

数学解析 第2回
～ 実数の性質 (第2回) ～

桂田 祐史

2021年4月19日

目次

- 1 連絡事項, 本日の内容
- 2 復習ってどうやるの
- 3 実数の性質の復習, 有界集合, 上限と下限, Weierstrass の上限公理 (続き)
 - 上界, 上に有界, 上限, \sup (続き) 最大値と上限
 - 下界, 下に有界, 下限
 - アルキメデスの公理
- 4 宿題 2
- 5 参考文献

連絡事項, 本日の内容

- 宿題1の解説をしたいところですが、まだ始まったばかりで、 \times 切は(通常より)1週間延ばすので、宿題1の解説は次回授業に回します。
- 宿題2を出します(\times 切 4/24 18:00, 2/1 18:00 までの提出を認める)。
- 宿題3以降は、出した週の土曜日 18:00 が提出 \times 切となります。
- Zoom オフィスアワーを木曜 12:30–13:30 に行ないます (4/29 はお休み)。
- 本日の内容 (桂田 [1] の §1.3 後半, §1.4, §1.5) 一口に言えば主に

上限についての基本的な命題を証明する

(ある具体的な集合の上限が何であるか示すことも含む。

例えば「 $A = [1, 3) = \{x \mid 1 \leq x < 3\}$ の上限は 3」)

- 重要な定理 (今日はあまり使わない): **Weierstrass の上限公理**
- (主に) **定義にもとづき話を進める** (ゆっくりやる、くどく感じるかも)
- 命題の証明がすべてこんなふうに来るわけではないが、こういうものが結構多く、それが出来ることは重要である。
- 「**証明してください**」に対して**フリーズしない**ようになって下さい。(出て来る言葉の定義は何か、関係しそうな定理はどんなものか、思い出そう…それは復習して下さいと言った内容。)

復習ってどうやるの (1)

前回、次のように言った。

- 復習がお勧め
- 具体的にはノート等を読み返し理解できるか**自己チェックする**
(特に**新しい言葉・記号、定理**などを頭に入れた状態で次の授業にのぞめるように)

復習しましたか？

ちょっとやってみましょう (最初だから)。

問「前回の授業で出て来た新しい言葉・記号にはどんなものがあったか？」

「Weierstrass の上限公理」、「上界」、「上に有界」、「上限」などがあった (このうち上限は出て来たけれど、まだ定義は書いていない)。

これらの**言葉の定義**、**定理の内容**が書けるでしょうか？ **例**が挙げられるでしょうか？

復習ってどうやるの (2)

最初は少し手助けする。

問「 $A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。 U が A の上界とは？」

答: $(\forall x \in A) \quad x \leq U$ (が成り立つこと).

問の部分、特に青字の部分も自分で書けるようにしよう。

問「上に有界の定義を述べよ。」

答「 $A \subset \mathbb{R}$ とする。 A が上に有界とは

$$(\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。」 (つまり A の上界が存在すること)

次は何を問うべきでしょう？

答「上限の定義を述べよ。」または「上界」、「上に有界」の例をあげること。さらに「Weierstrass の上限公理を述べよ。」 やって下さい。

復習ってどうやるの (3)

定理 1.4 (Weierstrass の上限公理)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。 A が上に有界ならば、 A の上限が存在する。

復習はこれでおしまいになります。

1.3 上界, 上に有界, 上限, sup (続き) 最大値と上限

上限と良く似た概念に最大値がある。何が同じで何が違うか理解する。

次の2つが成り立つ。

- もし A の最大値が存在すれば、それは A の上限である (後で証明)。
- 一方、 A の最大値が存在しないときにも A の上限が存在することがある。

(例えば $A = [1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ は最大値を持たないが、上限は3. A の上限が3であることも後で証明)

ちょっと変な言い方だけれど、上限の方が最大値よりも存在しやすい。

1.3 上界, 上に有界, 上限, sup 最大値とは? 定義を学ぶ

$A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ とする。 M が A の最大値であるとは?

次の2条件が成り立つとき、 M は A の最大値であるという。

Ⓐ $(\forall x \in A) x \leq M.$

Ⓑ $M \in A.$

(A の最大値を $\max A$ と表す。 $M = \max A$ ということ。)

$A = \{1, 2, 3\}$, $M = 3$ とするとき、 (i), (ii) が成り立つ。

($\because x \in A$ とすると、 $x = 1$ または $x = 2$ または $x = 3$. いずれも $x \leq 3 = M$ を満たす。また $M = 3 \in A$ が成り立つ。)

$A = [1, 3)$, $M = 3$ とするとき、 (i) は成り立つが、 (ii) は成り立たない。
(この A の最大値は実は存在しない。)

1.3 上界, 上に有界, 上限, sup 上限の定義

一言でいうと「上限とは、上界のうちで最小のもの」。

定義 2.1 (上限)

$A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。 S が A の **上限** (supremum) であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことをいう。

(i)

$$(\forall x \in A) \quad x \leq S.$$

(つまり S は A の上界である。)

(ii)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) \quad S - \varepsilon < x.$$

(つまり S より小さい数は A の上界ではない。)

1.3 (続き) 上限の例

S が A の上限 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ (i) $(\forall x \in A) x \leq S$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) S - \varepsilon < x$.

例 2.2

$A = (-\infty, 3)$, $S = 3$ とするとき、 S は A の上限である。

(i) x を A の任意の要素とすると、 A の定義から $x < 3$. ゆえに $x \leq S$.

(ii) ε を任意の正の数とする。 $x := 3 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、 $x < 3$ であるから $x \in A$. また $S - \varepsilon = 3 - \varepsilon < 3 - \frac{\varepsilon}{2} = x$ であるから $S - \varepsilon < x$.

(i), (ii) より、 S は A の上限である。 □

1.3 (続き) 上限の例 (もう一つ)

例 2.3 (上の例とほとんど同じだけれど、少し手間が多い)

$A = [1, 3)$, $S = 3$ とするとき、 S は A の上限である。

証明

(i) (上と同様にできる) x を A の任意の要素とすると、 A の定義から $1 \leq x < 3$. ゆえに $x \leq S$.

(ii) (上と同様にやると...) ε を任意の正の数とする。 $x := 3 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおく。
 $S - \varepsilon < x$ であるが、 $x \in A$ とは限らない! ε が大きいと、 $x < 1$ となってしまう!

ε を任意の正の数とする。 $x := \max\{3 - \frac{\varepsilon}{2}, 1\}$ とおく。

$S - \varepsilon = 3 - \varepsilon < 3 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x$ より $S - \varepsilon < x$. また $1 \leq x < 3$ より $x \in A$.

(i), (ii) より、 S は A の上限である。 □

(別証) (ii) で ε の大ききで場合わけするという方法もある。 $\varepsilon < 1$ ならば $x := 3 - \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon \geq 1$ ならば $x := \frac{5}{2}$ とおく等。

1.3 (続き) 上界, 上に有界, 上限, sup

このスライドの内容、4/19の授業では時間がなくてカットしました。もしかすると次回にやります。

簡単な定理を2つ。

命題 2.4

上限は上界である。すなわち $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$, S が A の上限ならば、 S は A の上界である。

証明 S が A の上限であれば、定義の条件の (i) $(\forall x \in A) x \leq S$ が成り立つ。これは S が A の上界であることを意味する。 \square

命題 2.5

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とするとき、 A が上に有界 $\Leftrightarrow A$ の上限が存在する。

証明 (\Rightarrow) これは Weierstrass の上限公理という定理そのものである。
 (\Leftarrow) A の上限を S とすると、上に示したように S は A の上界である。
 A の上界が存在するので、 A は上に有界である。 \square

1.3 (続き) 上界, 上に有界, 上限, sup

(次も簡単な命題であるが、証明の仕方を見てもらうため、ゆっくり説明)

命題 2.6 (最大値は上限である)

$A \subset \mathbb{R}$ とする。 A の最大値が存在するならば、それは A の上限である。

証明するため思い出し

S が A の上限 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ (i) $(\forall x \in A) x \leq S$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) S - \varepsilon < x$.

証明するため思い出し (文字だけ換える)

M が A の上限 \Leftrightarrow (i) $(\forall x \in A) x \leq M$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) M - \varepsilon < x$.

証明 A の最大値を M とおく。 M が A の最大値であるとは、次の条件が成り立つことである (前回説明した)。

- Ⓐ $(\forall x \in A) x \leq M$.
- Ⓑ $M \in A$.

上限の定義の条件 (i) は (a) により満たされる。

上限の定義の (ii) について: ε を任意の正の数とする。 $x := M$ とおくと、(b) より $x \in A$. そして $M - \varepsilon < M = x$ より $M - \varepsilon < x$. □

1.4 下界, 下に有界, 下限

「上」を「下」に変えて、^{かかい}下界 (a lower bound), 下に有界 (bounded from below), ^{かげん}下限 (the infimum) という言葉が定義される (おおざっぱに言って、大小を逆にするだけ、あるいは数直線上で表したとき左右を逆にする)。

$A \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ とする。 L が A の下界であるとは、 $(\forall x \in A) x \geq L$ が成り立つことをいう。

$A \subset \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$ とする。 l が A の下限であるとは

- ❶ $(\forall x \in A) x \geq l$. (すなわち l は A の下界)
- ❷ $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) l + \varepsilon > x$.

(l は A の下界のうちの最大値だから、 l を少しでも大きくした $l + \varepsilon$ は A の下界でなくなる)

上限公理から次の定理が導かれる (証明は手ごろな問題…今日の宿題)。

定理 2.7 (下に有界な空でない集合は下限を持つ)

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ とする。 A が下に有界ならば A の下限が存在する。

1.3, 1.4 記号 sup, inf

4/19 の授業でこのスライドの内容説明し忘れてました。次回やります。

定義 2.8 (上限、下限を表す記号 sup, inf)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。

$$\sup A := \begin{cases} A \text{ の上限} & (A \text{ が上に有界のとき、つまり } A \text{ の上限が存在するとき}) \\ \infty & (A \text{ が上に有界でないとき}) \end{cases}$$

$$\inf A := \begin{cases} A \text{ の下限} & (A \text{ が下に有界のとき、つまり } A \text{ の下限が存在するとき}) \\ -\infty & (A \text{ が下に有界でないとき}) \end{cases}$$

注意 A の上限や下限が存在しないときも、 $\sup A$, $\inf A$ という記号を用いるわけである。極限と \lim という記号の関係に少し似ている。(例えば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ のとき、 $\{a_n\}$ の極限は存在しない。)

細かい注意 実は上の説明はちょっと乱暴。一体 ∞ とは何だろう？二つの立場がある。(a) ∞ , $-\infty$ をきちんと導入して、 $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ で議論をする、(b) A が上に有界でないことを、 $\sup A = \infty$ と表すと約束する。(a) は手間がかかるので、ここでは (b) の立場としておく。すると、上の書き方 (∞ を $\sup A$ とおく) は少しおかしい。

1.5 アルキメデスの公理 (当たり前のようで意外に重要)

定理 2.9 (アルキメデスの公理 「チリも積もれば山より高くなる」)

$$(1) \quad (\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

証明

背理法を用いる。(1) が成り立たないとすると、ある正の数 a, b が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \leq b.$$

このとき

$$A := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$$

とおくと、 b は A の上界である。ゆえに A は上に有界である。 $A \neq \emptyset$ であるから、Weierstrass の上限公理によって、 A の上限が存在する。それを S とおく。

$\varepsilon := \frac{a}{2}$ とおくと、 $\varepsilon > 0$ である。上限の定義より、ある $x \in A$ が存在して、 $S - \varepsilon < x$ 。
 A の定義から、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $x = n_0 a$ 。このとき $y := (n_0 + 1)a$ とおくと、 $y \in A$ であり、

$$y = (n_0 + 1)a = n_0 a + a = x + 2\varepsilon > (S - \varepsilon) + 2\varepsilon = S + \varepsilon > S.$$

ゆえに $y \in A$ かつ $y > S$ であるが、これは S が A の上限であることに矛盾する (上限は上界だから)。ゆえに (1) が成り立つ。 □

1.4 アルキメデスの公理 (続き) 上限の例

例 2.10

$A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上限は 1 であることを示せ。

A の要素は小さい方から順に $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$

これで上限が 1 であることが「分かる」人もいるであろう。

証明

① x を A の任意の要素とすると、ある自然数 n が存在して、 $x = 1 - \frac{1}{n}$ 。ゆえに $x \leq 1$ 。((i) は簡単なことが多いね。問題は次の (ii) だ。)

② ε を任意の正の数とする。

アルキメデスの公理から、ある自然数が存在して $n \cdot \varepsilon > 1$ 。ゆえに $\varepsilon > \frac{1}{n}$ 。ゆえに $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$ 。 $x := 1 - \frac{1}{n}$ とおくと、 $x \in A$ かつ $1 - \varepsilon < x$ 。

(i), (ii) から 1 は A の上限である。 □

実は、有名な $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ の証明もこれに近い (後日解説)。 …意外に重要 !!

宿題 2

締め切り 4月24日(土) 18:00.

解答を A4 サイズの PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。

問題文は

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/toi2.pdf>
にあります (Oh-o! Meiji のレポート課題 2)。

出題のねらい: 上限、下限について、定義に基づいた議論が出来るようになる

PDF ファイルは、どのような方法で作成しても構わない。詳しいことは
「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf

参考文献

- [1] 桂田祐史：数学解析, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年～).