証明する。

さらに **Weierstrass の最大値定理**を証明する。この辺がこの科目の山場であると言えるだろう。

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理**を証明する。この定理は極めて重要であるが、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

それを使って $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^N$ の**完備性**を証明する。

さらに **Weierstrass の最大値定理**を証明する。この辺がこの科目の山場であると言えるだろう。

定理 9.4 (Bolzano-Weierstrass の定理)

有界な数列は収束部分列を持つ。すなわち、実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x_n| \le R$$

を満たすならば

$$(\exists \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ の部分列})(\exists c \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理　部分列の例

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \cdots$$

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \cdots$$

a_n は -1 と 1 の近くに密集する。$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束しない (各自示せ)。

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理　部分列の例

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \cdots$$

a_n は -1 と 1 の近くに密集する。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しない (各自示せ)。
$n_k = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

$n_k = 2k - 1$ $(k \in \mathbb{N})$ とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \to -1 \quad (k \to \infty).$$

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \cdots$$

a_n は -1 と 1 の近くに密集する。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しない (各自示せ)。
$n_k = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

$n_k = 2k - 1$ $(k \in \mathbb{N})$ とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \to -1 \quad (k \to \infty).$$

この場合は、数列が簡単だったから定理を使わずに、収束部分列を具体的に構成できた。□

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理　問

部分列に慣れてもらいたい、ということで、クイズのような問を。

部分列に慣れてもらいたい、ということで、クイズのような問を。

クイズ

1. どんな部分列も収束しない数列の例をあげよ。
2. 有界ではないが、収束部分列を持つような数列の例をあげよ。

(解答例を、この PDF の末尾に書いておきます。)

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明　前半

$a_1 := -R$, $b_1 := R$ とおく。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in [a_1, b_1]$.
$c_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ とおくと、次のいずれかが成立する。

- (a) $x_n \in [a_1, c_1]$ となる n は無限個存在する。
- (b) $x_n \in [c_1, b_1]$ となる n は無限個存在する。

(実際、どちらも成り立たなければ、n が有限個しか存在しないという矛盾が生じる。)

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明　前半

$a_1 := -R$, $b_1 := R$ とおく。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in [a_1, b_1]$.
$c_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ とおくと、次のいずれかが成立する。

(a) $x_n \in [a_1, c_1]$ となる n は無限個存在する。

(b) $x_n \in [c_1, b_1]$ となる n は無限個存在する。

(実際、どちらも成り立たなければ、n が有限個しか存在しないという矛盾が生じる。)

(a) が成立するとき、$a_2 := a_1$, $b_2 := c_1$ とおく。
(a) が成立しないとき ((b) が成立する)、$a_2 := c_1$, $b_2 := b_1$ とおく。

どちらの場合も、$x_n \in [a_2, b_2]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明　前半

$a_1 := -R$, $b_1 := R$ とおく。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in [a_1, b_1]$.
$c_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ とおくと、次のいずれかが成立する。

- (a) $x_n \in [a_1, c_1]$ となる n は無限個存在する。
- (b) $x_n \in [c_1, b_1]$ となる n は無限個存在する。

(実際、どちらも成り立たなければ、n が有限個しか存在しないという矛盾が生じる。)

(a) が成立するとき、$a_2 := a_1$, $b_2 := c_1$ とおく。
(a) が成立しないとき ((b) が成立する)、$a_2 := c_1$, $b_2 := b_1$ とおく。

どちらの場合も、$x_n \in [a_2, b_2]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

以下同様にして (念のため自分で書いてみよう)、$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定める。

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明　後半

次の (a), (b), (c) が成り立つ。

(a) $\{a_n\}$ は単調増加数列、$\{b_n\}$ は単調減少数列である。

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n < b_n, \quad b_n - a_n = \frac{2R}{2^{n-1}}.$$

(c) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$x_n \in [a_k, b_k]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明　後半

次の (a), (b), (c) が成り立つ。

(a) $\{a_n\}$ は単調増加数列、$\{b_n\}$ は単調減少数列である。

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n < b_n, \quad b_n - a_n = \frac{2R}{2^{n-1}}.$$

(c) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$x_n \in [a_k, b_k]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

最初の二つから、区間縮小法の原理によって、ある $c \in [a, b]$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

次の (a), (b), (c) が成り立つ。

- (a) $\{a_n\}$ は単調増加数列、$\{b_n\}$ は単調減少数列である。
- (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n < b_n, \quad b_n - a_n = \frac{2R}{2^{n-1}}.$$

- (c) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$x_n \in [a_k, b_k]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

最初の二つから、区間縮小法の原理によって、ある $c \in [a, b]$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を定めよう。まず $n_1 := 1$ とおく。

$k \geq 2$ に対して、$n_1, \cdots, n_{k-1}$ まで定まったとき、$(n > n_{k-1}) \wedge x_n \in [a_k, b_k]$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ ((c) から無限個存在する) のうちで、最小のものを n_k とおく。

こうして $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を作ると、各項が自然数である狭義単調増加数列となる。ゆえに $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列である。

次の (a), (b), (c) が成り立つ。

- (a) $\{a_n\}$ は単調増加数列、$\{b_n\}$ は単調減少数列である。
- (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n < b_n, \quad b_n - a_n = \frac{2R}{2^{n-1}}.$$

- (c) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$x_n \in [a_k, b_k]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

最初の二つから、区間縮小法の原理によって、ある $c \in [a, b]$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を定めよう。まず $n_1 := 1$ とおく。

$k \geq 2$ に対して、$n_1, \cdots, n_{k-1}$ まで定まったとき、$(n > n_{k-1}) \wedge x_n \in [a_k, b_k]$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ ((c) から無限個存在する) のうちで、最小のものを n_k とおく。

こうして $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を作ると、各項が自然数である狭義単調増加数列となる。ゆえに $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列である。

$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ $(k \in \mathbb{N})$ であるから、はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. □

5.3 の問の解答例

(a) $a_n = n \ (n \in \mathbb{N})$ とすると、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は ∞ に発散する。特に収束はしない。

(b) $a_n = (1+(-1)^n)n \ (n \in \mathbb{N})$ とする。$n = 1, 2, 3, \cdots$ の順に 0, 2, 0, 4, 0, 6, $\cdots$. 有界ではないが、$n_k = 2k$ とするとき、$a_{n_k} = 0$ であるから、$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束する。

補足: 部分列の定義

意外と部分列の定義を書いてある本は少ない。この講義でもうっかりしたので、補足しておく。

定義 9.5 (部分列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{b_n\}$ が $\{a_n\}$ の**部分列** (subsequence of $\{a_n\}$) であるとは、各項が自然数である狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (つまり $(\forall k\in\mathbb{N})$ $n_k\in\mathbb{N}$ と $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$ が成り立つ) が存在して、

$$b_k = a_{n_k} \quad (k\in\mathbb{N})$$

が成り立つことを言う。

$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が各項が自然数である狭義単調増加数列とするとき、$n_{k+1}>n_k$ より $n_{k+1}\ge n_k+1$ であることと、$n_1\ge 1$ から、

$$(\sharp) \qquad (\forall k\in\mathbb{N})\quad n_k\ge k$$

が成り立つことを注意しておく。

補足: 部分列の定義

命題 9.6 (収束列の部分列は (おなじ極限に収束する) 収束列である)

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束するならば、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は a に収束する。

証明.

ε を任意の正の数とするとき、数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束することから、ある自然数 N が存在して

$$(\forall \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

このとき $k \geq N$ を満たす任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$n_k \geq k \geq N$ であるから、$n_k \geq N$. ゆえに

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

これは $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ を示している。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：数学解析, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf (2014 年〜).