

正多角形板の Chladni 図形

明治大学大学院 先端数理科学研究科

現象数理学専攻 博士前期課程 2年

遠藤 小欽

指導教員：桂田 祐史

2016 年 2 月 12 日

目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	Chladni 図形とは	1
1.2	研究の歴史的背景	1
1.3	本論文の目的	2
1.4	本論文の概要	3
第 2 章	数学的準備	4
2.1	モデル方程式–薄い板の振動の Kirchhoff-Love モデル–	4
2.2	モデル方程式の無次元化	4
2.3	モデル方程式の導出	5
2.3.1	エネルギー汎関数	5
2.3.2	境界条件に現れる導関数と部分積分公式	6
2.3.3	停留条件の部分積分	8
2.3.4	微分方程式と境界条件の導出	10
2.3.5	固有値問題と弱形式	11
2.3.6	固有振動数 f_n	12
2.4	二面体群と平面図形の対称性	12
第 3 章	正方形領域の Chladni 図形に関する先行研究	14
3.1	Chladni	14
3.2	Rayleigh	15
3.3	Ritz	15
3.4	Waller	16
3.5	平野	19
3.6	小釜	20
第 4 章	正多角形領域の Chladni 図形の数値解析	21
4.1	数値実験の目的	21
4.2	数値計算のアルゴリズム	21
4.3	計算の工夫– D_n 対称 mesh 分割	22
4.4	対称性を持つ節線パターンの構成	23
4.5	計算結果による Chladni 図形の規則性	24

第 5 章	アルミニウム板の振動実験	27
5.1	振動実験	27
5.2	実験結果	28
5.2.1	正方形板	29
5.2.2	正五角形板	30
5.2.3	正六角形板	30
5.2.4	考察と結果	32
第 6 章	謝辞	34
付 録 A	プラスチック板の実験結果	37
付 録 B	プログラム	40
B.1	D_n 対称 mesh	40
B.2	FreeFem++ で Kirchhoff-Love モデルの数値計算	44
付 録 C	blend された正方形・正五角形・正六角形の節線パターン	46

第1章 はじめに

1.1 Chladni 図形とは

Chladni 図形とはドイツの物理学者であった Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827) によって見出されたものである。砂や塩などの粒子が撒かれている平らな板を考えると、この板を振動させ、特定の周波数で板が大きく振動し、粒子が美しい幾何学的図形を描くことがある。このように得られた図形を発見者の名に因んで Chladni 図形という。

この大きく振動している状態の板は、いわゆる共鳴によって固有振動をしていると考えられるが、固有振動には節と呼ばれる振動しない場所があり、粒子がそこに集まってパターンが浮かび上がったと考えられる。即ち、Chladni 図形とは、物体の固有振動 (特定の振動数の振動) の節を可視化したものである。

1.2 研究の歴史的背景

板の振動を表す偏微分方程式は、フランスの女性数学者である Sophie Germain (1776-1831) により導かれたが、導出の過程が若干曖昧であった。その後、Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) により、板の振動を表す偏微分方程式の詳しい導出過程が与えられた。また、境界条件として、板を枠にはめた場合 (clamped edge) や板の縁が何にも触れない場合 (free edge) などの方程式を導いた ([6])。現在では、板の振動を表す偏微分方程式は Kirchhoff-Love モデルと呼ばれている。この問題に Fourier の方法を適用したとき、導かれる固有値問題が解ければ、その固有値と固有関数を用いて解 w を表すことができる。ところが、領域が円盤であれば、厳密解を求めることができるが、それ以外の領域の場合には、厳密解を求めることができないため、近似解を求めることになる。

そこで、正方形領域の場合に、John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh (1842-1919) は板の固有関数を自由な棒の固有関数を用いて近似することを試みたが、残念ながら簡単な固有関数の場合を除けば、成功しなかった ([11])。1909 年に Walter Ritz (1878-1909) は、今日では彼の名を冠して Ritz の方法と呼ばれる画期的な近似法を提示し、自由な棒の固有関数を用いて Kirchhoff-Love モデルの固有関数近似に成功した ([12])。さらに、Ritz は正方形膜と正方形板に現れる Chladni 図形はともに正方形の二面体群 D_4 に関する対称性を持つことから、正方形

膜の固有関数を用いて，正方形板の Chladni 図形を近似できることを発見した．

最後に，Mary Désirée Waller (1886–1959) は Chladni 図形が具体的にどのような形をしているのか，またどのような対称性を持つのかという素朴な疑問について実際に実験を行い，正方形板では Ritz の結果を確認することができた ([13])．さらに，正多角形板の Chladni 図形に対して，対称性の観点から拡張することを試みた．彼女は生涯をかけて Chladni 図形の研究に没頭し，没後 1961 年には，Chladni 図形に関する文献「Chladni figures – a study in symmetry」が出版された．

1.3 本論文の目的

本論文の目的は，free edge を持つ正多角形板の Chladni 図形の振る舞いを数学的に解析し，理解することにある．そこで，free edge を持つ Chladni 図形を板の振動を表す Kirchhoff-Love モデルから導かれる固有値問題（重調和作用素の固有値問題）に関する固有関数の節線と考えることで，数学的及び数値解析的に考察する．プラスチック板やアルミニウム板を用いて振動実験を行い，数理モデルの妥当性も合わせて検証する．モデル方程式の妥当性の検証について，多くの優れた先行研究が行われているが，その中でも正方形領域の場合を除けば，節線に注目する文献は少ない．正方形領域における節線パターンの結果を，正多角形領域に拡張できないかという問いは，素朴ではあっても，非常に自然であり，価値のある挑戦的な問いであると私は考えている．本論文では，自らの実験結果をもとに，FreeFem++ を用いた数値計算の結果と共に考察する．

本研究は，Chladni 図形の持つ美しい対称性に着目し，コンピュータを用いた数値実験と実際に行う振動実験の両面からアプローチし，Chladni 図形の解析に取り組んだ．固有値の重複度が 2 である場合，それに属する固有関数の節線が対称性を持つとは限らないが，それに属する固有関数の中で，対称性の高いものが存在する．それを選ぶことを”blend する”という（詳細は第 4 章 4 節を参照）． $S(N)$ により N の持つ対称性全体を表す．数値計算の結果から，次の命題が成り立つと予想される．

正 n 角形板の Chladni 図形の対称性

$n \geq 3$ の整数とする．

(1) 任意の節線 blend されたパターン N に対して， n の約数 ℓ ($\ell < n$) であって， $S(N) = D_\ell$ を満たすものが存在する．特に， n が偶数ならば， ℓ も偶数である．

(2) n が奇数ならば， n の任意の約数 ℓ ($\ell < n$) に対して， $S(N) = D_\ell$ となる節線パターン N が存在する．

(3) n が偶数ならば， n の任意の偶数の約数 ℓ ($\ell < n$) に対して， $S(N) = D_\ell$ となる節線パターン N が存在する．

1.4 本論文の概要

第2章では，本論文の用語について説明し，板の振動の数理モデルを紹介する．また，その数理モデルを無次元化することにより，周波数 f と固有値 λ の関係について言及する．

第3章では，正方形領域における Chladni 図形の先行研究について紹介する．

第4章では，FreeFem++を用いた数値計算を行うため，必要な準備として弱形式とメッシュ分割について説明し，その計算結果を用いて，正 n 角形領域における Chladni 図形の対称性に関する規則性を提示する．

第5章では正方形・正五角形・正六角形のアルミニウム板で振動実験を行い，その結果を考察する．

第2章 数学的準備

2.1 モデル方程式—薄い板の振動の Kirchhoff-Love モデル—

時刻 t の点 (x, y) のおける板の変位を $z = z(x, y, t)$ とすると, 板の振動を表す微分方程式は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, y, t) = -D\Delta^2 z(x, y, t) \quad \Omega \times (0, \infty) \quad (2.1)$$

$$\mu\Delta z + (1 - \mu)\frac{\partial^2 z}{\partial \mathbf{n}^2} = 0 \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Delta z + (1 - \mu)\frac{d}{ds}\frac{\partial^2 z}{\partial \tau \partial \mathbf{n}} = 0 \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (2.3)$$

$$\text{角の点で}\frac{\partial^2 z}{\partial \tau \partial \mathbf{n}}\text{の2つの片側極限が等しい} \quad (2.4)$$

$$z(x, y, 0) = \phi(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad (2.5)$$

で与えられる. ここで

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad D = \frac{Eh^2}{12\rho(1 - \mu^2)}$$

であり, Ω は板の占める領域, s は境界 $\partial\Omega$ に沿ったの弧長, $\frac{\partial}{\partial \tau}$ は接線方向の微分, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ は外向き法線方向の微分を表す. ただし, E はヤング率, h は板の厚さ, ρ は密度, μ はポアソン比とする.

2.2 モデル方程式の無次元化

Ω が正多角形領域の場合を考える. Ω の外接円の半径を L , α を後で定める定数として

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{t} = \alpha t, \quad \bar{z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = z(x, y, t)$$

と変数変換すると

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{L}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \alpha\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}$$

となるので

$$\Delta^2 z = \frac{1}{L^4}\Delta^2 \bar{z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{t}^2}$$

が得られる．これらを式 (2.1) に代入すると

$$\frac{D}{\alpha^2 L^4} \Delta^2 \bar{z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} = 0.$$

となる．そこで， $\alpha = \frac{\sqrt{D}}{L^2}$ とおくと

$$\Delta^2 \bar{z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} = 0.$$

である．よって

$$\alpha = \frac{h}{2L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}}$$

であって

$$\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{t}^2}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = -\Delta^2 \bar{z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \quad \tilde{\Omega} \times (0, \infty) \quad (2.6)$$

$$\mu \Delta \bar{z} + (1-\mu) \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \mathbf{n}^2} = 0 \quad \partial \tilde{\Omega} \times (0, \infty) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Delta \bar{z} + (1-\mu) \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \tau \partial \mathbf{n}} = 0 \quad \partial \tilde{\Omega} \times (0, \infty) \quad (2.8)$$

$$\text{角の点で } \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \tau \partial \mathbf{n}} \text{ の 2 つの片側極限が等しい} \quad (2.9)$$

$$\bar{z}(\bar{x}, \bar{y}, 0) = \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}(\bar{x}, \bar{y}, 0) = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.10)$$

を得る．ここで， $\tilde{\Omega} := \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid (L\bar{x}, L\bar{y}) \in \Omega\}$ ．

2.3 モデル方程式の導出

本節では，Rayleigh の著書 [11] に記載された Kirchhoff-Love モデルの導出過程をまとめておく．

2.3.1 エネルギー汎関数

S が u のグラフ $z = u(x, y)$ と表されているとき，S が持つ弾性エネルギーは

$$V = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \frac{(\Delta u)^2 - 2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx dy$$

である．ただし

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

とする．そこで，微小変形を仮定し，次の汎関数で近似する．

$$V[u] := D \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(\Delta u)^2 + (1 - \mu)(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}) \right] dx dy \quad (u \in H^2(\Omega)). \quad (2.11)$$

このとき， $u, v \in H^2(\Omega)$ に対して

$$V[u + v] - V[u] - V[v] = D \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] dx dy$$

となる．よって

$$V[u + v] - V[u] - V[v] = 2V[u, v]$$

である．

次に， $f \in L^2(\Omega)$ について， J を次のように定義する．

$$J(u) := V[u] - \iint_{\Omega} f u dx dy.$$

このとき， $u, v \in H^2(\Omega)$ ， $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} J(u + \varepsilon v) - J(u) &= V[u + \varepsilon v] - \iint_{\Omega} f(u + \varepsilon v) dx dy - \left(V[u] - \iint_{\Omega} f u dx dy \right) \\ &= V[u + \varepsilon v] - V[u] - \varepsilon \iint_{\Omega} f v dx dy \\ &= 2V[u, \varepsilon v] - V[\varepsilon v] - \varepsilon \iint_{\Omega} f v dx dy \\ &= 2\varepsilon V[u, v] + \varepsilon^2 V[v] - \varepsilon \iint_{\Omega} f v dx dy \\ &= \varepsilon \iint_{\Omega} \{ D[\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] - f v \} dx dy + \varepsilon^2 V[v] \end{aligned}$$

が成り立つ．

2.3.2 境界条件に現れる導関数と部分積分公式

この小節では，文字 t は時刻でなく，曲線のパラメーターを表すことにする．

u が高い微分可能性を持つと仮定する．領域 Ω の境界が滑らかであるとき， $\partial\Omega$ 上の各点 $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$ に対して，外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ が定まり， $\mathbf{t} := (t_1, t_2) = (-n_2, n_1)$ は正の向き of 単位接線ベクトルである．

\mathbf{a} を原点とし， \mathbf{n}, \mathbf{t} 方向の座標軸をもつ “ $\xi\eta$ 平面” を導入する．変数変換の式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{a} + \xi \mathbf{n} + \eta \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

となる．逆変換は

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

である． f は $\tilde{\Omega}$ の近傍で滑らかな関数とする．ここで

$$\tilde{f}(\xi, \eta) := f(\mathbf{a} + \xi \mathbf{n} + \eta \mathbf{t}) + f(\alpha + \xi n_1 - \eta n_2, \beta + \xi n_2 + \eta n_1) \quad (2.14)$$

とおくと

$$\tilde{f}_\xi = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} := n_1 \frac{\partial f}{\partial x} + n_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \tilde{f}_\eta = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} := t_1 \frac{\partial f}{\partial x} + t_2 \frac{\partial f}{\partial y} = -n_2 \frac{\partial f}{\partial x} + n_1 \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.15)$$

となる．つまり

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

である．これを逆向きに解けば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} \end{pmatrix}.$$

即ち

$$f_x = n_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} - n_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}, \quad f_y = n_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} + n_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} \quad (2.16)$$

が得られる．高階導関数を計算すると

$$u_{\xi\xi} = n_1^2 u_{xx} + 2n_1 n_2 u_{xy} + n_2^2 u_{yy} \quad (2.17)$$

$$u_{\eta\eta} = n_2^2 u_{xx} - 2n_1 n_2 u_{xy} + n_1^2 u_{yy} \quad (2.18)$$

$$u_{\xi\eta} = -n_1 n_2 u_{xx} + (n_1^2 - n_2^2) u_{xy} + n_1 n_2 u_{yy} \quad (2.19)$$

となる．

Proposition 2.3.1. 区分的に滑らかな曲線 C の始点，終点を a, b とするとき

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial \eta} ds = f(b) - f(a) \quad (2.20)$$

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial \eta} g ds = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_C f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds \quad (2.21)$$

が成り立つ．

Proof. まず

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial \eta} ds = \int_C \text{grad } f \cdot \mathbf{t} ds = \int_C \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = f(b) - f(a)$$

である．また，積の微分法

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \eta}g + f \frac{\partial g}{\partial \eta}$$

により

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}g + f \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) ds = \int_C \frac{\partial}{\partial \eta}(fg) ds = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

を得る．

□

Corollary 2.3.2. 閉曲線 $C : \mathbf{r} = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) が区分的に滑らかと仮定する．即ち， $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ が存在して，各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ に制限したとき， φ が滑らかである．このとき

$$\int_C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} ds = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j-}) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j+}) \right) v(p_j) - \int_C \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \eta^2} v ds \quad (2.22)$$

が成り立つ．但し， $p_j = \varphi(t_j)$ であって

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j-}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\varphi(t_j - \varepsilon)), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j+}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\varphi(t_j + \varepsilon))$$

とする．

Proof. $C_j = [t_{j-1}, t_j]$ とおくと， C_j は滑らかであるので

$$\begin{aligned} \int_{C_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} ds &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} v \right]_{p_{j-1}}^{p_j} - \int_{C_j} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \eta^2} v ds \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j-})v(p_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j-1+})v(p_{j-1}) - \int_{C_j} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \eta^2} v ds \end{aligned}$$

である．従って

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} ds &= \sum_{j=1}^n \int_{C_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} ds \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j-})v(p_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j+})v(p_{j-1}) - \int_{C_j} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \eta^2} v ds \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j-}) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_{j+}) \right) v(p_j) - \int_C \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \eta^2} v ds \end{aligned}$$

である．

□

2.3.3 停留条件の部分積分

Proposition 2.3.3 (停留条件の部分積分公式). 領域 Ω が滑らかな境界を持つとき, $\bar{\Omega}$ の近傍で十分滑らかな u, v に対して

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) - fv] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\Delta^2 u - f)v dx dy - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta u + (1 - \mu)u_{\eta\eta\xi} \right) v ds + \int_{\partial\Omega} (\mu\Delta u + (1 - \mu)u_{\xi\xi}) \frac{\partial v}{\partial \xi} ds \end{aligned}$$

が成り立つ. 正多角形領域のように, 境界 $\partial\Omega$ が区分的に滑らかな場合には

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) - fv] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\Delta^2 u - f)v dx dy - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta u + (1 - \mu)u_{\eta\eta\xi} \right) v ds + \int_{\partial\Omega} (\mu\Delta u + (1 - \mu)u_{\xi\xi}) \frac{\partial v}{\partial \xi} ds \\ & \quad + (1 - \mu) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_j^-) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_j^+) \right) v(p_j) \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. Green の公式

$$\iint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \xi} - g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) ds$$

に $f = \Delta u, g = v$ を代入すると

$$\iint_{\Omega} \Delta u \Delta v dx dy = \iint_{\Omega} (\Delta^2 u)v dx dy + \int_{\partial\Omega} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \xi} ds - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta u \right) v ds$$

を得る. 一方で

$$2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{xy}v_y - u_{yy}v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_{xy}v_x - u_{xx}v_y)$$

であるから, Gauss の発散定理

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} f n_j ds$$

より

$$\iint_{\Omega} (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) dx dy = \int_{\partial\Omega} [(u_{xy}v_y - u_{yy}v_x)n_1 + (u_{xy}v_x - u_{xx}v_y)n_2] ds$$

である. ここで, 右辺に

$$v_x = n_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} - n_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad v_y = n_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} + n_1 \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

を代入して, $\frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}$ について整理すると

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ (2n_1n_2u_{xy} - n_2^2u_{xx} - n_1^2u_{yy}) \frac{\partial v}{\partial \xi} + [-n_1n_2(u_{xx} - u_{yy}) + (n_1^2 - n_2^2)u_{xy}] \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} ds \end{aligned}$$

となる．よって

$$\iint_{\Omega} (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(-u_{\eta\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + u_{\eta\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds$$

を得る．故に

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) - fv] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx dy + \int_{\partial\Omega} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \xi} ds - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta u \right) v ds + (1 - \mu) \int_{\partial\Omega} \left(-u_{\eta\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + u_{\eta\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds - \iint_{\Omega} f v dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\Delta^2 u - f) v dx dy + \int_{\partial\Omega} (\Delta u - (1 - \mu)u_{\eta\eta}) \frac{\partial v}{\partial \xi} ds - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta u \right) v ds + (1 - \mu) \int_{\partial\Omega} \left(u_{\eta\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds \end{aligned}$$

が成り立つ．

境界 $\partial\Omega$ が滑らかな場合は, 右辺の最後の項を

$$\int_{\partial\Omega} \left(u_{\eta\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds = - \int_{\partial\Omega} u_{\eta\xi\eta} v ds = - \int_{\partial\Omega} u_{\eta\eta\xi} v ds$$

と変形して結論を得る．

また, 境界 $\partial\Omega$ が区分的に滑らかな場合は, 右辺の最後の項が

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(u_{\eta\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (p_{j-}) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (p_{j+}) \right) v(p_j) - \int_{\partial\Omega} u_{\eta\xi\eta} v ds \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (p_{j-}) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (p_{j+}) \right) v(p_j) - \int_{\partial\Omega} u_{\eta\eta\xi} v ds \end{aligned}$$

となり, 結論を得る． □

2.3.4 微分方程式と境界条件の導出

Z を単位質量あたりに働く外力とすると, 板の振動問題においては, 仮想仕事の原理から, 各時刻において, 試験関数 v に対して

$$\delta V - \iint_{\Omega} Z \rho h v dx dy - \iint_{\Omega} \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} v dx dy = 0 \quad (2.23)$$

となる．変分 δV は

$$\delta V = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \iint_{\Omega} [\Delta z \Delta v + (1-\mu)(2u_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] dx dy$$

である．そこで

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

とおき，式 (2.23) に代入し，Proposition 2.3.3 を用いて変形すると

$$\begin{aligned} 0 = & \iint_{\Omega} \left(D\Delta^2 z - Z + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) v dx dy - D \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta z + (1-\mu)z_{\eta\eta} \right) v ds \\ & + D \int_{\partial\Omega} (\mu\Delta z + (1-\mu)z_{\xi\xi}) \frac{\partial v}{\partial \xi} ds \\ & + D(1-\mu) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}(p_j^-, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}(p_j^+, t) \right) v(p_j) \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる．

このことは任意の試験関数 v に対して成立するので

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -D\Delta^2 z + Z \quad ((x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty)), \quad (2.25)$$

$$\mu\Delta z + (1-\mu)z_{\xi\xi} = 0 \quad ((x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)), \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta z = (1-\mu)z_{\eta\eta} = 0 \quad ((x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)), \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}(p_j^-, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}(p_j^+, t) \quad (0 \leq j \leq n-1, t > 0) \quad (2.28)$$

を得る．

2.3.5 固有値問題と弱形式

板の振動の方程式の初期値・境界値問題 (2.6)–(2.10) に Fourier の方法を適用すると，次の固有値問題

$$\Delta^2 u = \lambda u \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (2.29)$$

$$\mu\Delta u + (1-\mu)u_{\eta\eta} = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega), \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta u + (1-\mu)u_{\eta\eta} = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega), \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_j^-) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(p_j^+) \quad (1 \leq j \leq n-1) \quad (2.32)$$

が導かれる．固有値 λ に属する固有空間

$$E(\lambda) = \{ \phi \mid \phi \text{ は (2.29)–(2.32) を満たす} \}$$

の次元が1であるとき, λ は単純 (simple) であるといい. 次元が2以上であるとき, λ が縮重 (重複) しているという. 特に次元が2であるとき, λ は2重 (double) であるということにする. また, 固有関数 ϕ に対して

$$N(\phi) = \{(x, y) \in \bar{\Omega} \mid \phi(x, y) = 0\}$$

とおき, これを ϕ の節線という.

式 (2.29) に試験関数 v をかけて Ω で積分し, Proposition 2.3.3 を用いると

$$\begin{aligned} 0 = & V[u, v] - \lambda \iint_{\Omega} uv dx dy - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta z + (1 - \mu) z_{\eta\eta\xi} \right) v ds \\ & + \int_{\partial\Omega} (\mu \Delta z + (1 - \mu) z_{\xi\xi}) \frac{\partial v}{\partial \xi} ds \\ & + (1 - \mu) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} (p_j^-, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} (p_j^+, t) \right) v(p_j) \end{aligned}$$

式 (2.30)–(2.32) を代入すると

$$V[u, v] = \lambda \iint_{\Omega} uv dx dy$$

を得る. こうして, 弱形式

$$\iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] dx dy - \lambda \iint_{\Omega} uv dx dy = 0 \quad (v \in H^2(\Omega)) \quad (2.33)$$

を得る.

2.3.6 固有振動数 f_n

領域 $\tilde{\Omega}$ における固有値問題の解 λ_n, φ_n ($n = 1, 2, 3, \dots, 0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 \leq \dots$) を用いると

$$\bar{z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \sum_n (a_n \cos \sqrt{\lambda_n \bar{t}} + b_n \sin \sqrt{\lambda_n \bar{t}}) \varphi_n(\bar{x}, \bar{y})$$

と表すことができる. 従って

$$z(x, y, t) = \sum_n (a_n \cos \alpha \sqrt{\lambda_n t} + b_n \sin \alpha \sqrt{\lambda_n t}) \varphi_n\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}\right).$$

である. 第 n 固有振動の固有振動数 f_n は $2\pi f_n = \alpha \sqrt{\lambda_n}$ より

$$f_n = \frac{\alpha \sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{4\pi \sqrt{3(1 - \mu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} \quad (2.34)$$

となる.

2.4 二面体群と平面図形の対称性

二面体群 D_n

R を中心の周りの $\frac{2\pi}{n}$ だけ回転させる変換, S を y 軸に関する鏡映変換, I を恒等変換としたとき

$$D_n = \{I, R, R^2, \dots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, \dots, R^{n-1}S\}$$

とおく. $n \geq 3$ のとき, D_n は正 n 角形の合同変換群となることが知られている. 本論文では, 中心を原点とする単位円に内接し, $(0,1)$ が頂点の1つとなる正 n 角形を考える. また, ℓ が n の約数であるとき, D_ℓ は D_n の部分群とみなすことができる. 実際, $r = \frac{n}{\ell}$, $R' = R^r$ とおくと, $\{I, R', R'^2, \dots, R'^{\ell-1}, S, R'S, R'^2S, \dots, R'^{\ell-1}S\}$ は D_n の部分群であり, D_ℓ と同型である.

対称性

N を平面図形とする. このとき, N が $P \in D_n$ を対称性を持つとは, $P(N) = N$ が成り立つことをいう. また, $\forall P \in D_n$ を対称性を持つとき, N は D_n 対称性を持つということにする.

固有関数の節線の対称性

Proposition 2.4.1. Ω を正多角形領域, λ, u を固有値問題 (2.29)–(2.32) の解とすると, ϕ を固有値 λ に属する固有関数とすると, 任意の $P \in D_n$ に対して, $\psi(x, y) := \phi(P(x, y))$ とおくと, ψ も λ に属する固有関数である.

Proof. $\phi \neq 0$ を固有値 λ に属する固有関数とすると, Δ は合同変換に関して不変であることから, $\Delta^2\phi = \lambda\phi$ である. そこで, この両辺に $P \in D_n$ を施すと, $(\Delta^2\phi) \circ P = (\lambda\phi) \circ P$ となる. このとき, $\psi := \phi \circ P$ とおくと

$$\Delta^2\psi = \lambda\psi$$

である. 境界条件の方程式も同様に不変である. 従って, ψ も λ に属する固有関数である. □

Corollary 2.4.2. *Simple* な固有値 λ に属する固有関数 ϕ の節線は, 任意の $P \in D_n$ に対して不変である.

Proof. $P \in D_n$ とする. $\psi := \phi \circ P$ とおくと, Proposition.2.4.1 より, ψ も λ に属する固有関数である. また, $\dim E(\lambda) = 1$ より, $\psi = c\phi$ となる実数 c が存在する. 固有関数よ

り $\psi \neq 0$ であるから, $c \neq 0$. 従って, $N(\phi) = N(\psi)$ を得る. ゆえに, $N(\phi)$ は任意の $P \in D_n$ に関して不変である.

□

第3章 正方形領域の Chladni 図形に関する 先行研究

本論文は，正方形領域の結果の拡張を目標に，正多角形領域の Chladni 図形について解析している。Kirchhoff-Love モデルは円盤領域以外の領域の場合には，厳密解を求めることができないため，近似解を求めることに帰着される．正方形領域の場合には，Ritz により近似解が与えられている．さらに，Ritz と Waller はその節線パターンの対称性についての規則性をも見出している．

3.1 Chladni

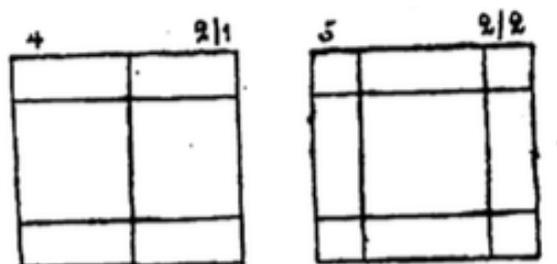


図 3.1: 節線パターン $2|1$ と $2|2$ ([1])

Chladni は正方形板の場合に，様々な実験を行い，多くのスケッチを残している．また，Chladni は節線パターンに対して，図形的特徴から求めた 2 つの整数 m, n を用いた記号 $m|n$ を対応させた．図 3.1 のように節線が格子状の場合には， m, n は各軸に平行な格子線の本数である．また，図 3.2 の右のパターンのように格子状でない場合にも記号を対応させている．現状では，格子状でない部分の m, n の読み取り方については，完全に解読出来てはいない．恐らく同じ音高に対応する節線パターンであるため， $4|3$ という記号に対応させたのであろう．

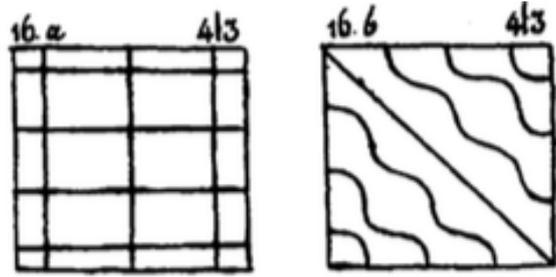


図 3.2: 節線パターン $4|3$ と $4|3$ ([1])

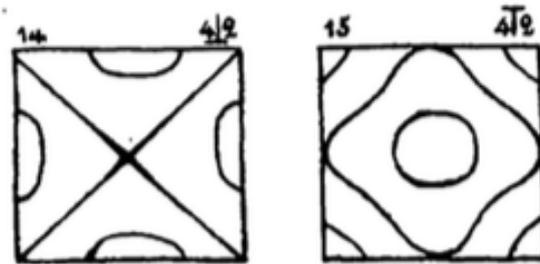


図 3.3: 節線パターン $4|2$ と $4|2$ ([1])

図 3.3 の 2 つの節線パターンに対し, $m = 4, n = 2$ と読み取った. その読み取り方の詳細は分からないが, Waller の論文 [13] によると, これらの音高は異なり, 右の節線パターンの音高の方が高い. そこで, Chladni は音の高い方を $\overline{m|n}$, 音の低い方を $\underline{m|n}$ で表すことにしている.

これらの記号 $\underline{m|n}, \overline{m|n}$ は後ほど紹介する Ritz の w'_{mn}, w_{mn} と Waller の $m|n-, m|n+$ に対応している.

3.2 Rayleigh

Rayleigh は著書 [11] で自由な縁を持つ正方形板 $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ の固有関数 u を長さ 2 の自由な棒の固有関数 $u_m(x) (x \in (-1, 1); m \geq 0)$ を用いて近似しようと試みたが, 基本振動数の近くのモードでしか成功できなかった.

3.3 Ritz

Ritz は, その後 Ritz の方法と呼ばれることになった方法を用いて数値計算を行った. 近似関数は $\sum_{m,n=0}^s a_{mn} u_m(x) u_n(y)$ の形を採用している. Chladni は [1] の中で正方形板の材質を明記していないが, Ritz は音高のデータから, Chladni はガラス板で実験したと判断し, ガラスのポアソン比 $\mu = 0.225$ を用いて計算した. その結果, 次の 3 つの関数

- $w_m = u_m(x)u_m(y)$ ($m \geq 1$)
- $w'_{mn} = u_m(x)u_n(y) - u_n(x)u_m(y)$ ($m > n \geq 0$)
- $w_{mn} = u_m(x)u_n(y) + u_n(x)u_m(y)$ ($m > n \geq 0$)

で十分良く近似できる．そこで， w_m, w'_{mn}, w_{mn} に対応する板の固有関数を W_m, W_{mn}^-, W_{mn}^+ とおくと

$$\mathcal{P} := \{W_m\}_{m \geq 0} \cup \{W_{mn}^-\}_{m > n \geq 0} \cup \{W_{mn}^+\}_{m > n \geq 0}$$

は正方形板の固有関数からなる完全系となる．

実は， W_m, W_{mn}^+, W_{mn}^- の節線の対称性について次の結果がある．

—— Ritz の結果 – 正方形板の Chladni 図形が持つ対称性 ——

- (1) W_m の節線パターンは D_4 対称性を持つ．
 - (2) m, n が共に偶数，または共に奇数であるとき， W_{mn}^+, W_{mn}^- の節線パターンは D_4 対称性を持つ．
 - (3) m, n のどちらか一方が偶数，他方が奇数であるとき， W_{mn}^+, W_{mn}^- の節線パターンは D_2 対称性を持つが， R を対称性に持たないため， D_4 対称性を持たない．
- (1), (2) に対応する固有値は単純 (simple)， $\Lambda_{mn}^- < \Lambda_{mn}^+$ であり，(3) に対応する固有値は 2 重 (double)， $\Lambda_{mn}^- = \Lambda_{mn}^+$ である．

さらに，Ritz は節線パターンを 5 つのクラスに分類した．

3.4 Waller

M. D. Waller は写真や周波数の測定など「現代的な」手法を取り入れ，Chladni 図形の再現実験を，特に対称性の高い領域，例えば，円盤領域，長方形領域，正方形領域などで行い，それらの節線パターンについて規則性を見出そうとした．本節では特に正方形における主な結果を紹介する．

Waller は Chladni の実験スケッチを図 3.4 のように並べ替え，自らの結果も同様に図 3.5 のようにまとめた．

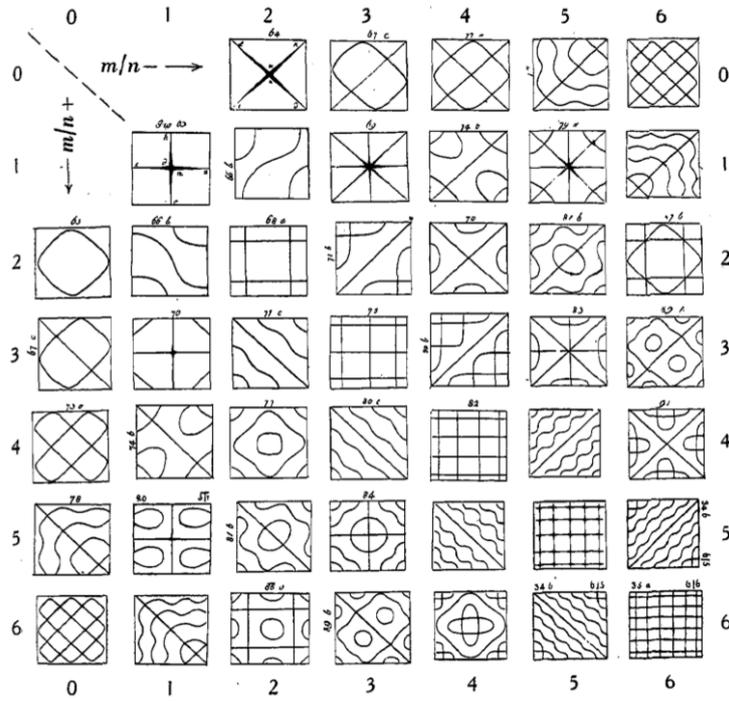


図 3.4: Waller にアレンジされた Chladni によるスケッチ

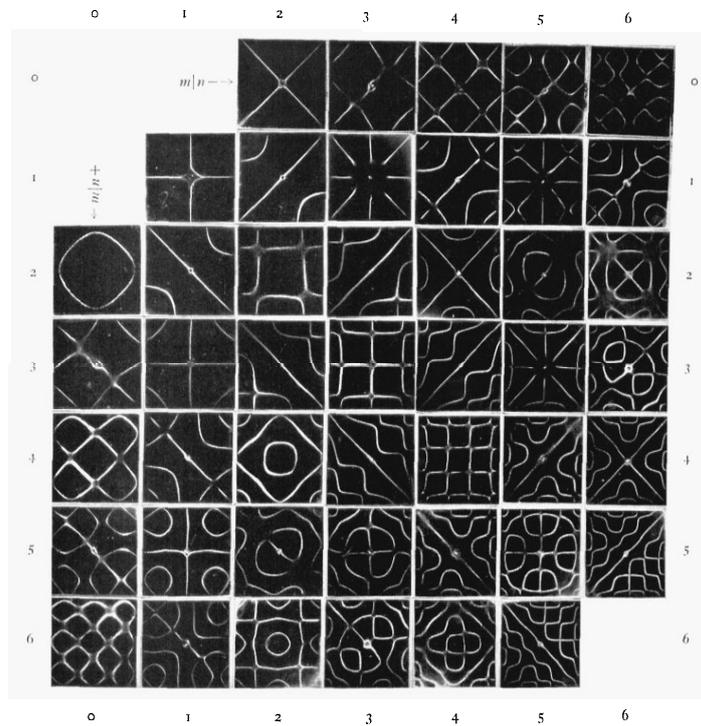


図 3.5: Waller の実験結果 (真鍮板, $\mu = 0.333$)

クラス分け

Waller は、節線パターンを次の7つのクラスに類別した。

- (Class 1) ($m|m, m$: 奇数) 中心が節, 記号 $+$
- (Class 2) ($m|m, m$: 偶数) 中心が腹, 記号
- (Class 3) ($m|n-, m, n$: 奇数) 二本の対角線と二本の中線 (米の形をしている), 記号
- (Class 4) ($m|n-, m, n$: 偶数) 二本の対角線のみ (Xの形をしている), 記号 \times
- (Class 5) ($m|n+, m, n$: 奇数) 二本の中線のみ (十の形をしている), 記号 $+$
- (Class 6) ($m|n+, m, n$: 偶数) 中心が腹, 記号
- (Class 7) ($m|n-, m|n+, m, n$: 奇数と偶数) 対角線一本のみ, 記号 $/$

表 3.1: Waller によるクラス分け

クラスの番号	m, n	m, n の偶奇	対称性	記号
1	$m = n$	奇, 奇	D_4	$+$
2	$m = n$	偶, 偶	D_4	
3	$m > n$	奇, 奇	D_4	
4	$m > n$	偶, 偶	D_4	X
5	$m > n$	奇, 奇	D_4	$+$
6	$m > n$	偶, 偶	D_4	
7	$m > n$	偶, 奇	D_2	$/$

Waller は $m = n$ と $m > n$ を区別しただけで、ほぼ Ritz と同じ分類を与えた。クラス1からクラス6では、対応する固有値が simple であり、節線パターンは $\forall P \in D_n$ に対して不変である。クラス7では、固有値は double であり、 $m|n+, m|n-$ の節線パターンの持つ対称性全体は $\{I, R^2, S, R^2S\}$ であり、これは D_2 に相当する。

各クラスの節線パターンの中心付近の様子は、Waller は $m|n-, m|n+$ 以外の記号 $+$, \times などを用いて共通の特徴を表している。

実験で得た周波数と近似計算から得た周波数の比較

Waller は実験と近似計算からそれぞれ得られた周波数の比較を行った．[13] の固有振動数を求める式

$$\lambda = \frac{192\pi^2 f^2 (1 - \mu^2) \rho}{E h^2}$$

は意味に曖昧なところがあり，正しいかどうか判断しにくい，それから導かれる

$$f = 0.6577c \frac{h}{L^2} \quad (\mu = \frac{1}{4})$$
$$f = 0.6277c \frac{h}{L^2} \quad (\mu = \frac{1}{3})$$

は，式 (2.34) と差分法による固有値の計算値を用いて導いた結果とほぼ一致している．ここで， $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ は板の素材による速度である．

表 3.2: 計算値の比較

ポアソン比 μ	Waller([13]) による計算	差分法による計算 ([5])
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	0.6716
$\frac{1}{4}$	0.6577	0.6598
$\frac{1}{3}$	0.6277	0.6415

Waller の論文 ([13]) によると，Chladni は相対周波数は $m^2 + n^2$ で近似できると結論付けたそうであるが，Waller 自身は実験の結果に基づいて， $m, n \geq 3$ の場合には，

$$\frac{3}{4}(m^2 + n^2)$$

と修正した．

3.5 平野

平野裕輝 ([5]) は，固定された縁をもつ正方形板と，自由な縁を持つ正方形板の Chladni 図形の固有値問題の差分方程式を導き，それを用いて，一边を 1280 等分した場合の固有値を小さい方から 200 個計算し，それに対応する固有関数を求めた．特に，固有値が重根 (double) である場合には，係数を適当に選んで，対称な節線パターンを描いた．

3.6 小釜

小釜燈台 ([8]) はポアソン比 μ を変えながら計算することにより，節線パターンはどのように変化するかを観察した．また，数値計算の結果から，重調和作用素の固有値問題の解はほとんど 2 重根だが，稀に 3 重根も存在することを発見した．

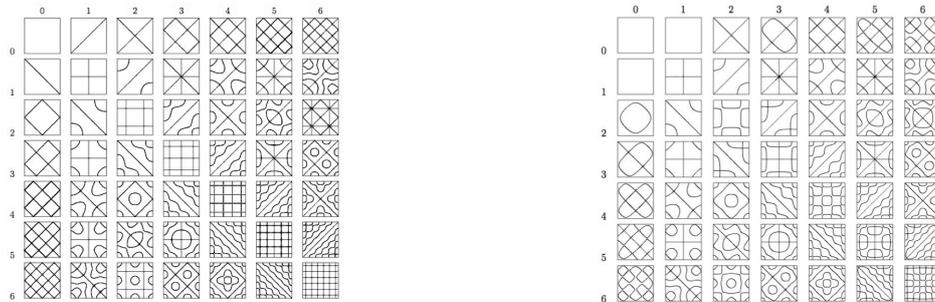


図 3.6: 膜の振動の節線パターン VS 差分法による $\mu = 0.35$ の時の板の振動の節線パターン ([8])

第4章 正多角形領域の Chladni 図形の数値解析

本章では, FreeFem++ というソフトを用いて Kirchhoff-Love モデルの固有値問題の正多角形領域の数値計算を行った. なお, 第5章の振動実験の結果と比較するため, ポアソン比 $\mu = 0.345$ とした. 対称性に関しては, 正方形領域の先行研究 [8] によると, ポアソン比によらないことが知られている. 正多角形領域 Ω は, 単位円に内接する正 n 角形とする点 $(0, 1)$ が正 n 角形の頂点の一つとなるように n 個の頂点を定めている.

4.1 数値実験の目的

数値計算の結果によると, 調和作用素とは異なり, Kirchhoff-Love モデルの固有値問題の解はほとんど simple(重複度 = 1) か, double(重複度 = 2) である. また, 重複度によって, 固有関数の節線パターンの対称性が異なる. 実際, Corollary.2.4.2 で示されたように, 固有値が simple の場合, 節線パターンは実質 1 つであり, D_n 対称性を持つ. 一方で, 重複度が 2 である場合には, その節線パターンは対称性を持つとは限らない. 正方形領域に関しては, 1 つの頂点が節となるように固有関数を選んだとき, その節線が持つ対称性は D_4 の部分群 D_2 であることが分かっている (Ritz [12], Waller [13]). 本章の目的は, 正多角形領域の場合に, Chladni 図形の対称性を数値実験により, 解析することである.

4.2 数値計算のアルゴリズム

有限要素法を用いて数値計算を行う. ここで, 弱形式は式 (2.33) を, 有限要素は Fujino-Morley 要素を用いる.

Fujino-Morley 要素とは, 重調和作用素を主な部分に含む偏微分方程式に対する有限要素であり, Morley([10]) によって提案された. Fujino-Morley 要素は定評があるので, 本研究の数値計算でも採用した. これは各要素三角形上で, x と y の 2 次多項式 (即ち $ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$) で, 各要素三角形の頂点で連続かつ辺の midpoint で法線方向の導関数が連続となるような関数からなる有限要素空間である ([7]). いわゆる非適合要素であり, Ω 全体では C^1 級どころか連続にもなっていないが, 良好な結果を与えることが経験的に知られている. 最近, 数学的正当化

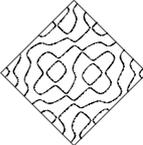
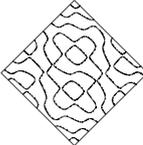
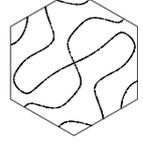
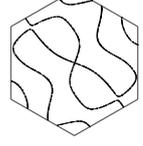
についても色々研究がなされていて，固有値問題への応用についても [2] で詳しい解析がなされている．

本論文では，正 n 角形の一辺を N 等分し，小さい順に正の固有値 $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, 200)$ とそれに対応する固有関数 u_k を計算した． $n = 3, 4, \dots, 7$ のとき， $N = 320$ とし， $n = 8, 9, \dots, 36$ のとき， $N = 160$ とした．

4.3 計算の工夫— D_n 対称 mesh 分割

FreeFem++ は領域の自動 mesh 分割機能を持っているが，それを用いて計算すると，固有値の simple, double の判定が難しくなる．実際，表 4.1 の正方形のデータは $k = 82, 83$ に対する λ_k, λ_{k+1} の近似値であり， u_k の節線が D_n 対称性を持っていないことから，重根であると考えられるが， λ_k, λ_{k+1} は互いに 5 桁しか一致していない．ところが，平野 [5] の差分法による数値計算では， λ_k, λ_{k+1} の近似値は互いに 8 桁一致していた．そのため，この FreeFem++ による近似固有値の値だけから固有値が重複しているかどうかを判定するのは難しい．この重複固有値が重複しない理由は，自動 mesh 分割の三角形分割が D_n 対称性を持たないためと考えられる（差分格子は D_n 対称であることに注意）．そこで，固有値だけで simple か double かを判断できるようにするため， D_n 対称性を持つ mesh 分割を導入してみた．

表 4.1: 自動分割 mesh を用いた計算結果

n	k	λ_k	$N(u_k)$	λ_{k+1}	$N(u_{k+1})$
4	82	162612.67		162615.17	
5	50	40298.17		40298.26	
6	26	6689.45		6689.48	

例えば，正五角形の一辺を 10 等分したとき，自動分割 mesh と D_n 対称 mesh は次のようになる．



図 4.1: $N = 10$ のときの自動分割 mesh と D_n 対称 mesh

その結果, 表 4.2 の $n = 4, k = 82$ の場合の λ_k, λ_{k+1} の近似値は 9 桁一致するようになった. それ以外の n, k に対しても 6 桁近く一致しているので, $\frac{|\lambda_k - \lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|} < 10^{-5}$ によって重根の自動判定を行った. 真の固有値が double であっても, 数値計算したものは厳密に等しくならないのは丸め誤差のためと考えられる. この重根判定法は厳密なものではないが, 今回の計算した範囲で, 固有関数の節線パターンの対称性を調べた限りでは正しく判定出来たようである.

表 4.2: D_n 対称 mesh を用いた計算結果

	k	λ_k	$N(u_k)$	λ_{k+1}	$N(u_{k+1})$
正方形	82	162687.7362		162687.7364	
正五角形	50	40306.346		40306.347	
正六角形	26	6689.675		6689.679	

4.4 対称性を持つ節線パターンの構成

固有値 λ_k が double, 即ち $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ の時, $E(\lambda_k) = \{au_k + bu_{k+1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ であるが, $\phi(0, 1) = 0$ を満たす $\phi \in E(\lambda_k)$ を選び, $N(\phi)$ を描く. $u_k(0, 1) = u_{k+1}(0, 1) = 0$ でない限り, $N(\phi)$ は unique に定まる. また, ϕ と直交する $\psi \in E(\lambda_k)$ を取り, $N(\psi)$ も描く. このようにして, $E(\lambda_k)$ から, 対称性の高い ϕ, ψ を選ぶ操作のことを固有関数の blend と呼ぶことにする.

正方形の場合， ϕ, ψ は第 3 章の w_{mn}^+, w_{mn}^- に相当している．一般の正 n 角形においても，後で見るとおり， $N(\phi), N(\psi)$ は高い対称性を持つ．

4.5 計算結果による Chladni 図形の規則性

以下では，このように blend した ϕ, ψ の節線 $N(\phi), N(\psi)$ を描いて，その対称性について，数値計算で調べてみた．simple な固有関数の持つ対称性全体は D_n であるが，逆に D_n の対称性を持つならば固有値は simple であることも成立しているようである．即ち，固有値が double の場合，対称性全体は D_n ではない．

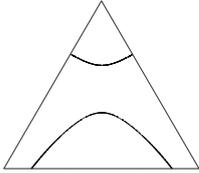
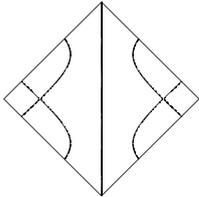
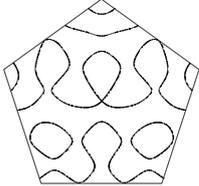
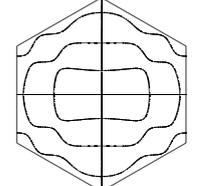
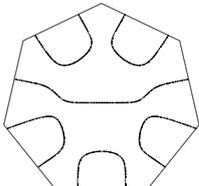
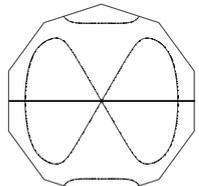
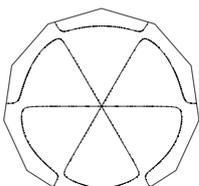
このとき， $N(\phi), N(\psi)$ は S に対し不変である． $N(\phi)$ は対称軸の y 軸を含む． $n = 3, 4, \dots, 12$ のときの double の固有関数を blend した場合のその節線の対称性は表 4.3 のようになる．

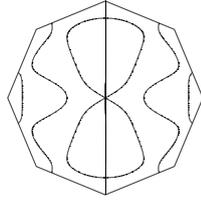
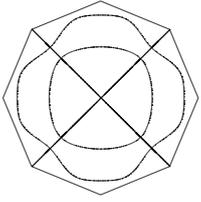
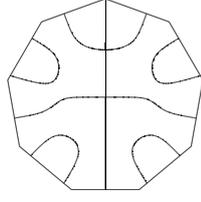
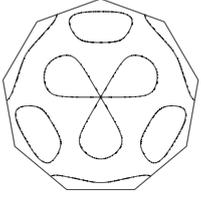
表 4.3: blend 後の節線パターンの持つ対称性

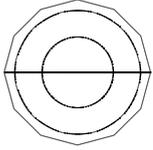
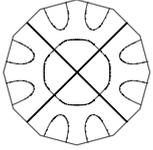
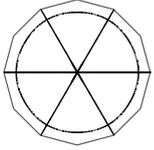
n	λ_n は double の時の対称性
3	D_1
4	D_2
5	D_1
6	D_2
7	D_1
8	D_2, D_4
9	D_1, D_3
10	D_2
11	D_1
12	D_2, D_4, D_6

$N(\phi), N(\psi)$ の対称性全体が， S を含むことを認めると， D_ℓ (ℓ は n の約数) のいずれかになることが分かる．しかし，全ての n の約数 $\ell (< n)$ に対する D_ℓ が現れるわけではない．実際， $n = 6$ のとき，全ての $N(\phi), N(\psi)$ は R^3 (180° 回転) 不変であり， D_1, D_3 は現れない．

表 4.3 のような対称性を持つ節線パターンの例は次のようになる．

n	節線パターン	持つ対称性
3		D_1
4		D_2
5		D_1
6		D_2
7		D_1
10		D_2
11		D_1

n	節線パターン	持つ対称性	節線パターン	持つ対称性
8		D_2		D_4
9		D_1		D_3

n	節線パターン	持つ対称性	節線パターン	持つ対称性	節線パターン	持つ対称性
12		D_2		D_4		D_6

結論と課題. $S(N)$ により N の持つ対称性全体を表し, 表 4.3 から, 次が成り立つと予想される.

- (1) 任意の節線 blend されたパターン N に対して, n の約数 ℓ ($\ell < n$) であって, $S(N) = D_\ell$ を満たすものが存在する. 特に, n が偶数ならば, ℓ も偶数である.
- (2) n が奇数ならば, n の任意の約数 ℓ ($\ell < n$) に対して, $S(N) = D_\ell$ となる節線パターン N が存在する.
- (3) n が偶数ならば, n の任意の偶数の約数 ℓ ($\ell < n$) に対して, $S(N) = D_\ell$ となる節線パターン N が存在する.

$n = 13, 14, \dots, 36$ についても上記が成り立つ.

この命題の数学的証明は未だ与えられていない. 今後の課題の一つとして残されている.

第5章 アルミニウム板の振動実験

板の振動を表す Kirchhoff-Love モデルの妥当性について、固有振動数（特に最小の固有振動数）については、多くの工学的な研究により理論値との比較が成されている。例えば、Leissa [9] を参照。しかし、Chladni 図形がどのような形をしているかという問いについては、先駆者の Chladni を除くと、Waller 以外に目立った研究は無いように思われる。Waller は数多くの Chladni 図形に関する実験論文を発表したが、(固有関数の節線は一意的でない) 固有値が double である場合については、どのように実験を行ったのか、論文には明記されていない。

例えば、Chladni のスケッチ図 5.1 を見ると、左の二つの図は $4|0$ を、右は $\overline{4|0}$ を表している。このとき、Waller の結果によると、これらは simple な固有値に対応するパターンであるので、一意的に定まるはずであるが、現れるパターンはそれぞれ複数個存在している。数値計算の結果は、Waller の主張を裏付けるものである。そこで、実際に実験を行い、調べ、Chladni と Waller の主張の食い違いを検証しようと考えた。

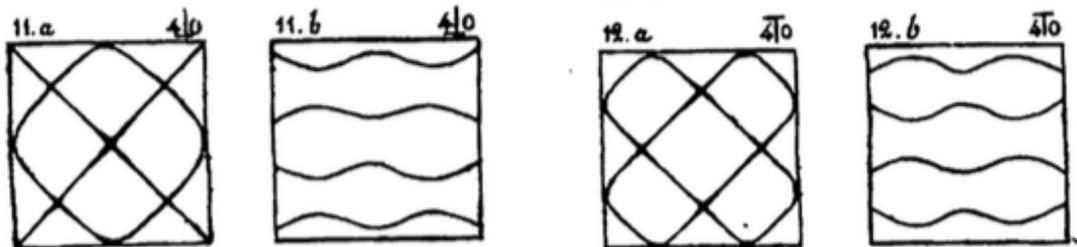


図 5.1: 節線パターン $4|0$ と $\overline{4|0}$ ([1])

本章では、以下の実験結果を紹介する。

1. 実験で得られるパターンと数値計算で得られたパターンの比較
2. 固有振動数と数値計算で求めた固有値を用いて計算した周波数との比較

5.1 振動実験

板の固有振動数とそれに対応する節線パターンについての振動実験を下記の実験器具、実験方法で行った。

実験器具

NaRiKa 製ハンディー低周波発振器 CR-T¹ , アルミニウム板 , 砂

実験方法

1. 発振器に内蔵されているスピーカーを取り出し , 水平になるように台に固定する .
2. 板をスピーカーと平行になるようにスピーカーの上に乗せ , 両面テープで軽く留める .
3. 板のバランスが崩れないよう砂を薄く , 均等に板の表面に撒く .
4. 発振器の電源を入れ , 板の表面に現れるパターンを観察する . 砂が足りない場合は少しずつ足していく .

実験の欠点

上記の実験方法には次の欠点がある .

- 板の中心を振動させているため , 中心が節となるようなパターンを作ることが出来ない .
- D_n 対称性を持つ節線パターンしか現れない . 板のバランスが保たれないため , 板の頂点を固定することが出来ない .
- 周波数が 100Hz 以下の場合 , スピーカーを固定する台が振動することがある .

5.2 実験結果

本節では , 正方形・正五角形・正六角形のアルミニウム板の実験結果と数値計算結果を比較し , 周波数と固有値の関係について考察する .

5.1 節の実験方法を用いて正多角形板で Chladni 図形の実験を行うと , 中心が腹であり , かつ D_n 対称性を持つ節線パターンしか現れなかった . しかし , 正方形を除けば , そのようなパターンの中で周波数が一番低いパターンを再現することができなかった . また , 測定する際 , ある程度の幅 (およそ $\pm 5\text{Hz}$) をもった周波数に対応するパターンが同じパターンに対応している . そこで , 一番大きく振動している (耳で聞いて音が大きい) 周波数 f を用いた .

実験で用いたアルミニウム板の情報は下記の通りである .

¹1Hz 単位で周波数を指定し , スピーカーから音を出力する機器 .

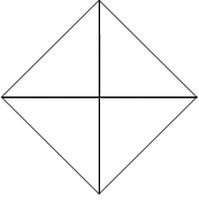
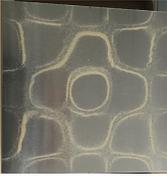
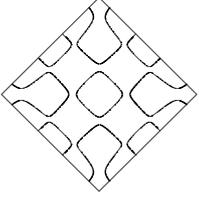
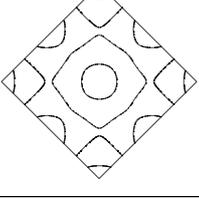
表 5.1: 用いたアルミニウム板の情報

n	一辺の長さ [mm]	厚さ [mm]	板の質量 [g]	板の理論の質量 [g]
4	300	1.0	242	243
5	249	1.0	285	288
6	212	1.0	312	315
8	162	1.0	337	344

板は正 n 角形とする．このとき，板の重さから逆算すると，実験に用いたアルミニウム板の密度は $2.65 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ となるが，実際の計算では，ヤング率は $E = 68.3 \times 10^9 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ，密度は $\rho = 2.70 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ を用いた．

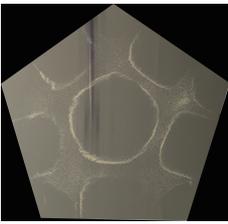
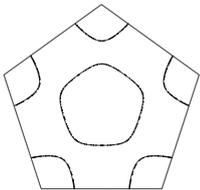
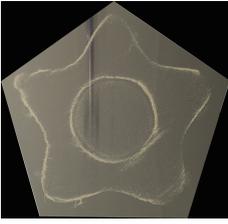
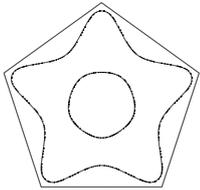
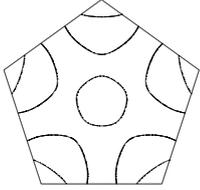
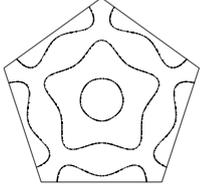
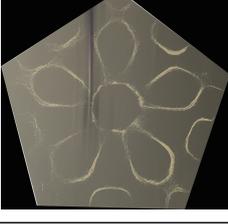
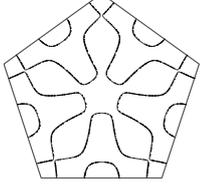
5.2.1 正方形板

表 5.3: 正方形板の実験結果と数値計算結果の節線パターンの比較

実験写真	周波数 \tilde{f}_i [Hz]	節線パターン	計算による周波数 f_{k_i} [Hz]
	57		52
	732		760
	960		939

5.2.2 正五角形板

表 5.5: 正五角形板の実験結果と数値計算結果の比較

実験写真	周波数 \tilde{f}_i [Hz]	数値計算による節線パターン	計算による周波数 f_{k_i} [Hz]
	205		204
	318		313
	533		536
	733		738
	874		889

5.2.3 正六角形板

表 5.7: 正六角形板の実験結果と数値計算結果の比較

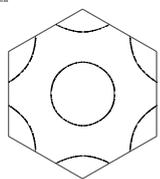
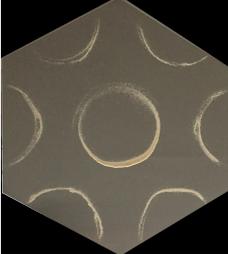
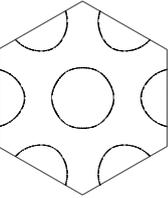
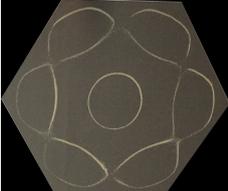
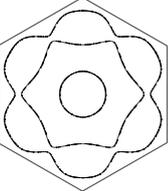
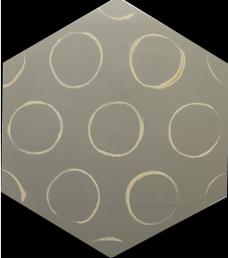
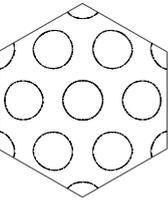
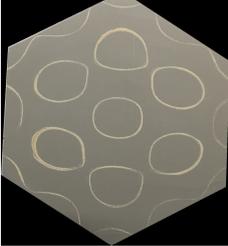
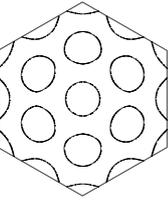
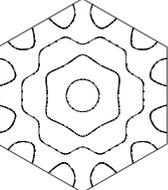
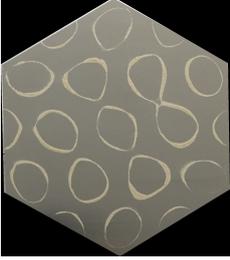
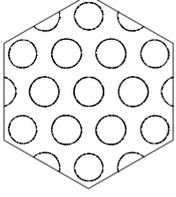
実験写真	周波数 f_i [Hz]	数値計算による節線パターン	計算による周波数 f_{k_i} [Hz]
	238		231
	320		322
	572		567
	760		764
	1020		1027
	1123		1132

表 5.7: 正六角形板の実験結果と数値計算結果の比較

実験写真	周波数 \tilde{f}_i [Hz]	数値計算による節線パターン	計算による周波数 f_{k_i} [Hz]
	1383		1385

5.2.4 考察と結果

各実験で得られた周波数を小さい順に $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_r$ と番号を付ける．モデル方程式の数値計算から算出した周波数で \tilde{f}_i に対応するものを f_i で表す． f_i に対応する固有値を λ_{k_i} とするとき，式 (2.34) より i 番目と j 番目の周波数の比はそれに対応する固有値 λ_{k_i} と λ_{k_j} の比の平方根に等しい．即ち

$$\tilde{f}_i : \tilde{f}_1 \approx f_{k_i} : f_{k_1} = \sqrt{\lambda_{k_i}} : \sqrt{\lambda_{k_1}}$$

である．

表 5.8: 正五角形板の実験結果と数値計算結果の比の比較と周波数の相対誤差

i	$\frac{\tilde{f}_i}{\tilde{f}_1}$	$\sqrt{\frac{\lambda_{k_i}}{\lambda_{k_1}}}$	$\frac{ \tilde{f}_i - f_i }{ \tilde{f}_i }$
1	1.00	1.00	0.015
2	1.55	1.53	0.022
3	2.60	2.62	0.004
4	3.58	3.61	0.003
5	4.26	4.35	0.007

表 5.9: 正六角形板の実験結果と数値計算結果の比の比較
と周波数の相対誤差

i	$\frac{\tilde{f}_i}{f_1}$	$\sqrt{\frac{\lambda_{k_i}}{\lambda_{k_1}}}$	$\frac{ \tilde{f}_i - f_i }{ \tilde{f}_i }$
1	1.00	1.00	0.027
2	1.34	1.39	0.005
3	2.40	2.45	0.009
4	3.19	3.30	0.005
5	4.29	4.43	0.007
6	4.72	4.89	0.086
7	5.81	5.98	0.001

考察. 実験では, 周波数が 1000Hz を超えると節線パターンが歪み始めた. また, 同日に実験を行うと, 周波数のズレは現れないが, 実験日を変えると, 同じパターンを再現するための周波数は元のもの比べると約 $\pm 2\text{Hz}$ のズレが生じた. その原因については不明であるが, その一つの候補として用いた板が完全な正 n 角形ではなかったことが考えられる. また, 板の中心で板を支え, 加振しているため, 板のバランスを保つことは困難である. 従って, 毎回同じ状態で実験を行うのはほぼ不可能である.

結論と課題. 実験の結果から, 中心が腹である場合の計算しか出来なかった. その場合については, 数値計算から算出した周波数は, 殆どの場合, 実際の周波数と 1% 程度の差しかなかった. これにより, アルミニウム板について, 測定できた範囲でモデル方程式と数値計算方法は妥当であると考えられるが, 重根の場合, 実験で周波数を測定できなかったため, 実際合っているか確認できなかった. 中心が節の場合の節線パターンについての実験は, 今後の課題である.

第6章 謝辞

本修士学位請求論文は，筆者が明治大学大学院先端数理科学研究科現象数理学専攻博士前期課程在学中，桂田祐史准教授の指導下に行われた研究成果をまとめたものである．本修士論文の執筆にあたり，筆者の指導教員である桂田祐史准教授に心からお礼申し上げます．桂田准教授には，学部3年次から4年間という長き間に渡って，本研究に限らず，常日頃から熱心にご指導して頂きました．

副指導教員である小川知之教授，末松 J. 信彦専任講師には，Chladni 図形の振動実験を行う上で，適切な助言を頂きました．また，本修士論文を御精読頂き丁寧なご指導を頂きました．深謝申し上げます．

最後に，筆者を暖かく見守り，惜しみない援助を続けてくれた家族や身の回りの方々に感謝申し上げます．皆様の御支援があったからこそ，勉学や研究活動に専念し，充実した学生生活を送り，ついには，本修士論文を執筆することが可能となりました．御協力頂いた皆様に深くお礼申し上げます．

参考文献

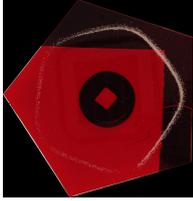
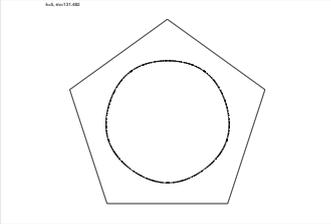
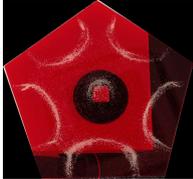
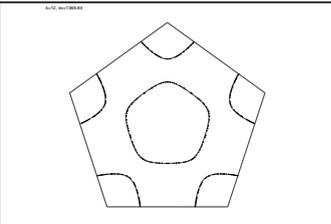
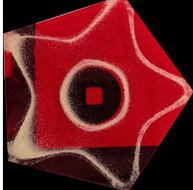
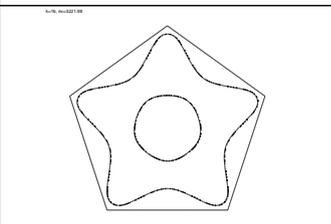
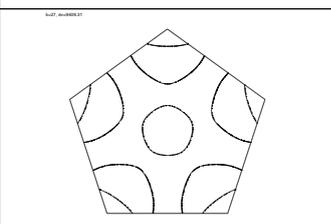
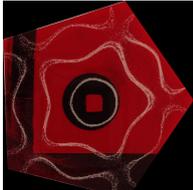
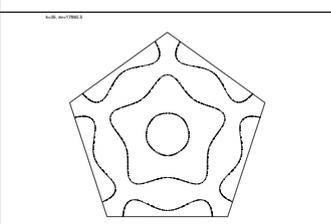
- [1] E. F. F. Chladni, *Die Akustik*, Leipzig, 1802.
- [2] D. Gallistl, *Morley finite element method for the eigenvalues of the biharmonic operator*, IMA Journal of Numerical Analysis first published online, (2014).
- [3] M. J. Gander, and F. Kwok, *Chladni figures and the Tacoma bridge: Motivating PDE eigenvalue problems via Vibrating plates*, SIAM Rev., **54 (3)** (2012), 573–596.
- [4] F. Gazzola, H.-C. Grunau, and G. Sweers, *Polyharmonic Boundary Value Problems*, Springer, 2010.
- [5] 平野裕輝, 正方形領域における重調和作用素の固有値問題–差分法によるクラドニ図形の解析–, 明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻修士学位請求論文, 2012 .
- [6] G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, Journal für die reine und angewandte Mathematik Vol.40, pp.51–88,1850.
- [7] R. C. Kirby, A. Logg, M. E. Rognes, and A. R. Terrel, *Common and unusual finite elements*, Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 84, pp. 95–119, (2012).
- [8] 小釜燈台, クラドニ図形の数値解析, 明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻修士学位請求論文, 2013 .
- [9] A. W. Leissa, *THE FREE VIBRATION OF RECTANGULAR PLATES*, Journal of Sound and Vibration, 31(3), pp. 257-293, (1973).
- [10] L. S. D. Morley, *The triangular equilibrium element in the solutions of plate bending problem*, Aero.Quart., Vol. 19, pp. 149–169, (1968).
- [11] J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound, Volume 1*, 1877.
- [12] W. Ritz, von : *Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern*, Annalen der Physik Vol. 333, Issue 4, pp. 737–786, (1909).

- [13] M. D. Waller, *Vibrations of free square plates: Part I. Normal vibrating modes*, Proceedings of Physical Society, **51** (1939).

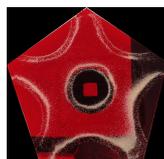
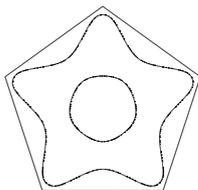
付 録 A プラスチック板の実験結果

ここでは，一辺 100mm の正五角形のプラスチック板の実験で得られたパターンを数値計算で得られたパターンと比較・考察を行う．プラスチック板からは，ヤング率やポアソン比などの情報が得られないため，主にパターンの形について考察する．

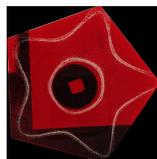
表 A.1: 正五角形プラスチック板の節線パターンと数値計算結果との比較

写真	周波数 [Hz]	節線パターン	固有値
	114		131.482
	244		1369.84
	305		3221.98
	520		9409.31
	740		17860.5

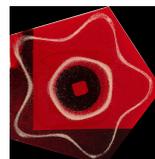
注意：図示のように，実験である程度の幅を持った周波数で得られたパターンは数値計算で同じパターンに対応することがあるため，実験での周波数は中間値を取ることとする．



272Hz



305Hz



344Hz

パターンの中に注目すると、数値計算で得られたパターンのうち、中心が腹で D_5 の対称性を持つものは実験で得られたパターンと対応するものが存在する。

また、式 (2.34) より i 番目と j 番目の周波数の比はそれに対応する固有値 λ_i と λ_j の比の平方根に等しい。即ち

$$f_i : f_j = \sqrt{\lambda_i} : \sqrt{\lambda_j} \quad (\text{A.1})$$

が成り立つ。表 A.1 の結果を用いて比を求めると、

表 A.3: 周波数の比と固有値の比の平方根の比較

周波数の比	固有値の比の平方根
1.00	1.00
2.14	3.23
2.68	4.95
4.56	8.46
6.49	11.66

ここで用いた固有値はアルミニウム板のポアソン比で数値計算したものであるが、第 5 章の結果と異なり、式 (A.1) が成り立っていないことが分かる。実験で用いたプラスチックのポアソン比が大きく異なる可能性があるという理由の一つとして考えられる。

付録B プログラム

B.1 D_n 対称 mesh

次のプログラムは FreeFem++ で読み込む mesh file を作るプログラムである。

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define n (5) //正 n 角形
#define N (80) // 一辺の長さを N 等分
//f 正 n 角形の中心を 0 周，節点からなる正 n 角形の周数
//vx 正 n 角形の頂点の x 座標
//vy 正 n 角形の頂点の y 座標
//x 節点の x 座標
//y 節点の y 座標
//k 正 n 角形を n 個の二等辺三角形に分け，その三角形の番号，ブロックと呼ぶ
//l k ブロックの何番目の節点番号または要素番号

int
main()
{
    int f,r,l,i,k,e;
    double x[N*N*(N+1)/2+2],y[N*N*(N+1)/2+2];
    int b[N+2],c[N+2][n],d[N+2];
    double vx[n+1],vy[n+1];
    double theta,pi,t;
```

```

printf("%d %d %d\n", 1+n*N*(N+1)/2, n*N*N, n*N);
// 節点につけるラベルは、内点が0, 境界は1
pi = 4.0 * atan(1.0);
theta = pi/2;
for (i=0; i<=n; i++) {
    vx[i]=cos(theta);
    vy[i]=sin(theta);
    theta -= 2*pi/n;
}

x[1] = 0;
y[1] = 0;
i = 2;
printf("%f %f 0",x[1],y[1]);
printf("\n");

b[0] = 1;
for(f = 1;f <= N;f++)
{
    b[f] = 2 + n*f*(f-1)/2;

    for(k=0;k<=n-1;k++)
    {

        for(l=0;l < f;l++)
        {
            e = 1 + k*(2*f-1) + l + n*(f-1)*(f-1);

            t = (double)l/f;
            x[i] = (1 - t)*(double)f/N*vx[k] + t*(double)f/N*vx[k+1];
            y[i] = (1 - t)*(double)f/N*vy[k] + t*(double)f/N*vy[k+1];

            if (f != N)

```

```

        printf("%f %f 0\n",x[i],y[i]);
    else
        printf("%f %f 1\n",x[i],y[i]);
    i++;
}

}

}
for (f=1;f<=N+1;f++)
{
    b[f]=2 + n*f*(f-1)/2;// f 周目の最初の節点の節点番号

    for (k = 0; k<= n-1; k++)
    {
        c[f][k]=b[f]+k*f; // f 周目の第 k ブロックの最初の節点番号
    }
}

for(k = 0;k < n-1;k++)
{
    printf("1 %d %d 0\n",3+k,2+k);
}
printf("1 2 %d 0\n",n+1);

for (f=2;f<=N;f++)
{

    for (k=0; k<=n-1; k++)
    {

        for (l=1; l<=2*f-1;l++)
        {
            r=k*(2*f-1)+l;
            e=n*(f-1)*(f-1)+r;

```

```

    if (e == n*f*f) {
        printf("%d %d %d 0\n",
            c[f-1][0], c[f][0], c[f+1][0]-1);
    }
    else if (e == n * f*f-1) {
        printf("%d %d %d 0\n",
            c[f-1][0], c[f+1][0]-1, c[f][0]-1);
    }
    else if (1 % 2 == 1) {
        printf("%d %d %d 0\n",
            c[f-1][k]+(1-1)/2,
            c[f][k]+(1+1)/2, c[f][k]+(1-1)/2);
    }
    else { // 1 が偶数
        printf("%d %d %d 0\n",
            c[f-1][k]+(1-2)/2,
            c[f-1][k]+1/2, c[f][k]+1/2);
    }
}
}
}
for (i=1; i<n*N; i++)
{
    printf("%d %d 1\n", b[N]+i-1, b[N]+i);
}

printf("%d %d 1\n", b[N]+n*N-1, b[N]);

return 0;
}

```

B.2 FreeFem++でKirchhoff-Loveモデルの数値計算

次のプログラムはFreeFem++で mesh file を読み込み，固有関数と固有値を求め，節線を描くプログラムである．

```
// BiharmonicEigenvaluesPolygon.edp
// 参考: http://ljl11.math.upmc.fr/pipermail/freemfempp/2012-March/001737.html

load "Morley"
verbosity=1;
int i;

real sigma=0.345;

mesh Th=readmesh("my5.msh"); //作った msh file を読み込む

plot(Th,wait=true,ps="mesh5.eps",bw=true);
fespace Vh(Th, P2Morley);
Vh [u,ux,uy], [v,vx,vy];

real[int] levels=[0.0];
macro lap2(u,v) (dxx(u)*dxx(v)+dyy(u)*dyy(v)+2.0*dxy(u)*dxy(v)) // EOM
varf J([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)((dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v))
  -(1-sigma)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v)));

varf K([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v);

matrix A=J(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
matrix B=K(Vh,Vh,solver=UMFPACK);

int nev=200;
real[int] ev(nev); // Stockage des valeurs propres
Vh[int] [eVu,eVux,eVuy](nev); // Stockage des vecteurs propres
```

```
int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eVu,tol=1e-10,maxit=0,ncv=0);

for (i=0;i<nev;i++) {
    cout << ev[i] << endl;

    plot(eVu[i],viso=levels,cmm=i+"th eigenfunction,
    eigenvalue="+ev[i],wait=true,ps="squareFEM/pentagon"+i+".eps",bw=true);
}
```

付録C blendされた正方形・正五角形・正六角形の節線パターン

k

正方形

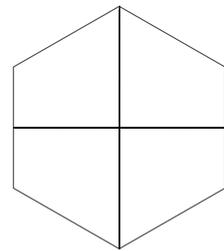
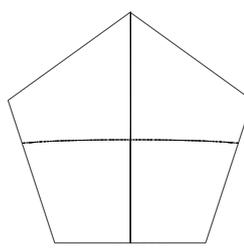
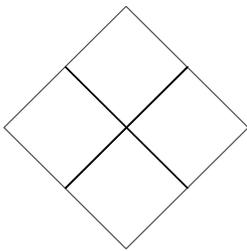
正五角形

正六角形

h3, env42.6228

h3, env44.2223

h3, env38.5276

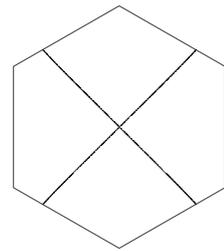
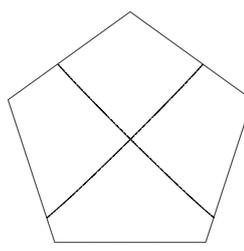
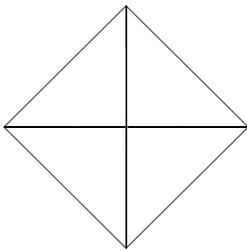


4

h4, env91.0028

h3, env44.2223

h3, env38.5276

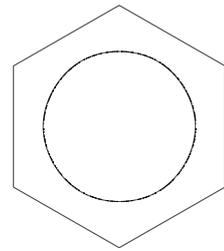
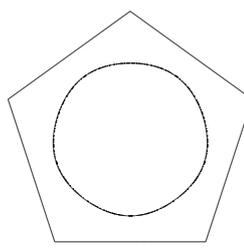
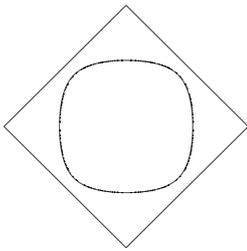


5

h5, env149.254

h5, env131.482

h5, env15.64

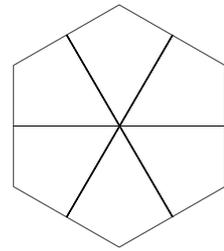
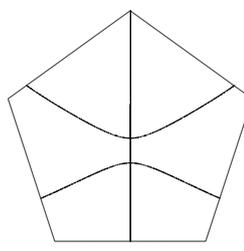
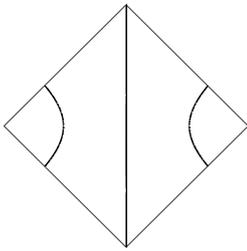


6

h6, env289.232

h6, env249.407

h6, env176.111



7

k

正方形

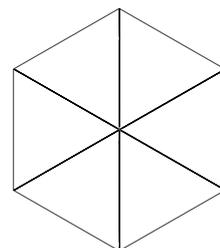
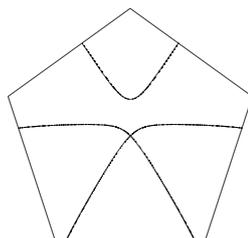
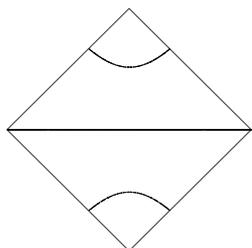
正五边形

正六角形

ku6_evo289.002

ku6_evo249.407

ku7_evo047.261

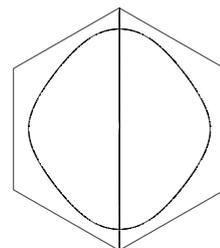
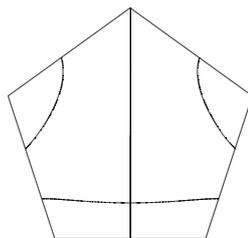
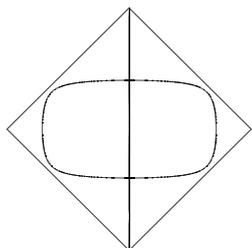


8

ku8_evo026.13

ku8_evo027.465

ku8_evo059.000

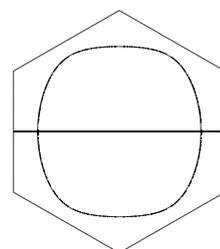
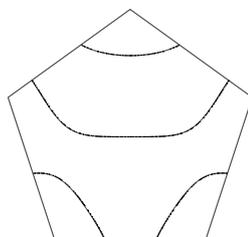
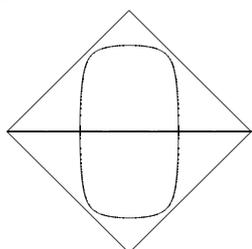


9

ku8_evo026.13

ku8_evo027.465

ku8_evo059.000

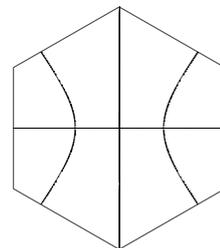
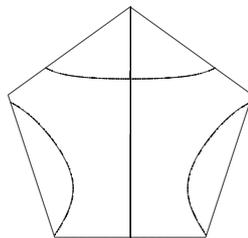
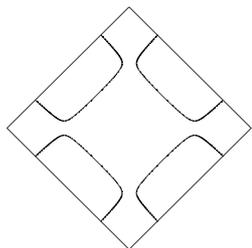


10

ku10_evo072.646

ku10_evo071.875

ku10_evo030.799

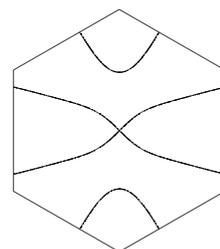
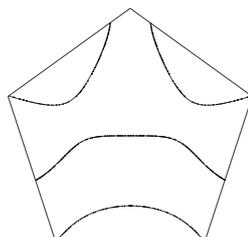
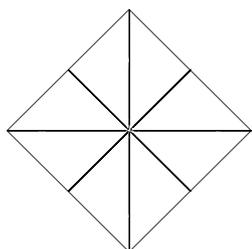


11

ku11_evo146.76

ku10_evo071.875

ku10_evo030.799

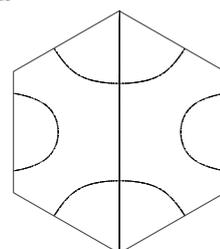
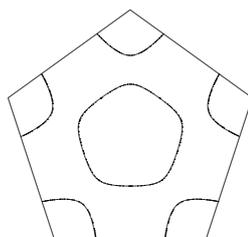
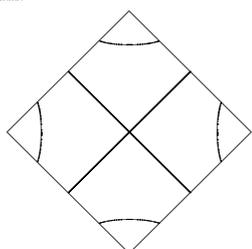


12

ku12_evo147.74

ku12_evo139.94

ku12_evo1567.2



13

k

正方形

正五角形

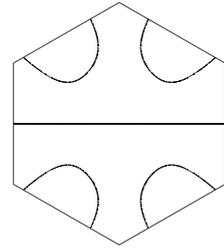
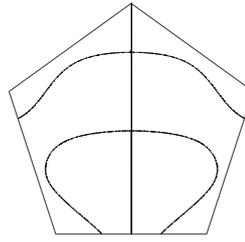
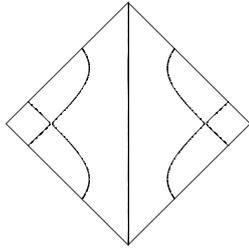
正六角形

14

ku13, en1268.54

ku13, en1874

ku12, en1567.2

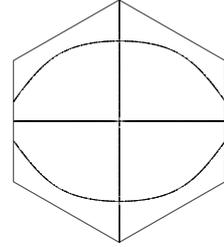
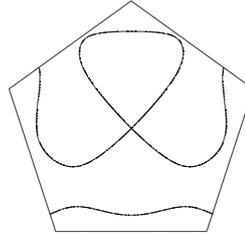
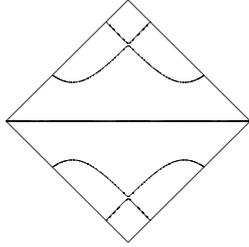


15

ku13, en1268.54

ku13, en1874

ku14, en1782.77

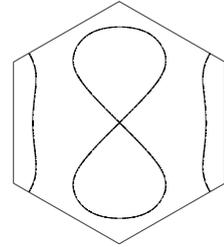
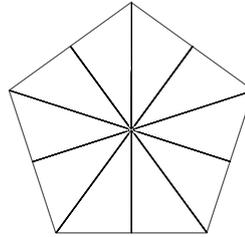
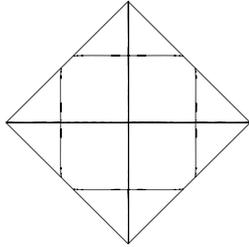


16

ku15, en1232.28

ku15, en1927.48

ku14, en1782.77

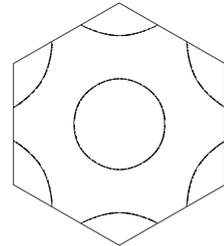
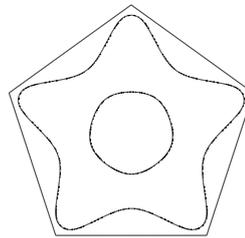
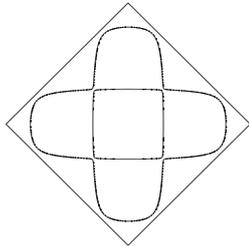


17

ku16, en1371.05

ku16, en1221.98

ku16, en1782.84

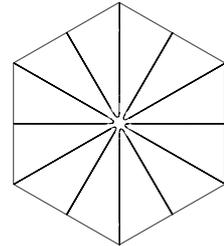
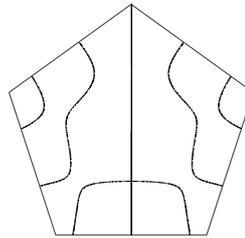
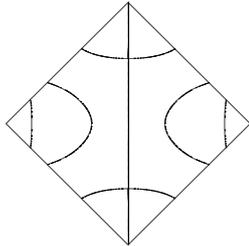


18

ku17, en1423.65

ku17, en1284.17

ku17, en1318.93

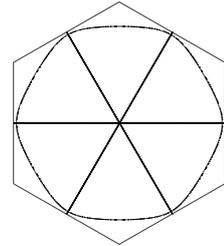
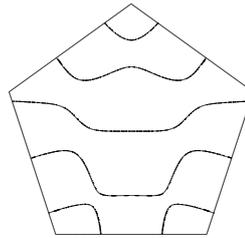
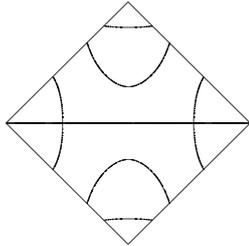


19

ku17, en1423.65

ku17, en1284.17

ku18, en1274.15



k

正方形

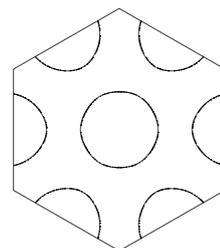
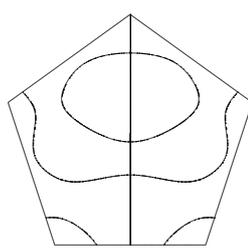
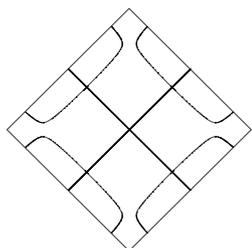
正五边形

正六角形

k19, ev1553.07

k19, ev1453.04

k19, ev1347.03

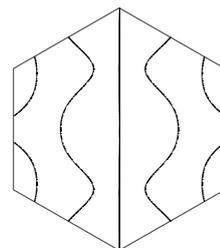
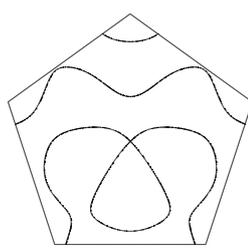
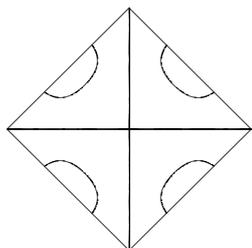


20

k20, ev14541.8

k19, ev1453.04

k20, ev1405.28

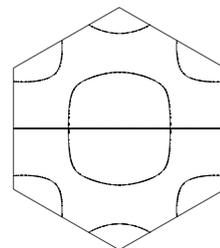
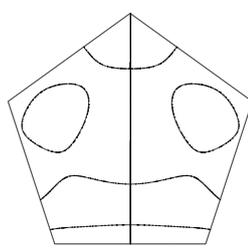
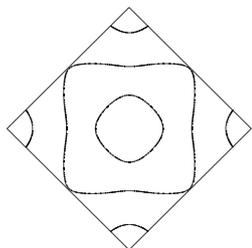


21

k21, ev14595.03

k21, ev1414.13

k20, ev1405.28

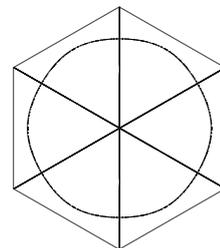
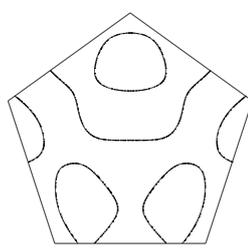
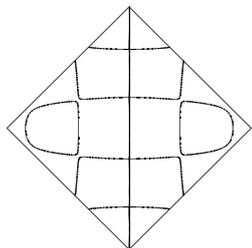


22

k22, ev14734.98

k21, ev1414.13

k22, ev14539.03

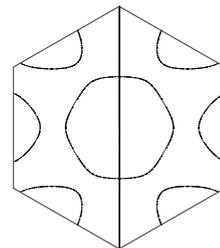
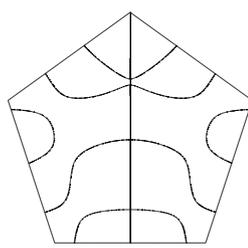
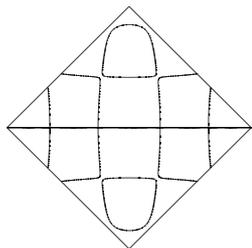


23

k22, ev14734.98

k21, ev14532.94

k21, ev14539.03

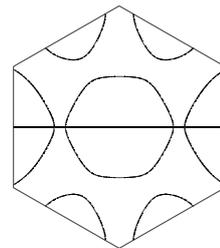
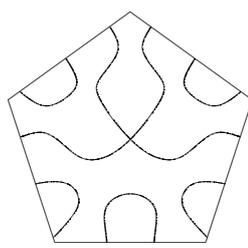
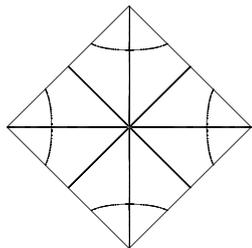


24

k24, ev15391.5

k23, ev14532.94

k23, ev14539.03



25

k

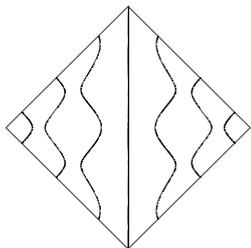
正方形

正五边形

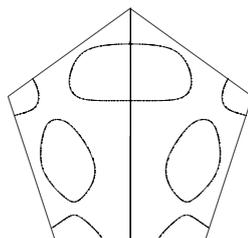
正六角形

26

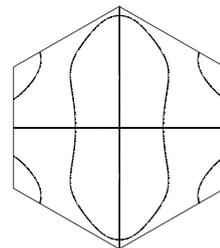
k/25, ev/11335



k/25, ev/10221.05

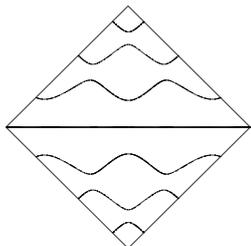


k/25, ev/4699.09

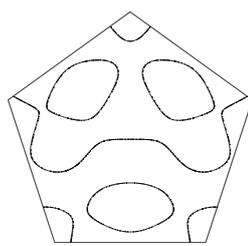


27

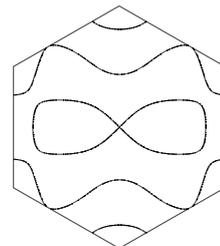
k/25, ev/11335



k/25, ev/10221.05

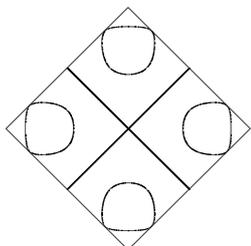


k/25, ev/4699.09

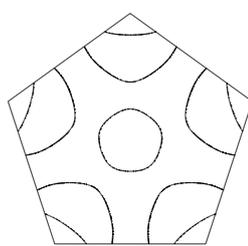


28

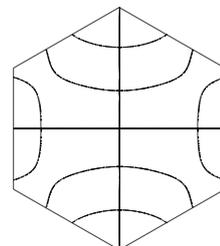
k/27, ev/11395.8



k/27, ev/9493.31

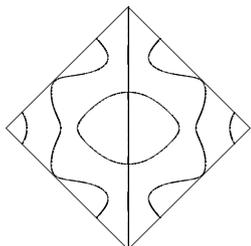


k/27, ev/48791.09

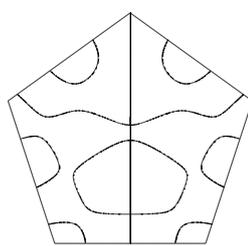


29

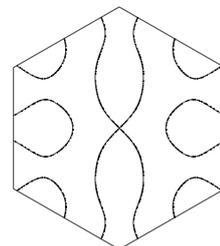
k/28, ev/14215.6



k/28, ev/10588.3

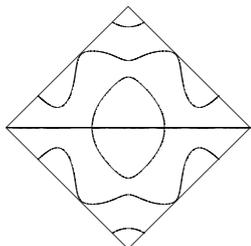


k/27, ev/48791.09

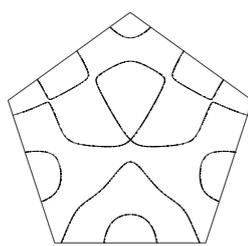


30

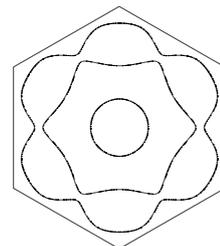
k/28, ev/14215.6



k/28, ev/10588.3

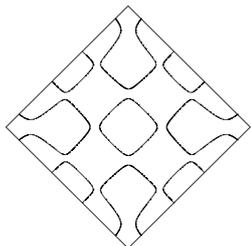


k/28, ev/10725.8

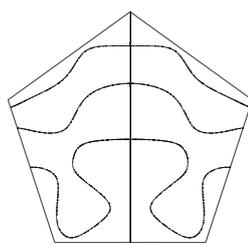


31

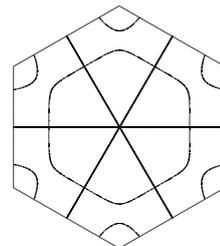
k/30, ev/15295.6



k/30, ev/13382.8



k/30, ev/11887



k

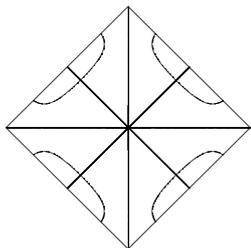
正方形

正五边形

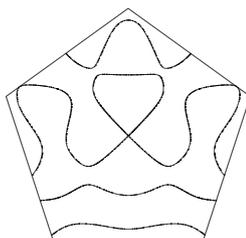
正六角形

32

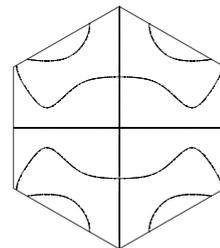
k-31, en-22023.1



k-32, en-12302.8

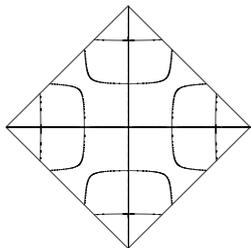


k-31, en-12024

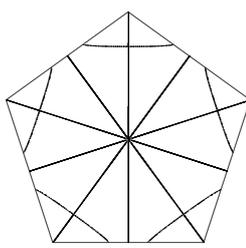


33

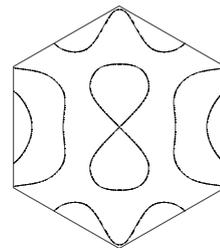
k-32, en-21338.9



k-32, en-15285.5

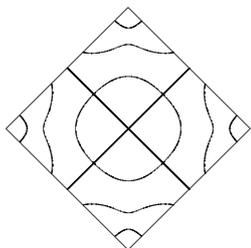


k-31, en-12024

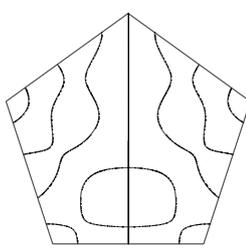


34

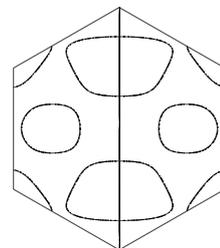
k-33, en-21812.2



k-33, en-16285.5

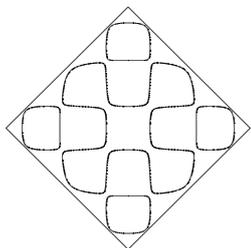


k-33, en-12482.6

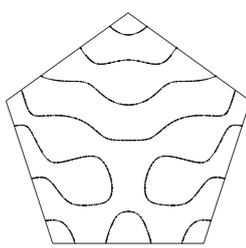


35

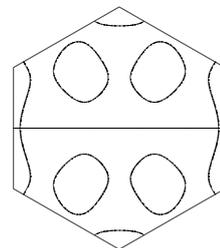
k-34, en-22489.8



k-33, en-16285.5

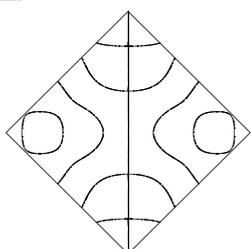


k-33, en-12482.6

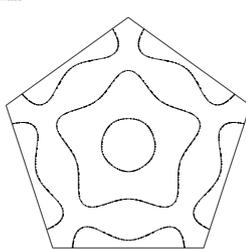


36

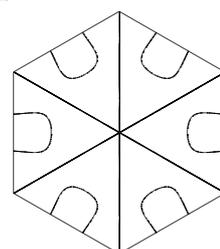
k-35, en-22022.6



k-35, en-17882.5

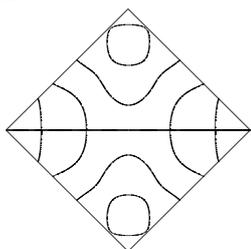


k-35, en-14470

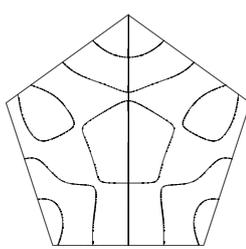


37

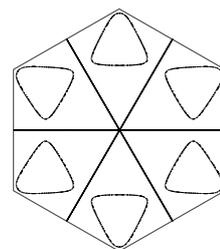
k-35, en-22022.6



k-36, en-18274.5



k-36, en-18041



k

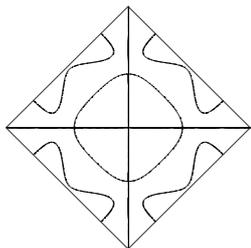
正方形

正五角形

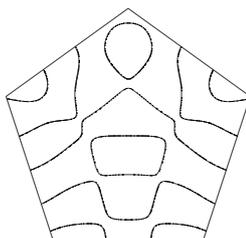
正六角形

38

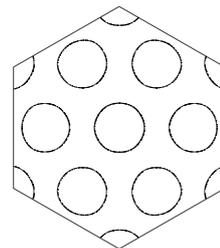
k37, en12785.6



k38, en19374.5

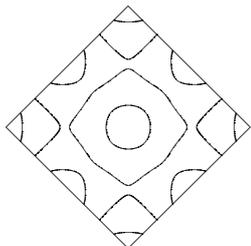


k37, en19203.6

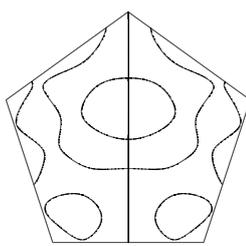


39

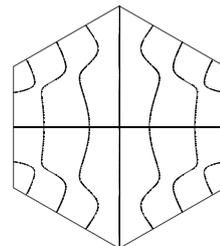
k38, en12465.9



k38, en12153.2

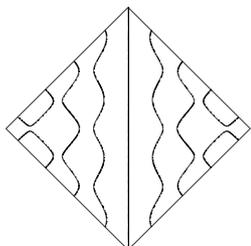


k38, en19844.4

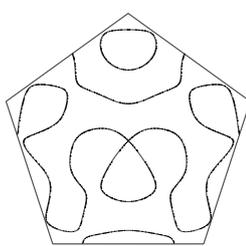


40

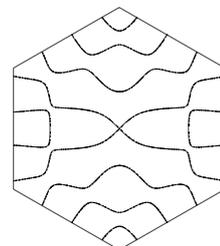
k38, en12465.2



k38, en12153.2

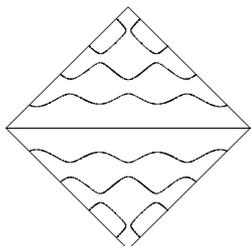


k38, en19844.4

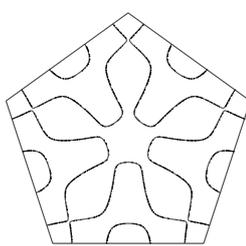


41

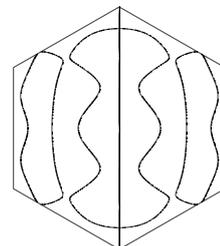
k38, en12465.2



k40, en12581.3

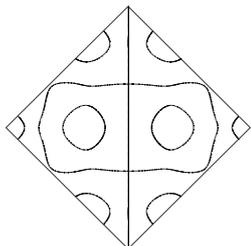


k40, en12026.4

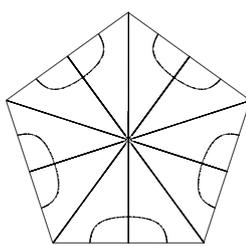


42

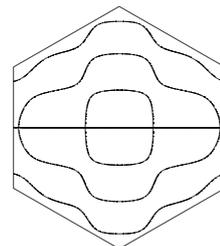
k41, en12817.9



k41, en12784

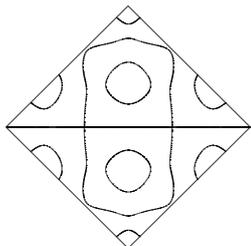


k40, en12026.4

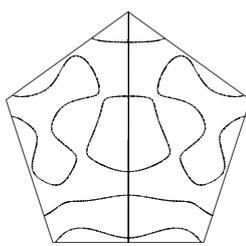


43

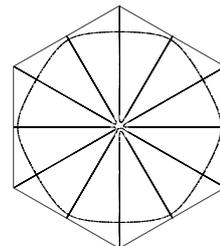
k41, en12817.9



k42, en12881.9



k42, en12168.8



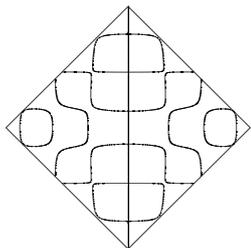
k

正方形

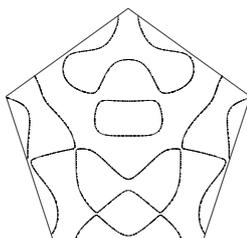
正五边形

正六角形

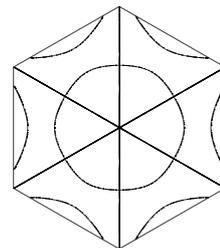
k43, en42875.3



k43, en28819

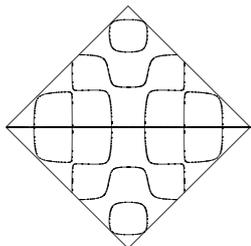


k43, en27882

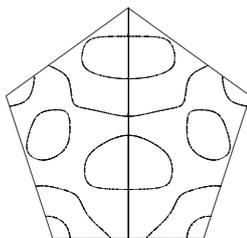


44

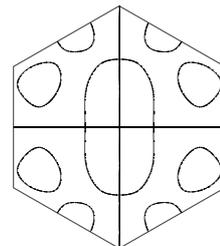
k43, en42875.3



k44, en28875

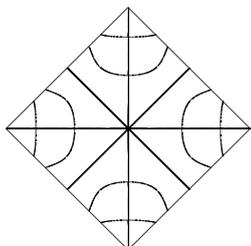


k44, en28821

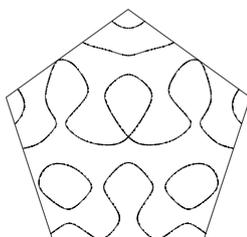


45

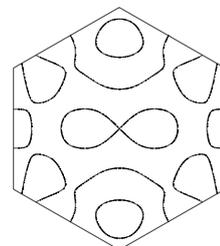
k45, en42877.1



k44, en28875

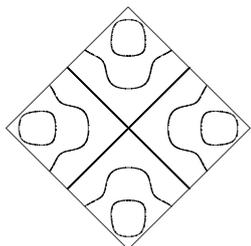


k44, en28821

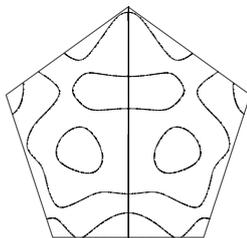


46

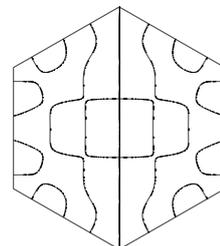
k46, en45262



k46, en36438

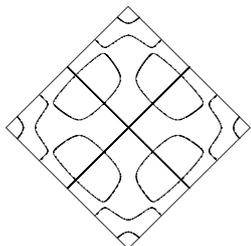


k46, en28936

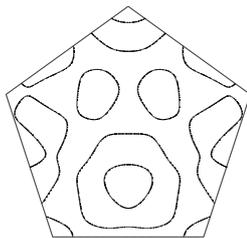


47

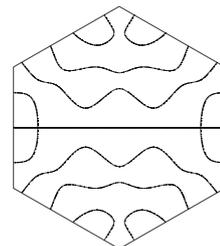
k47, en46818



k46, en36438

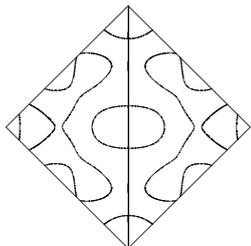


k46, en28936

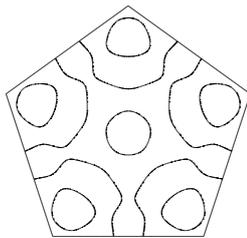


48

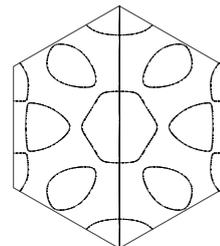
k48, en51823.7



k48, en37815



k48, en31882



49

k

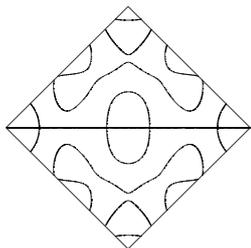
正方形

正五角形

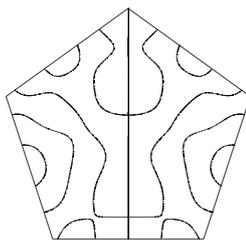
正六角形

50

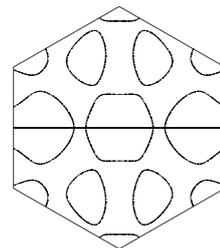
k48, ev01823.7



k48, ev40265.3

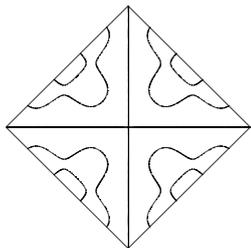


k48, ev01995.2

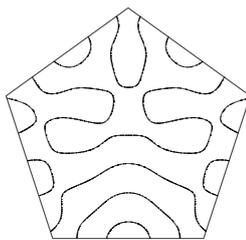


51

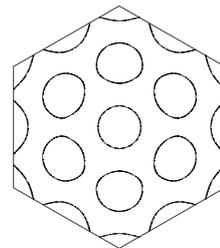
k50, ev02180.8



k48, ev40265.3

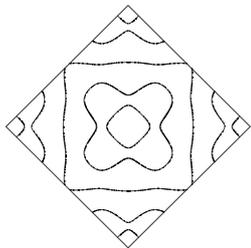


k50, ev02016.7

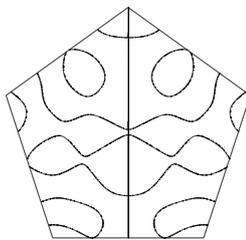


52

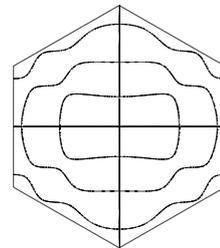
k51, ev02396.7



k51, ev41787.2

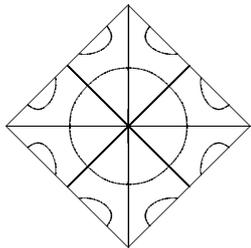


k51, ev02043.9



53

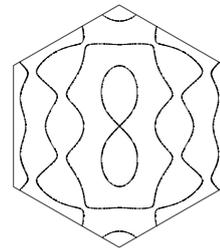
k52, ev02424.4



k51, ev41787.2

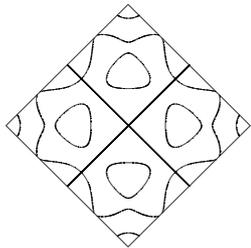


k51, ev02043.9

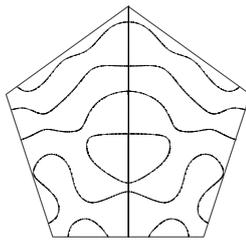


54

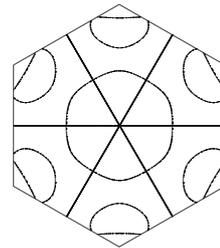
k53, ev02452.8



k53, ev48233.6

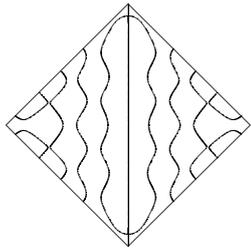


k53, ev41772.2

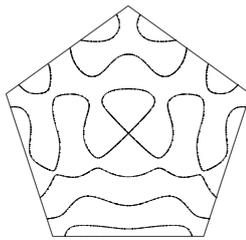


55

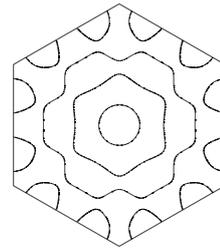
k54, ev04706



k53, ev48233.6



k54, ev40776.6



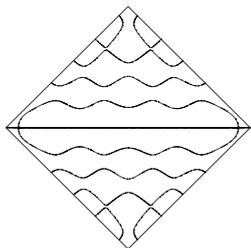
k

正方形

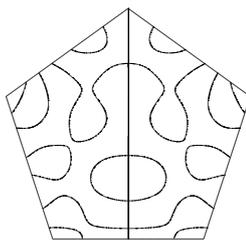
正五边形

正六角形

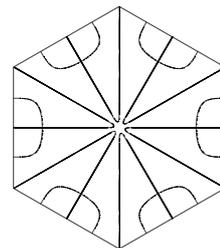
k154, en174755



k155, en152285

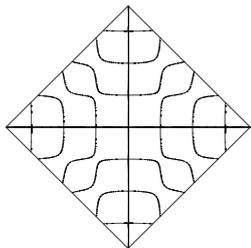


k155, en142913

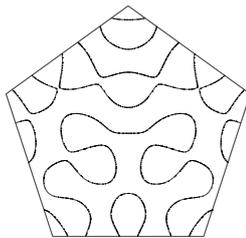


56

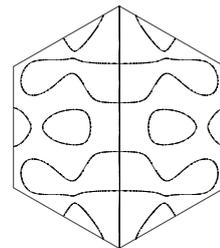
k156, en174757



k156, en152285

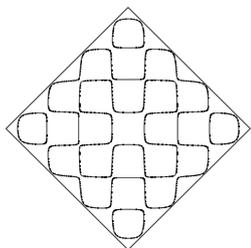


k156, en142924

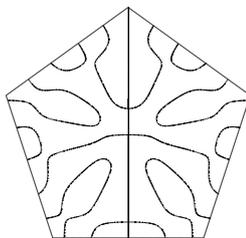


57

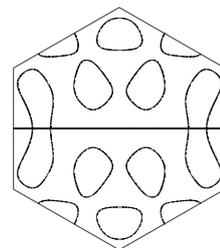
k157, en177263



k157, en152728

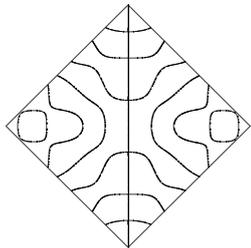


k156, en142924

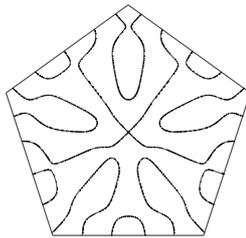


58

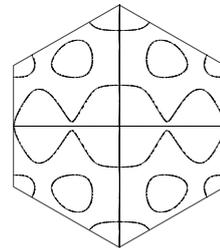
k158, en172282



k157, en152728

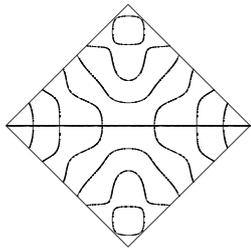


k158, en146551

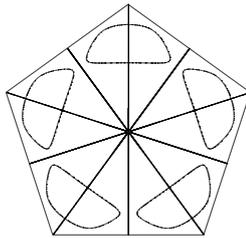


59

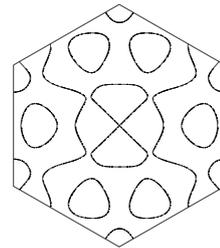
k158, en172282



k158, en152912

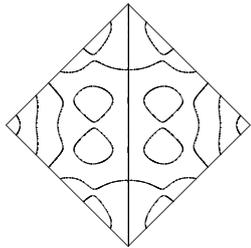


k158, en146551

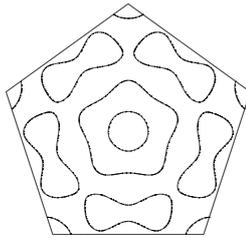


60

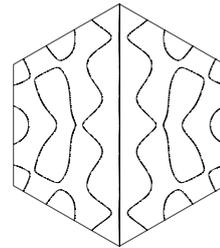
k160, en184139



k160, en152926



k158, en152922



61

k

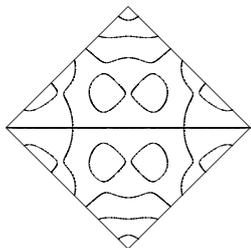
正方形

正五边形

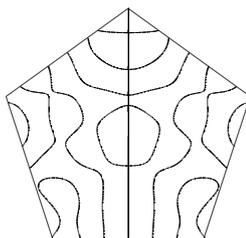
正六边形

62

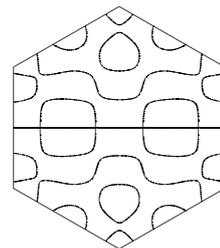
k402, ev48139



k401, ev47913.2

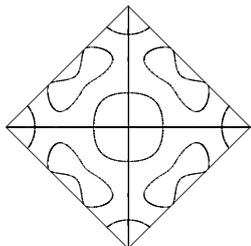


k400, ev45793.2

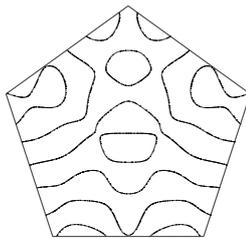


63

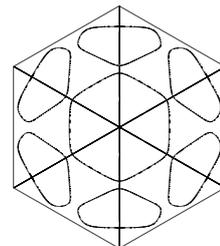
k402, ev48217.4



k401, ev47913.2

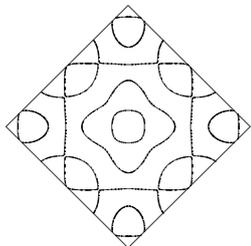


k402, ev48139

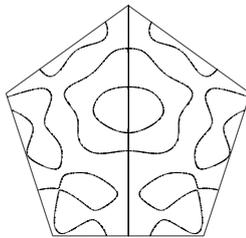


64

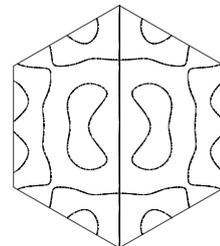
k403, ev48790.2



k403, ev47476.1

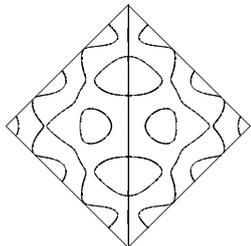


k403, ev48225

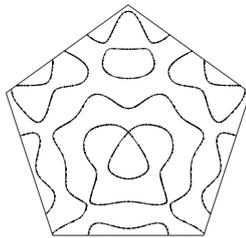


65

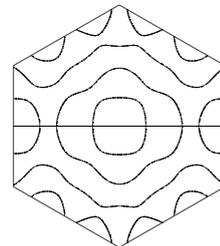
k404, ev49286



k403, ev47476.1

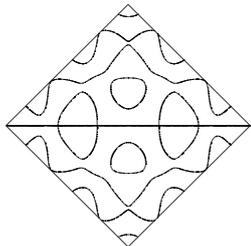


k403, ev48225

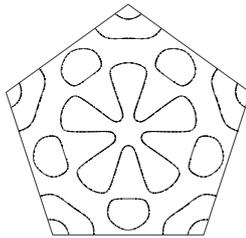


66

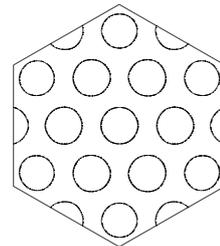
k404, ev49286



k405, ev47301.3

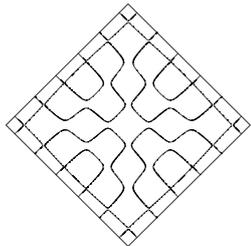


k405, ev48405.1

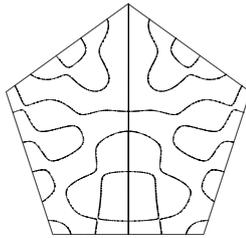


67

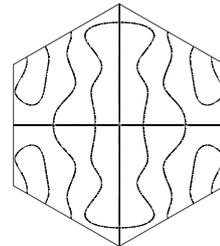
k406, ev49286



k406, ev47607.2



k406, ev484127.7



k

正方形

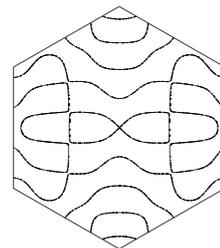
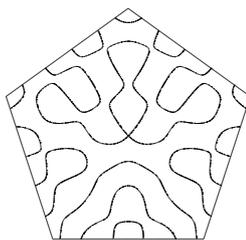
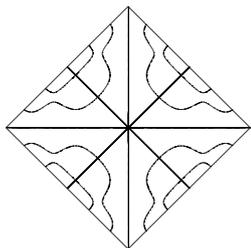
正五边形

正六角形

ku7, ev11204

ku6, ev7667.2

ku6, ev4427.7

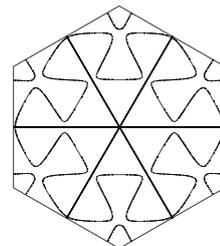
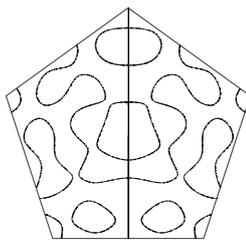
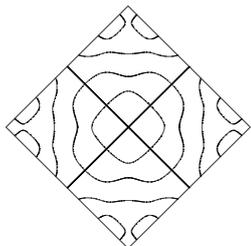


68

ku6, ev11205

ku6, ev8516.3

ku6, ev85712.5

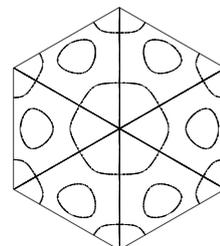
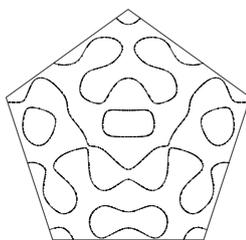
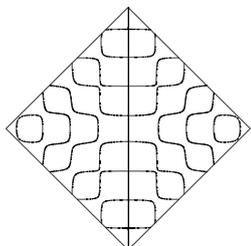


69

ku6, ev12202

ku6, ev8516.3

ku6, ev8529.6

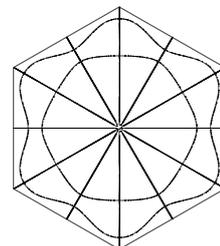
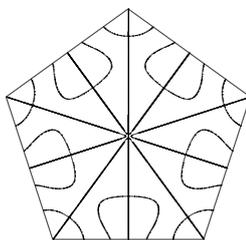
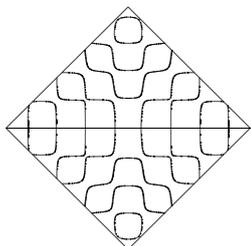


70

ku6, ev12202

ku70, ev8225.4

ku70, ev7076.1

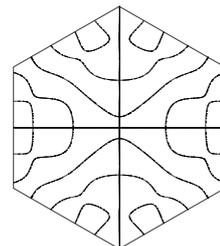
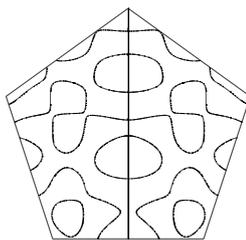
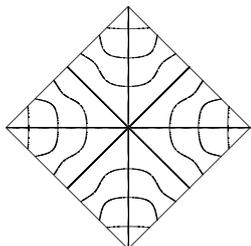


71

ku71, ev12207

ku71, ev8422.5

ku71, ev7024.1

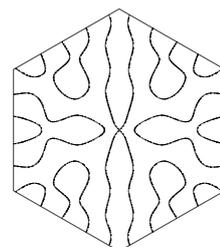
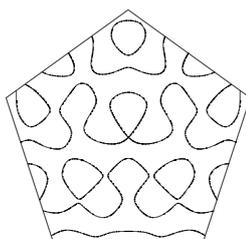
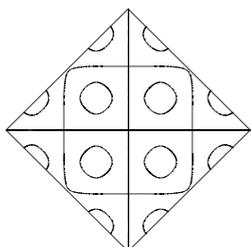


72

ku72, ev12201

ku71, ev87422.5

ku71, ev7024.1



73

k

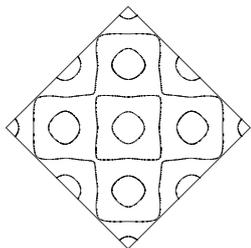
正方形

正五边形

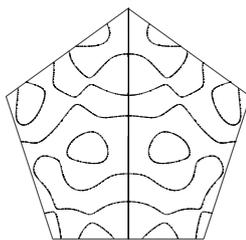
正六边形

74

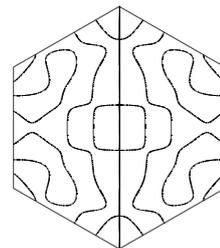
k/73, ev/12803



k/73, ev/10009

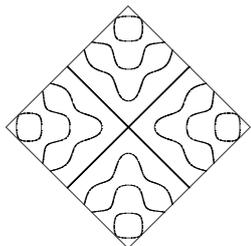


k/73, ev/87191.1

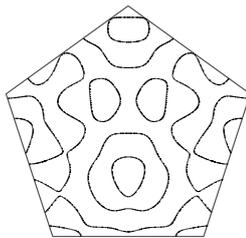


75

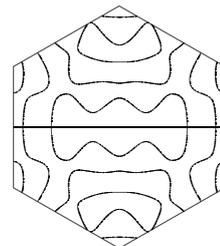
k/74, ev/13287



k/73, ev/10009

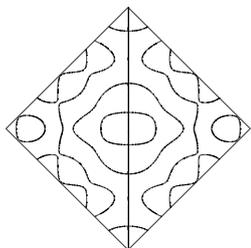


k/73, ev/87191.1

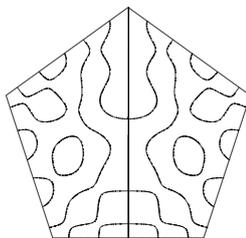


76

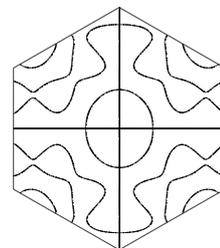
k/75, ev/14003



k/75, ev/10343

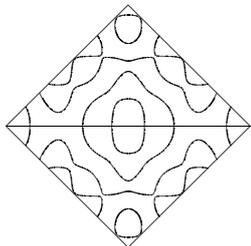


k/75, ev/89543

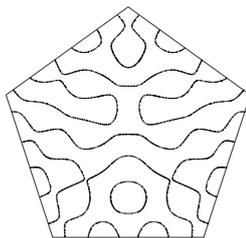


77

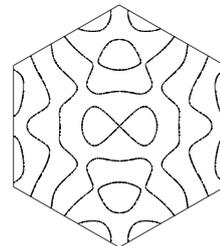
k/75, ev/14003



k/75, ev/10343

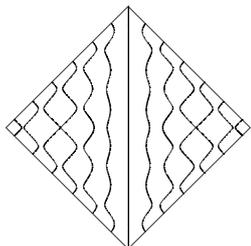


k/75, ev/89543

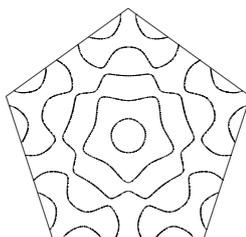


78

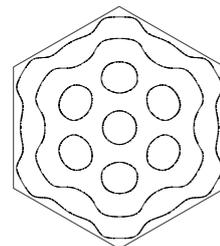
k/77, ev/14896



k/77, ev/10643

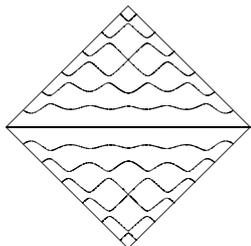


k/77, ev/89717

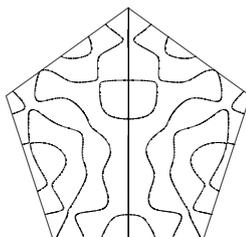


79

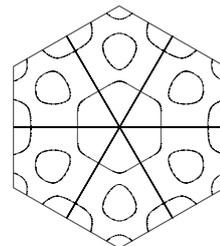
k/77, ev/14896



k/78, ev/11200



k/78, ev/94811



k

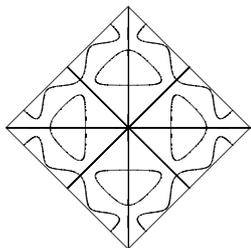
正方形

正五边形

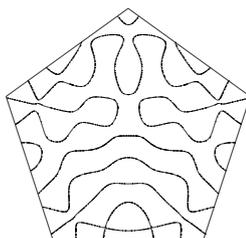
正六角形

80

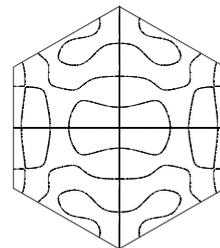
k179, ev1158730



k179, ev112300

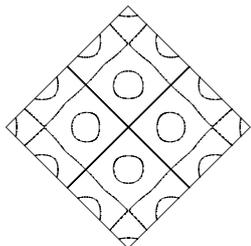


k179, ev103393

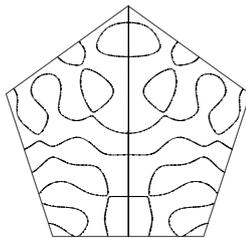


81

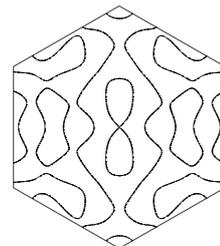
k180, ev102400



k180, ev112325

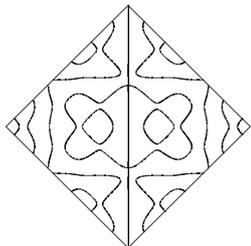


k179, ev103393

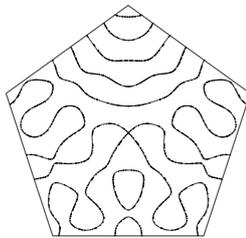


82

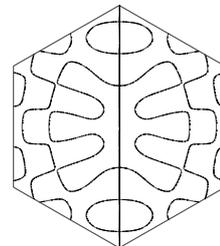
k181, ev102398



k180, ev112325

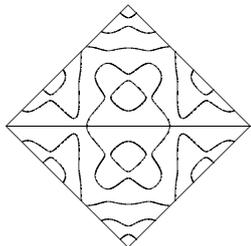


k181, ev102414

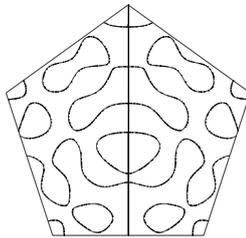


83

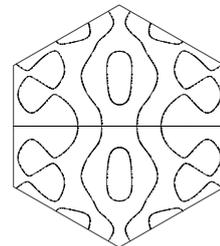
k181, ev102398



k182, ev112344

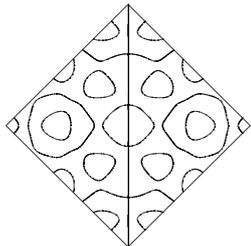


k181, ev102414

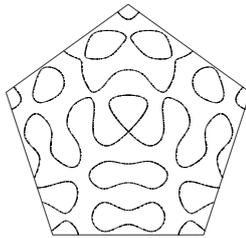


84

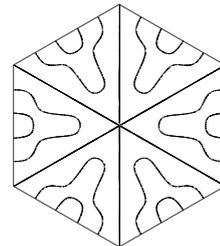
k183, ev102875



k182, ev112344

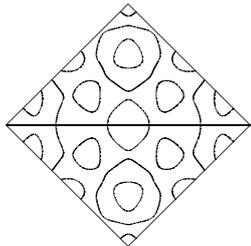


k183, ev102880

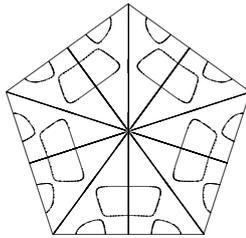


85

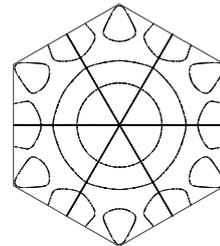
k183, ev102875



k184, ev112735



k184, ev112487



k

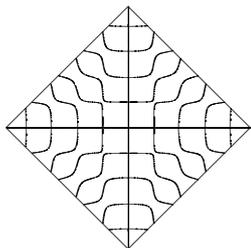
正方形

正五边形

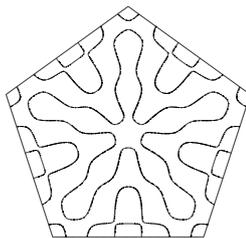
正六边形

86

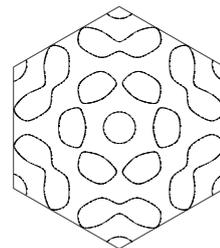
k185, env132625



k185, env132646

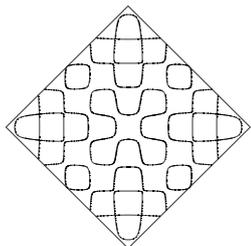


k185, env132670

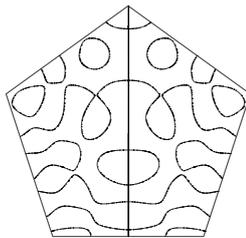


87

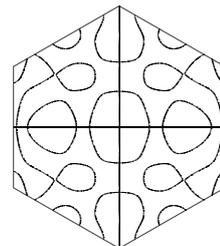
k185, env132706



k185, env140220

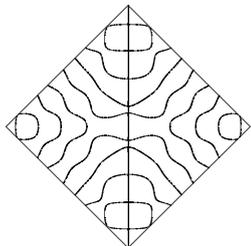


k185, env134037

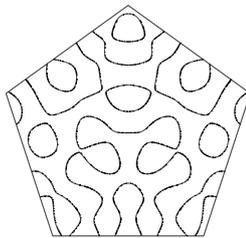


88

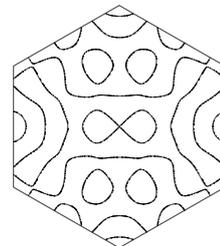
k187, env132797



k185, env140220

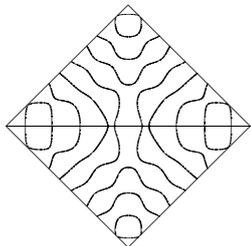


k185, env134037

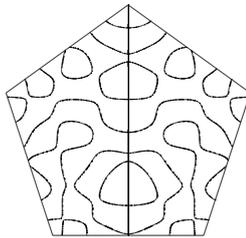


89

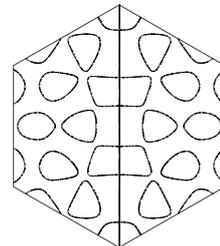
k187, env132797



k185, env144733

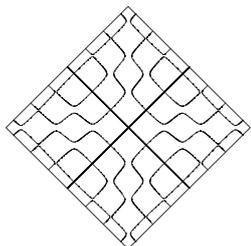


k185, env134033

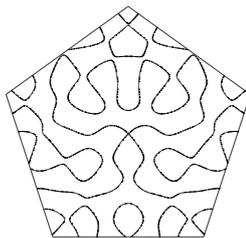


90

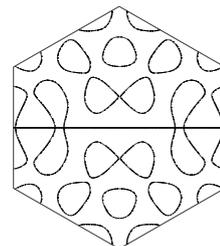
k185, env1251471



k185, env144733

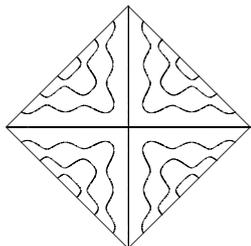


k185, env134033

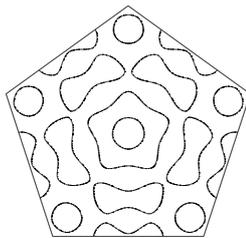


91

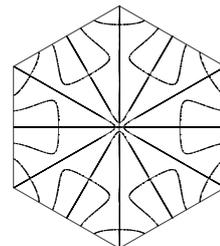
k185, env1252221



k185, env146120



k185, env132083



k

正方形

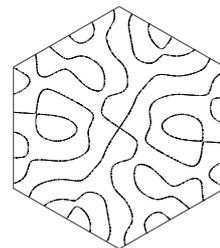
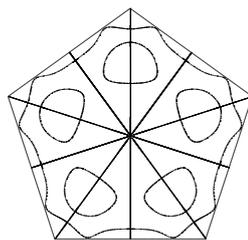
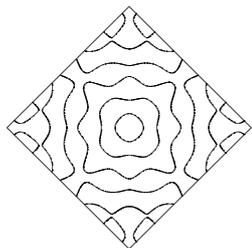
正五边形

正六边形

k/01, en/220221

k/01, en/152028

k/01, en/132033

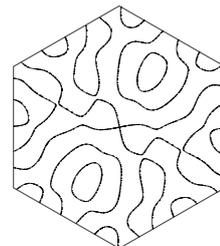
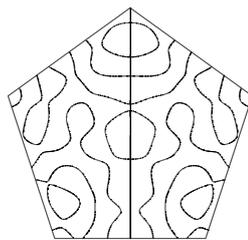
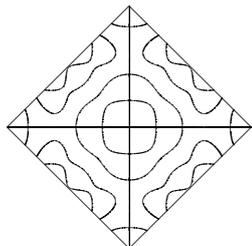


92

k/02, en/211901

k/02, en/167438

k/02, en/132030

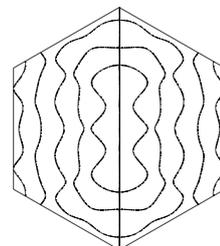
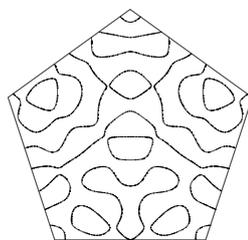
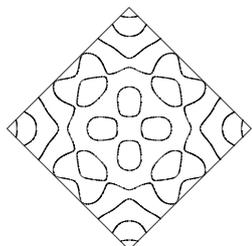


93

k/03, en/217832

k/03, en/167439

k/03, en/134924

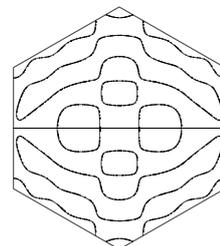
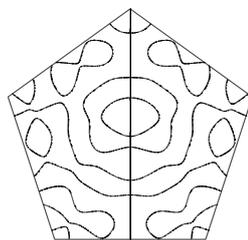
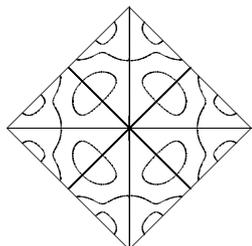


94

k/04, en/220330

k/04, en/169229

k/04, en/134924

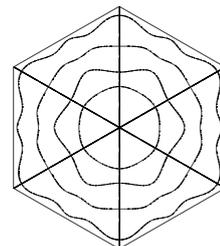
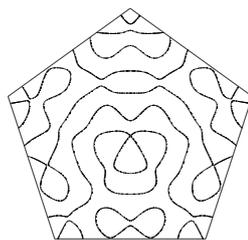
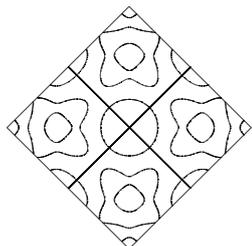


95

k/05, en/224938

k/04, en/169233

k/05, en/139237

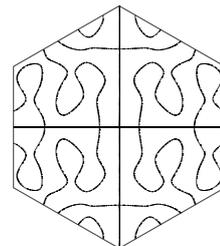
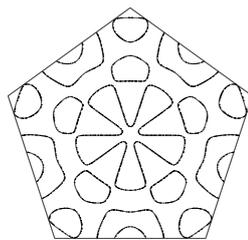
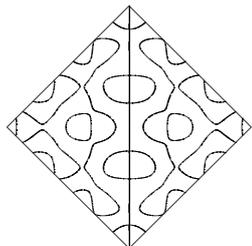


96

k/06, en/228951

k/06, en/174236

k/06, en/154137



97

k

正方形

正五边形

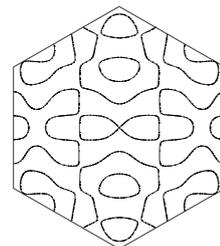
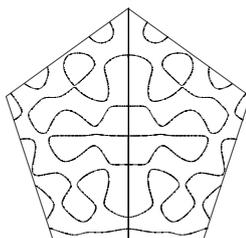
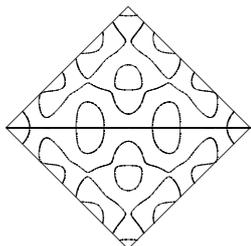
正六角形

98

k/98, en/22851

k/97, en/18100

k/98, en/15417

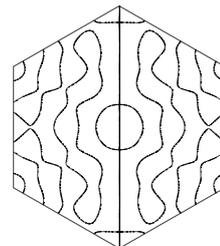
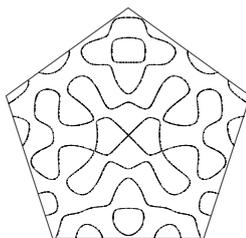
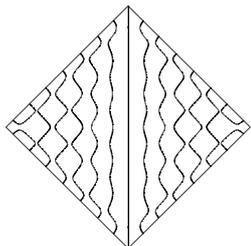


99

k/98, en/25855

k/97, en/18100

k/98, en/15851

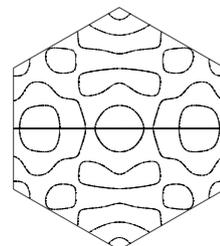
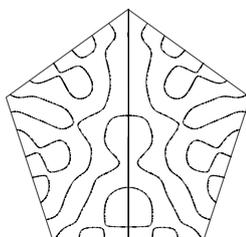
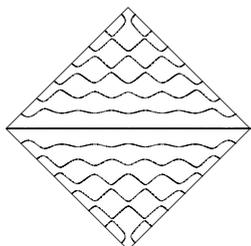


100

k/98, en/25855

k/98, en/18274

k/98, en/15851

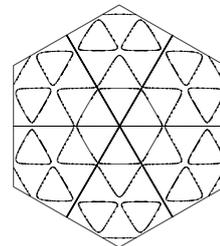
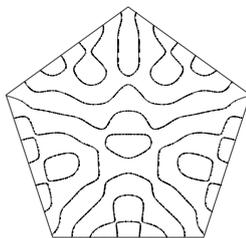
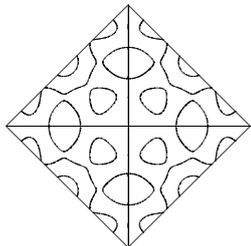


101

k/100, en/27380

k/98, en/18274

k/100, en/16434

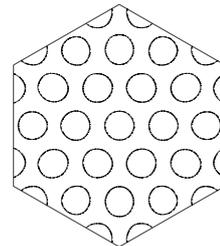
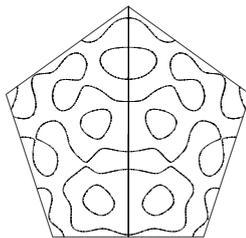
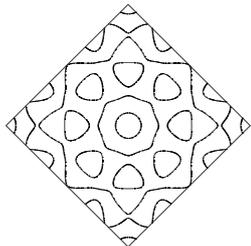


102

k/101, en/27384

k/101, en/20838

k/101, en/16183

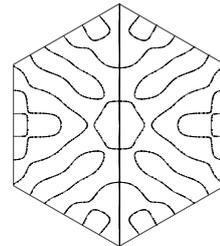
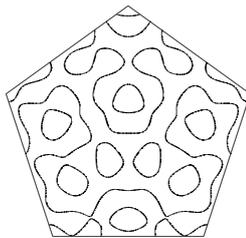
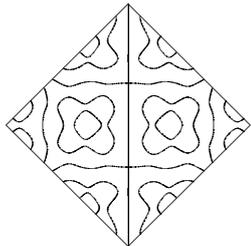


103

k/102, en/28745

k/101, en/20838

k/102, en/16192



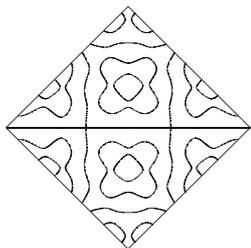
k

正方形

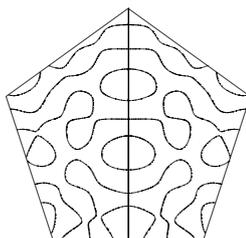
正五边形

正六边形

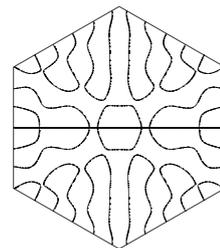
ku102, ewi207465



ku102, ewi209433

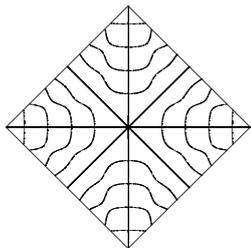


ku102, ewi109192

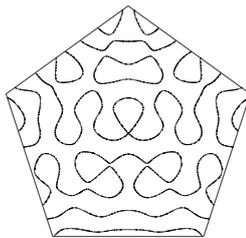


104

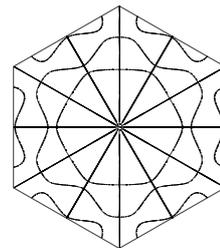
ku104, ewi207815



ku102, ewi209433

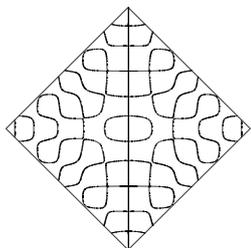


ku104, ewi170287

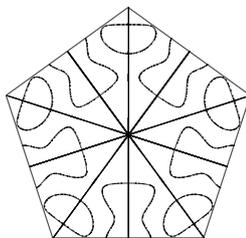


105

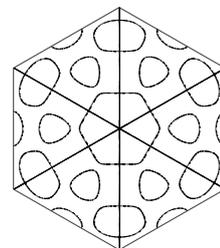
ku105, ewi209242



ku105, ewi210644

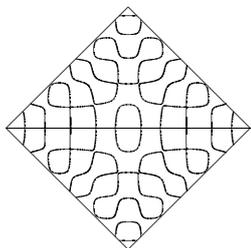


ku105, ewi172365

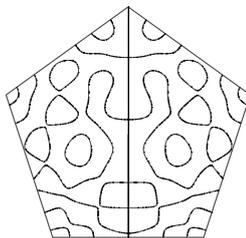


106

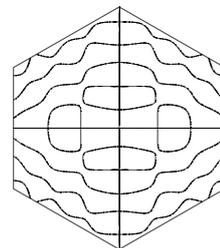
ku105, ewi209242



ku106, ewi220855

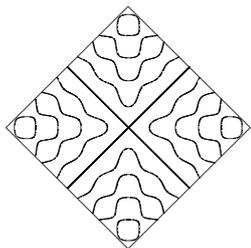


ku106, ewi191146

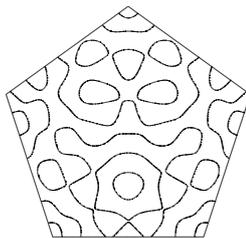


107

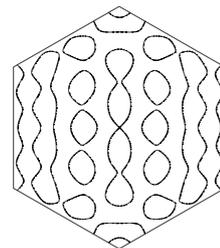
ku107, ewi207028



ku106, ewi220855

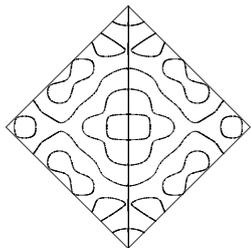


ku106, ewi191146

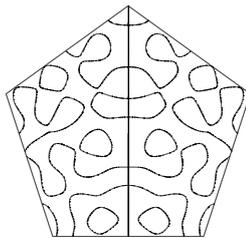


108

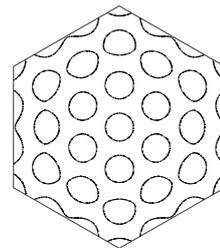
ku108, ewi213883



ku108, ewi221884



ku108, ewi192051



109

k

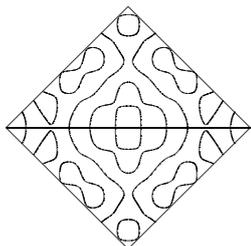
正方形

正五边形

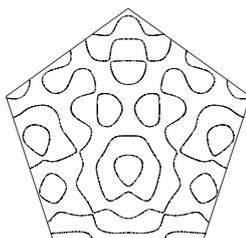
正六角形

110

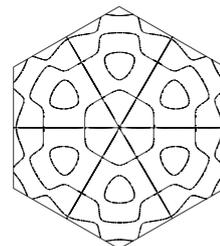
ku108_en031383



ku108_en023184

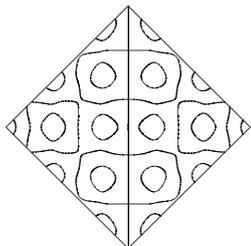


ku108_en020750

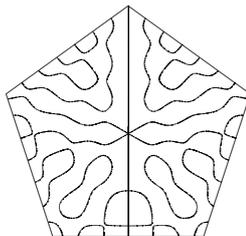


111

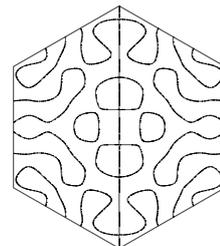
ku110_en022547



ku110_en023293

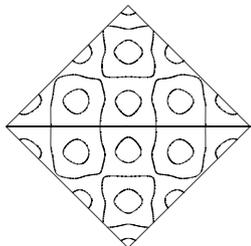


ku110_en020855

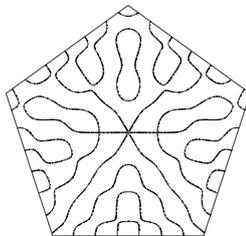


112

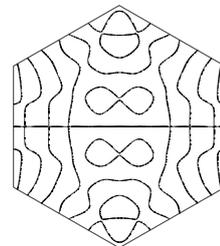
ku110_en022547



ku110_en023293

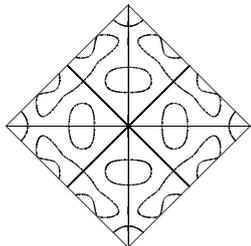


ku110_en020855

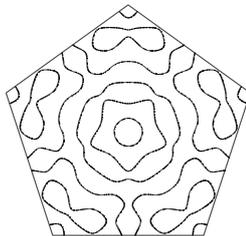


113

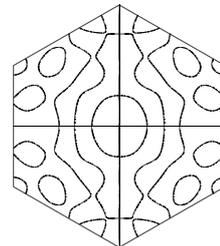
ku112_en034516



ku112_en023702

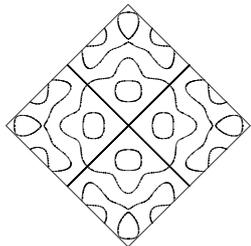


ku112_en027402

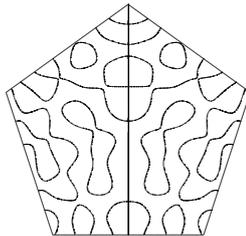


114

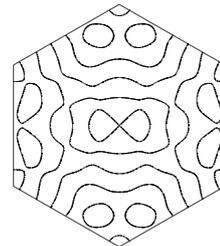
ku113_en040230



ku113_en020750

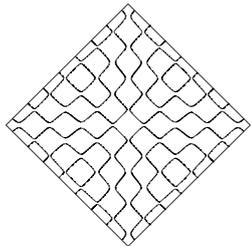


ku112_en027402

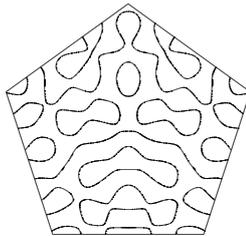


115

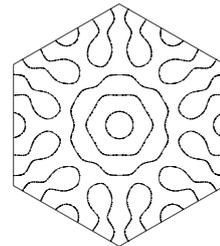
ku114_en034623



ku113_en020750



ku114_en020282



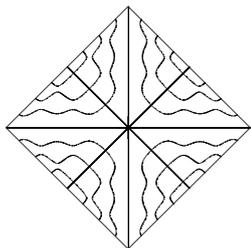
k

正方形

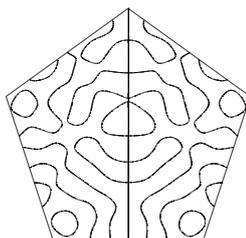
正五边形

正六角形

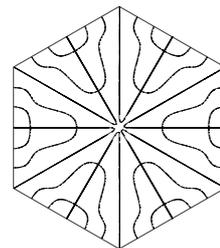
ku116, eno207922



ku116, eno203342

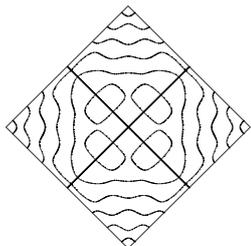


ku116, eno21283

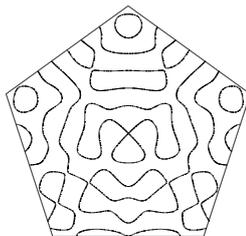


116

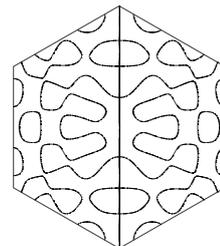
ku116, eno20279



ku116, eno203342

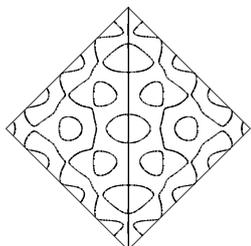


ku116, eno21284

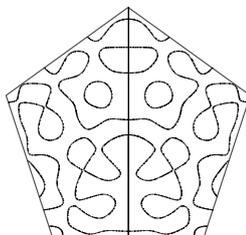


117

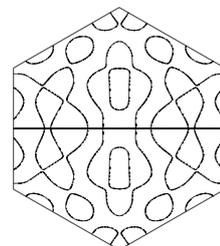
ku117, eno207290



ku117, eno21086

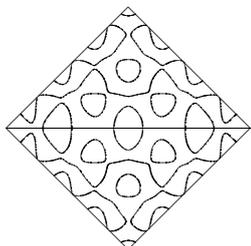


ku116, eno21284

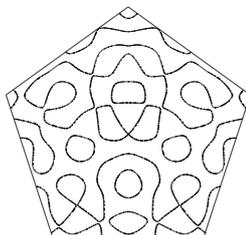


118

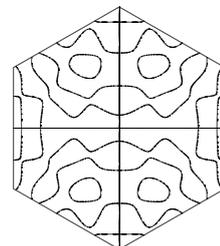
ku117, eno207290



ku117, eno21086

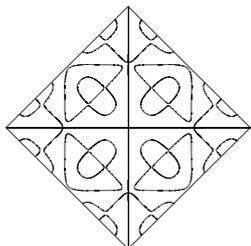


ku116, eno22310

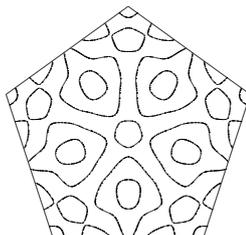


119

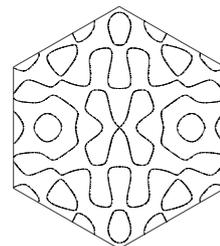
ku119, eno20829



ku119, eno20147

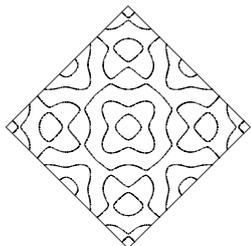


ku119, eno22310

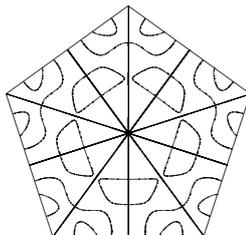


120

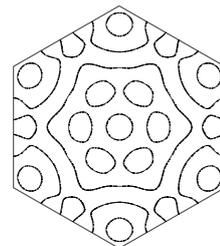
ku120, eno20821



ku120, eno20873



ku120, eno20849



121

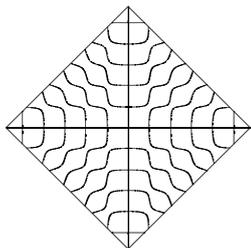
k

正方形

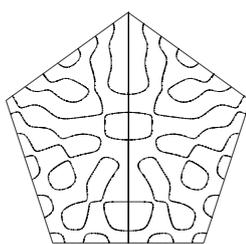
正五边形

正六边形

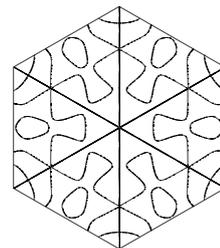
ku121, enu417269



ku121, enu29814

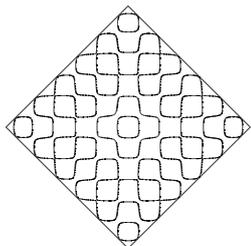


ku121, enu298171

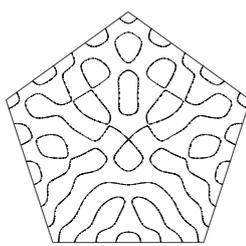


122

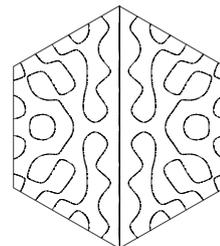
ku122, enu424542



ku121, enu29814

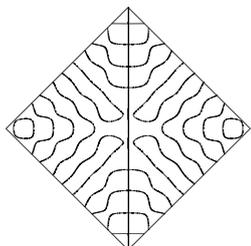


ku122, enu29820

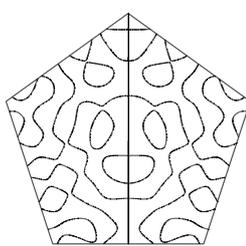


123

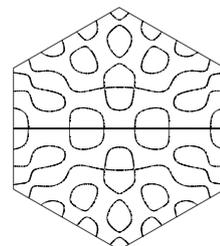
ku122, enu425163



ku122, enu304276

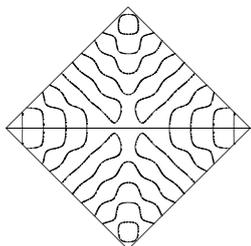


ku122, enu29820

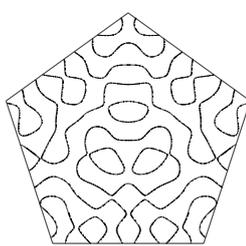


124

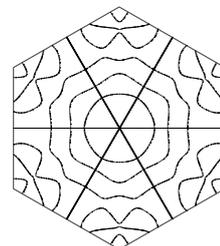
ku122, enu425163



ku122, enu304276

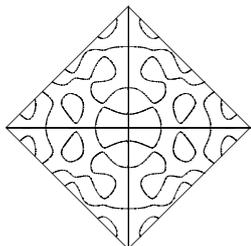


ku124, enu29814

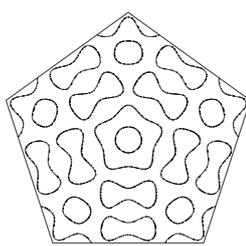


125

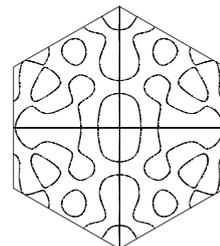
ku122, enu426887



ku122, enu312839

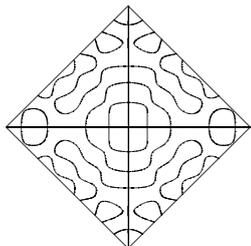


ku122, enu29823

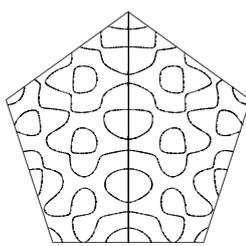


126

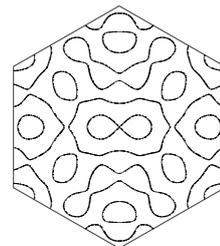
ku122, enu426887



ku122, enu315100



ku122, enu29823



127

k

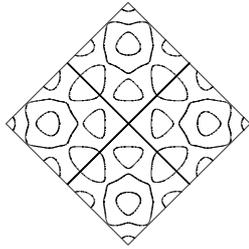
正方形

正五边形

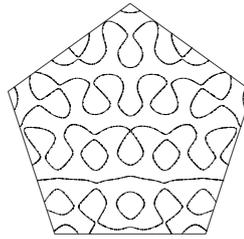
正六角形

128

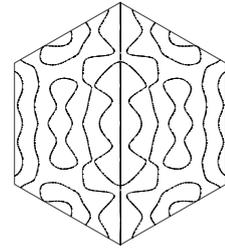
k/127, en/48449



k/126, en/315120

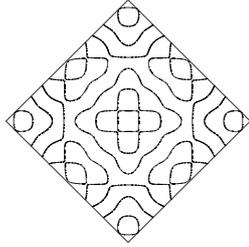


k/127, en/27235

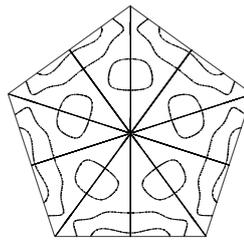


129

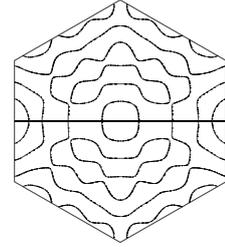
k/128, en/42958



k/126, en/32237

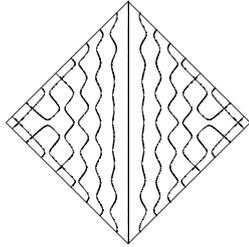


k/127, en/27235

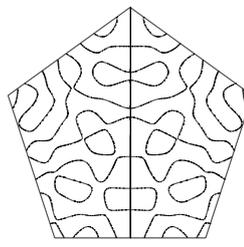


130

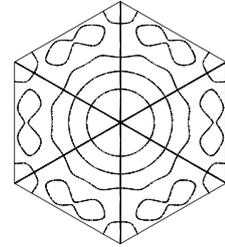
k/129, en/45151



k/129, en/33274

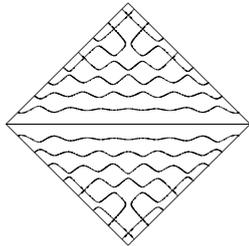


k/129, en/28188

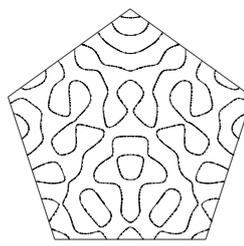


131

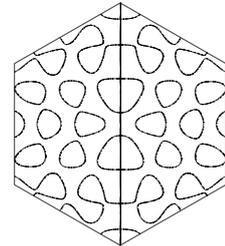
k/129, en/45151



k/129, en/33274

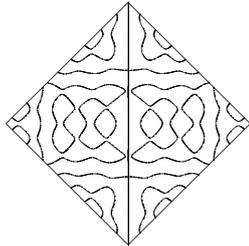


k/130, en/32282

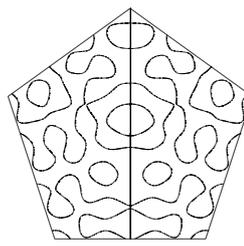


132

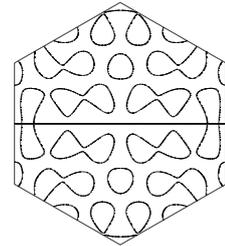
k/131, en/47653



k/131, en/35546

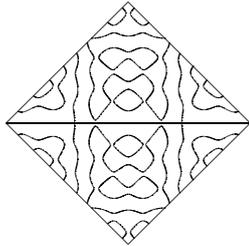


k/131, en/28282

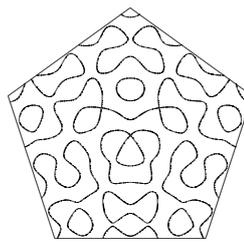


133

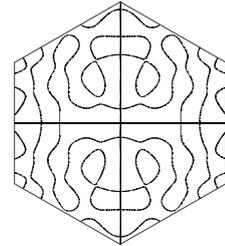
k/131, en/47653



k/131, en/35546



k/131, en/28282



k

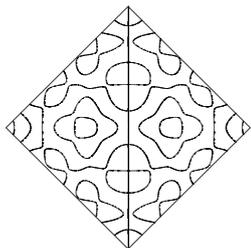
正方形

正五边形

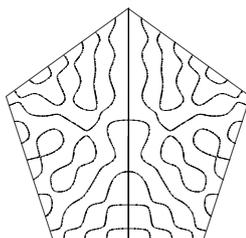
正六角形

134

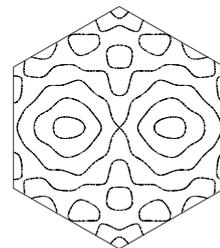
k/133, en/402484



k/133, en/35224

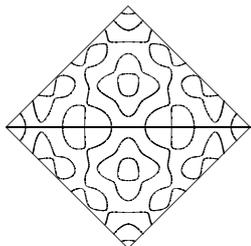


k/132, en/28951

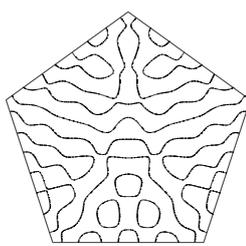


135

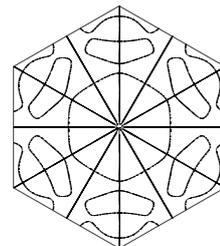
k/133, en/402484



k/133, en/35224

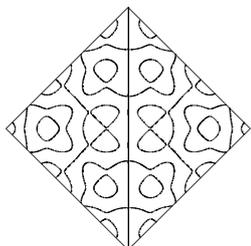


k/134, en/29284

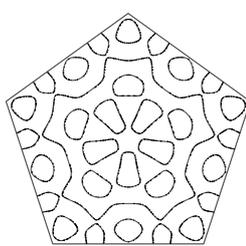


136

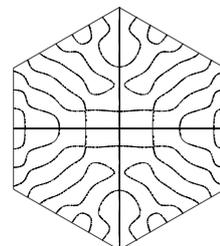
k/135, en/523679



k/135, en/362910

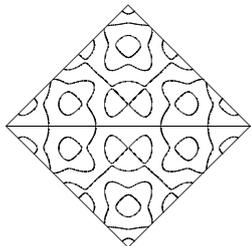


k/135, en/32472

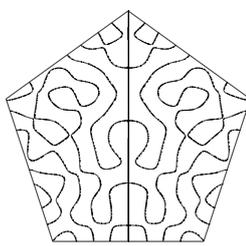


137

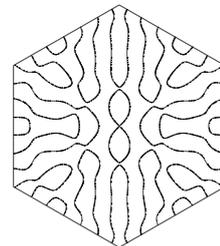
k/135, en/523679



k/136, en/376355

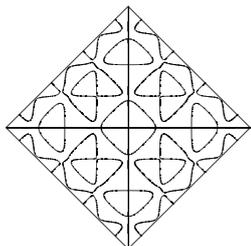


k/135, en/32472

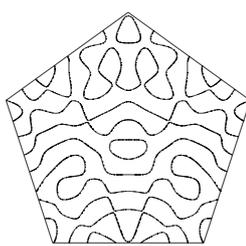


138

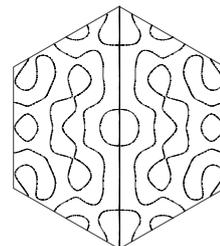
k/137, en/532279



k/136, en/376355

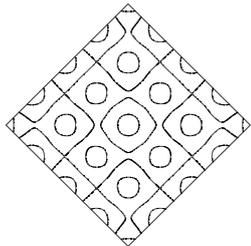


k/137, en/327231

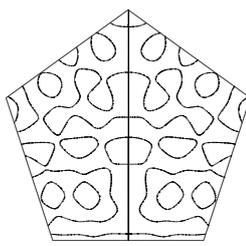


139

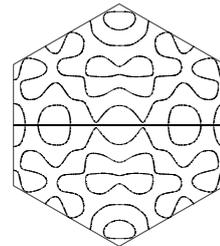
k/138, en/536528



k/138, en/381190



k/137, en/327231



k

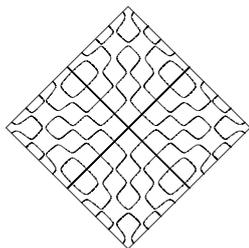
正方形

正五角形

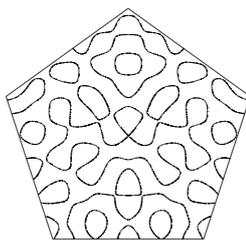
正六角形

140

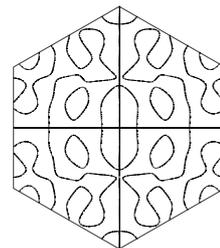
ku138, ew0507269



ku138, ew081190

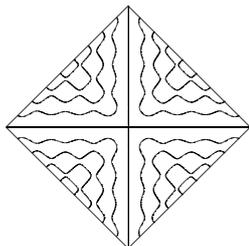


ku138, ew032319

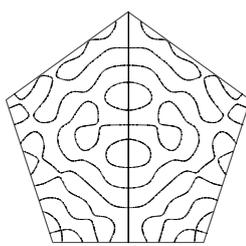


141

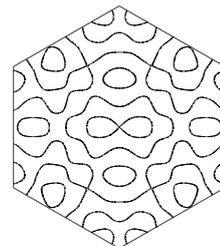
ku140, ew057892



ku140, ew052176

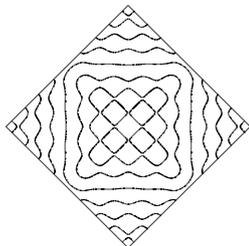


ku138, ew032319

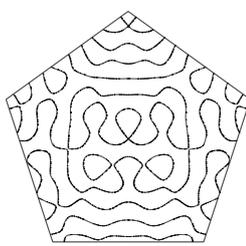


142

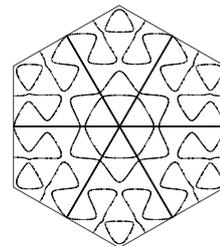
ku141, ew053884



ku140, ew052176

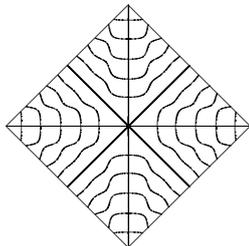


ku141, ew048844

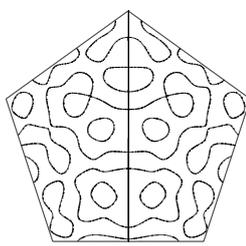


143

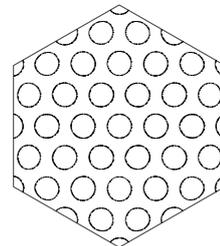
ku142, ew058533



ku142, ew052251

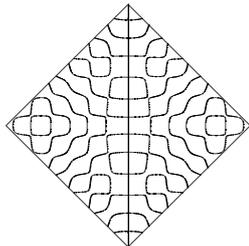


ku142, ew051280

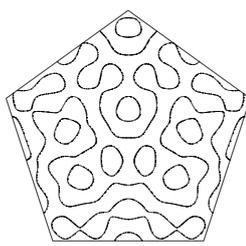


144

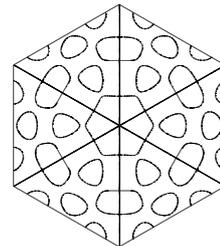
ku143, ew058738



ku142, ew052251

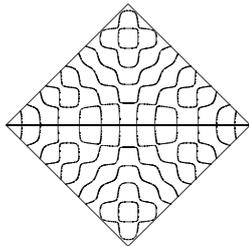


ku142, ew057346

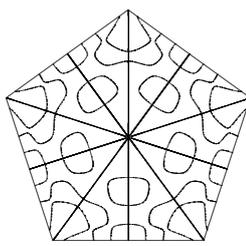


145

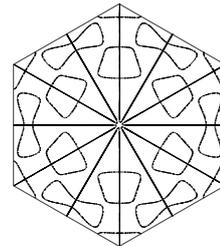
ku143, ew058738



ku144, ew037093



ku144, ew052247



k

正方形

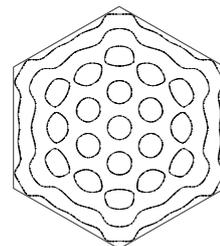
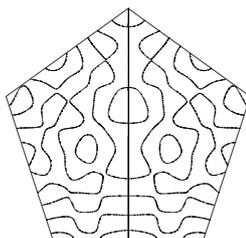
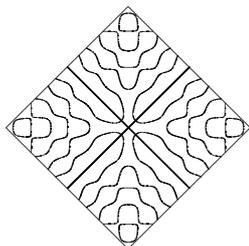
正五边形

正六角形

ku146, eu029781

ku146, eu040279

ku146, eu020215

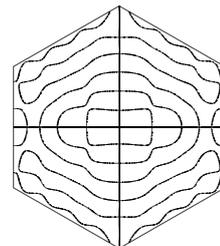
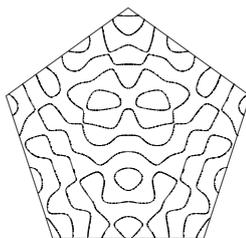
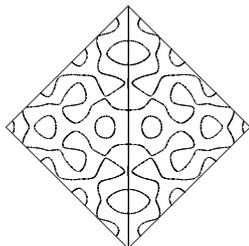


146

ku146, eu020282

ku146, eu040279

ku146, eu020215

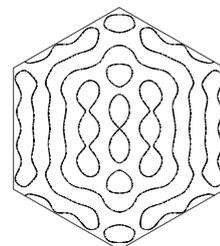
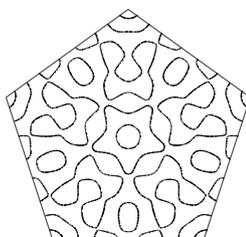
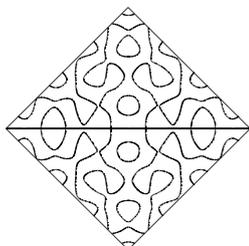


147

ku146, eu020282

ku147, eu040283

ku146, eu020215

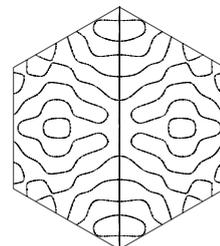
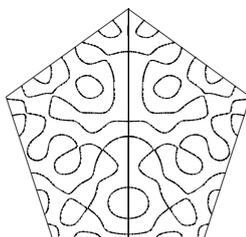
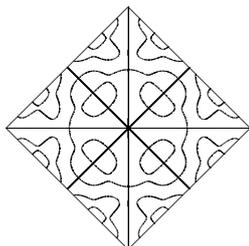


148

ku146, eu027770

ku146, eu051897

ku146, eu021884

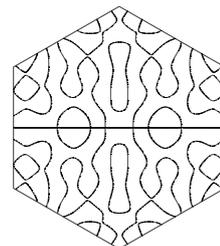
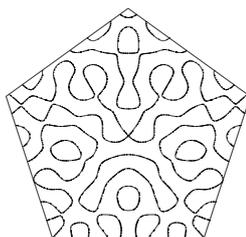
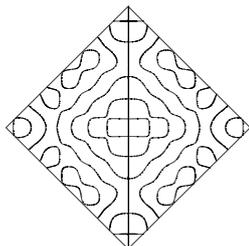


149

ku146, eu028915

ku146, eu051897

ku146, eu021884

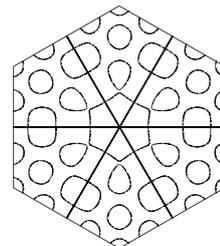
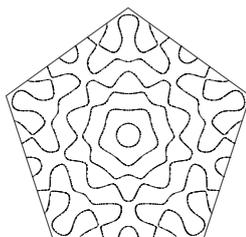
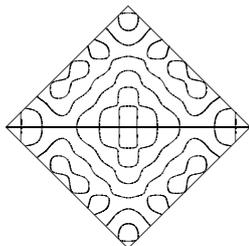


150

ku146, eu028915

ku150, eu050285

ku150, eu024012



151

k

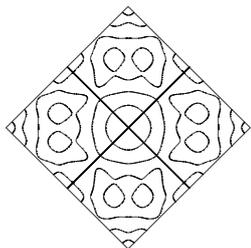
正方形

正五边形

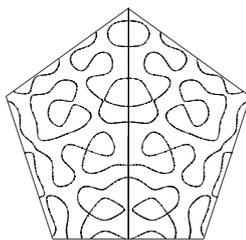
正六角形

152

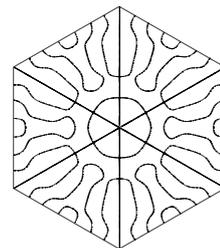
ku151, ewu02426



ku151, ewu403196

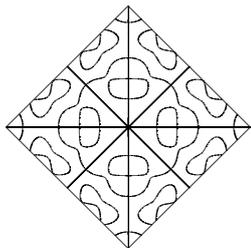


ku151, ewu026712

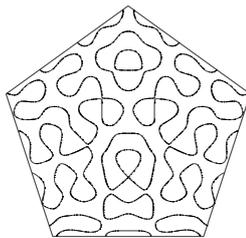


153

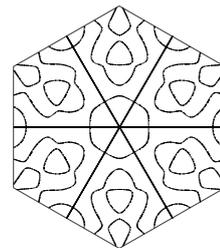
ku152, ewu05080



ku151, ewu403196

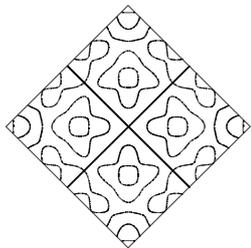


ku152, ewu41208

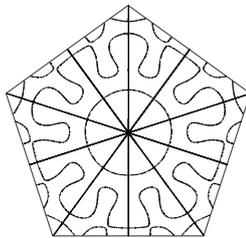


154

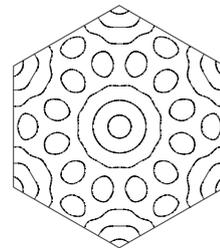
ku153, ewu04954



ku153, ewu40992

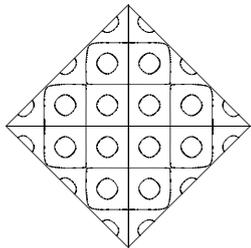


ku153, ewu44489

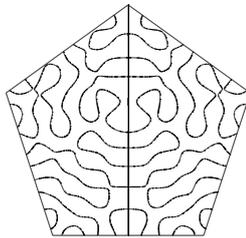


155

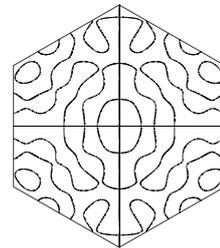
ku154, ewu07892



ku154, ewu05764

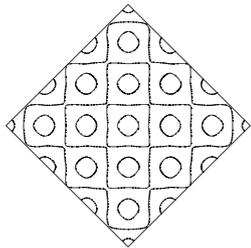


ku154, ewu49192

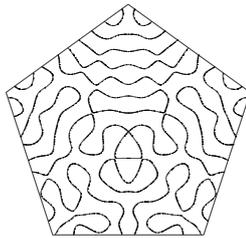


156

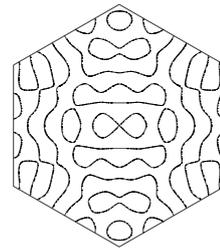
ku155, ewu04934



ku154, ewu05764

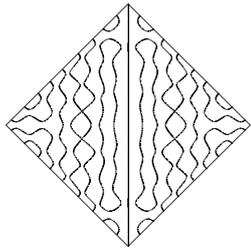


ku154, ewu49192

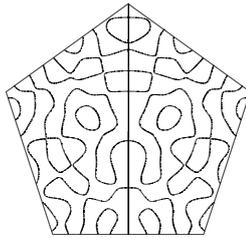


157

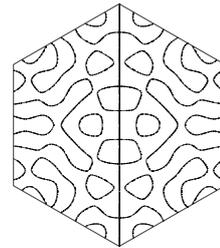
ku156, ewu71472



ku156, ewu059142



ku156, ewu49801



k

正方形

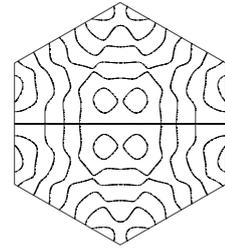
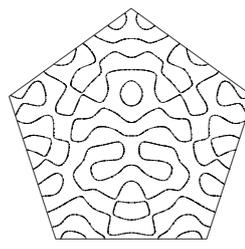
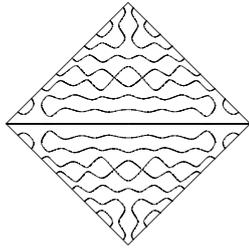
正五边形

正六边形

ku158, enu71472

ku158, enu559142

ku158, enu49201

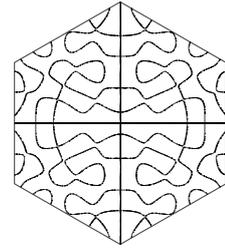
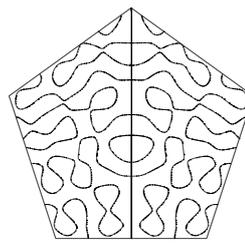
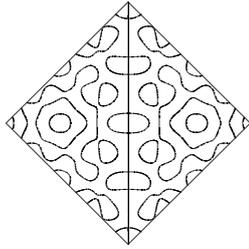


158

ku158, enu718297

ku158, enu518170

ku158, enu48247

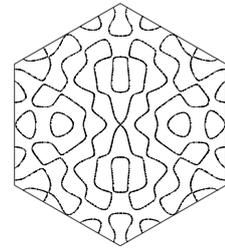
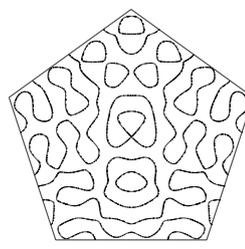
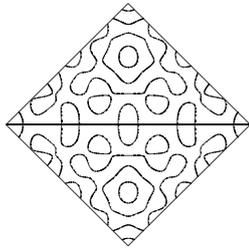


159

ku158, enu718297

ku158, enu518170

ku158, enu48247

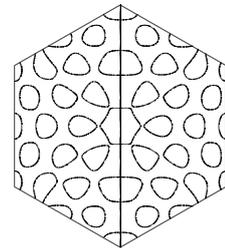
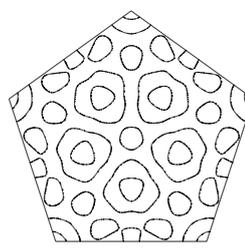
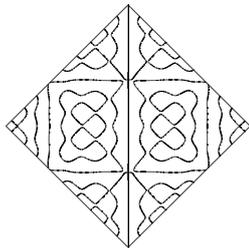


160

ku160, enu741895

ku160, enu532715

ku160, enu48638

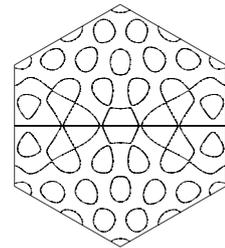
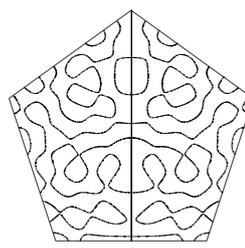
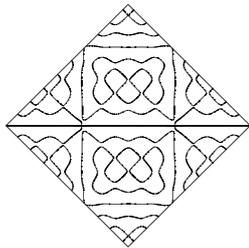


161

ku160, enu741895

ku160, enu54070

ku160, enu48638

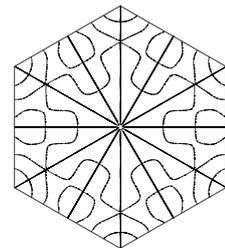
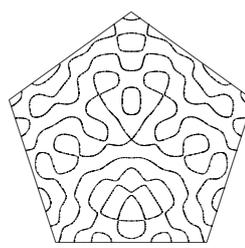
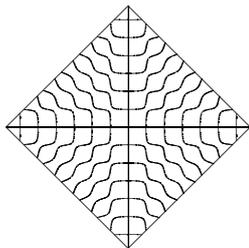


162

ku162, enu752782

ku161, enu54070

ku160, enu48638



163

k

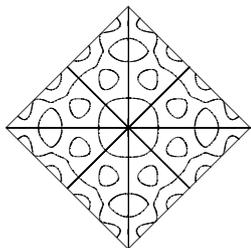
正方形

正五边形

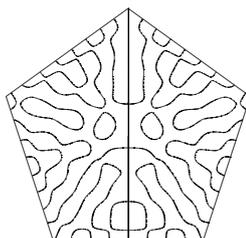
正六边形

164

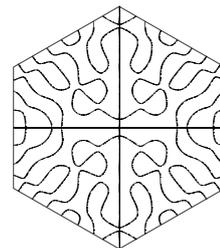
k/163, en/73484



k/163, en/551107

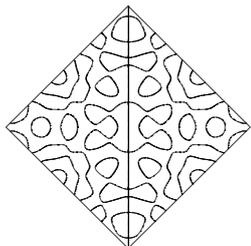


k/163, en/47287

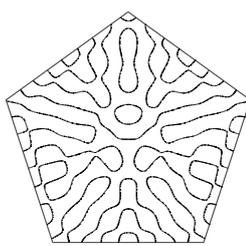


165

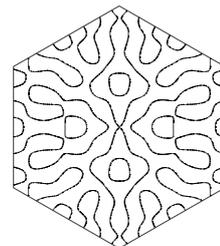
k/164, en/82150



k/163, en/551107

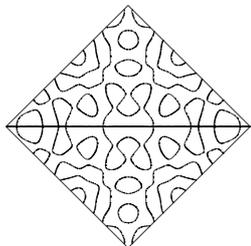


k/163, en/47287

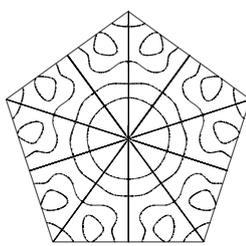


166

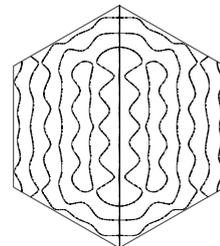
k/164, en/82150



k/165, en/572754

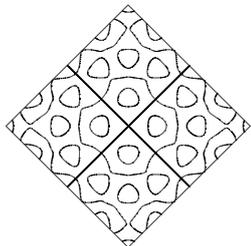


k/165, en/482204

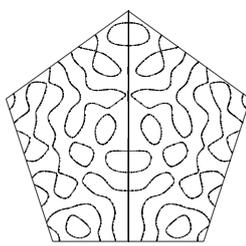


167

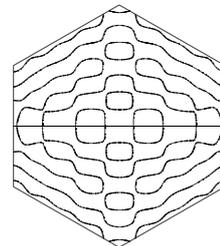
k/166, en/82422



k/166, en/571199

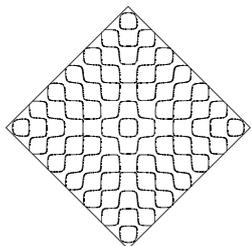


k/165, en/482204

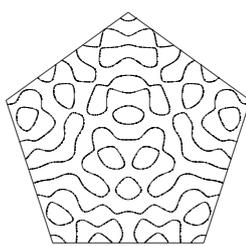


168

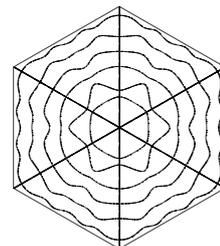
k/167, en/82424



k/166, en/571199

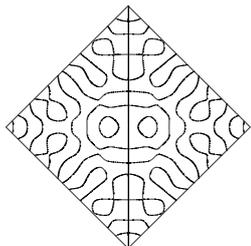


k/167, en/482205

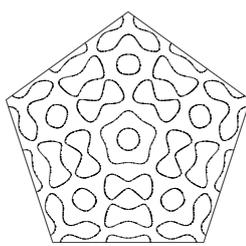


169

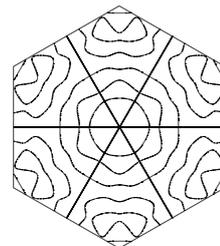
k/168, en/82682



k/168, en/591725



k/168, en/52485



k

正方形

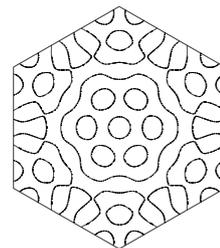
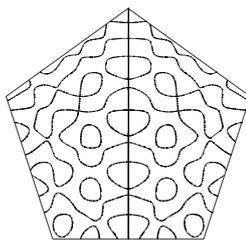
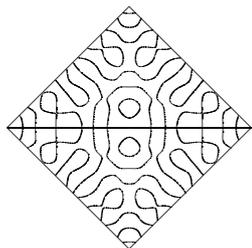
正五角形

正六角形

ku168, ewd09002

ku169, ewd09037

ku169, ewd09025

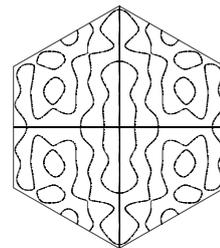
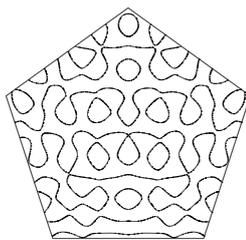
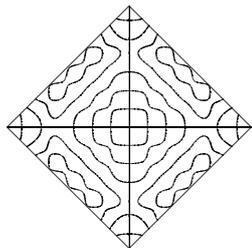


170

ku170, ewd09079

ku169, ewd09037

ku170, ewd09082

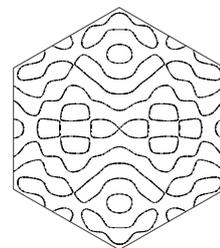
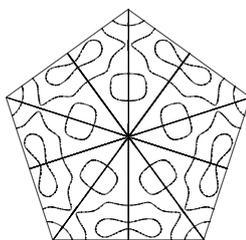
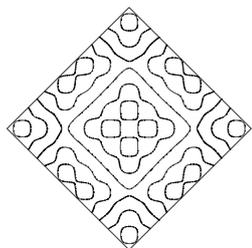


171

ku171, ewd09010

ku171, ewd09116

ku170, ewd09082

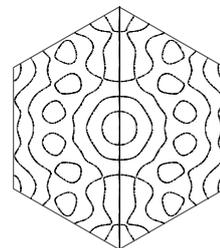
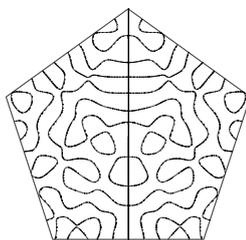
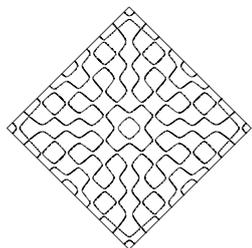


172

ku172, ewd09078

ku172, ewd09079

ku172, ewd09101

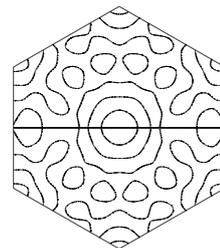
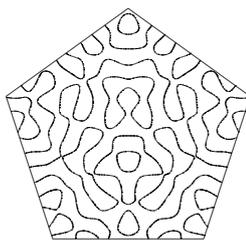
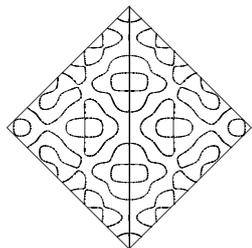


173

ku173, ewd09180

ku172, ewd09079

ku172, ewd09101

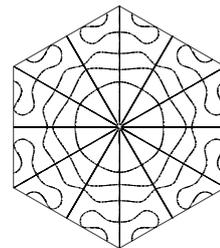
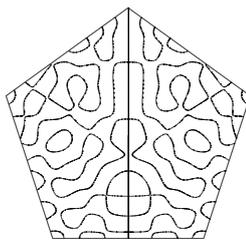
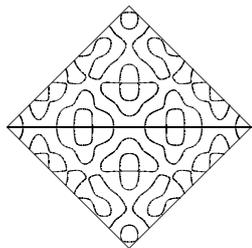


174

ku173, ewd09180

ku174, ewd09253

ku174, ewd09205



175

k

正方形

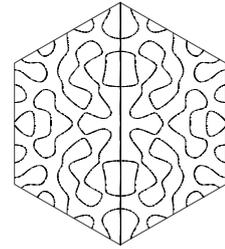
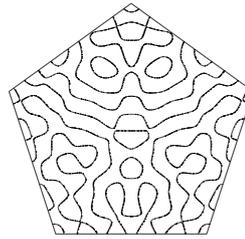
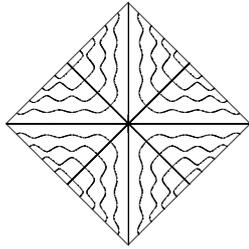
正五边形

正六边形

k/176, en080788

k/176, en046253

k/176, en046316

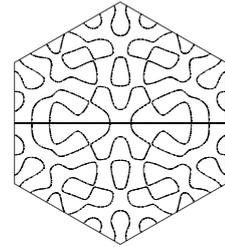
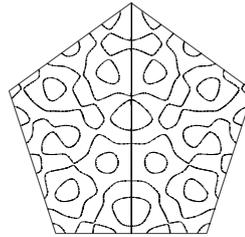
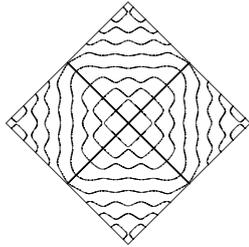


176

k/176, en084326

k/176, en052750

k/176, en046316

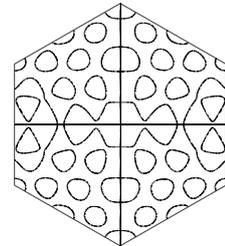
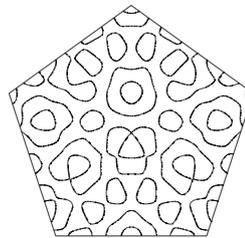
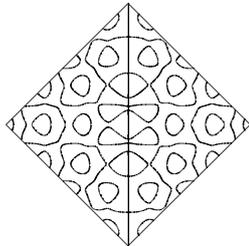


177

k/177, en0501916

k/176, en052750

k/177, en046767

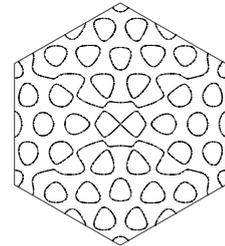
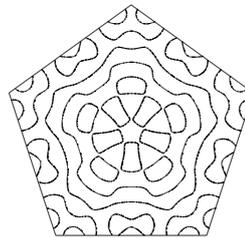
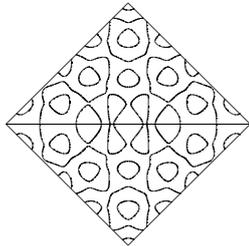


178

k/177, en0501916

k/176, en056852

k/177, en046767

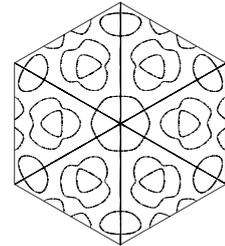
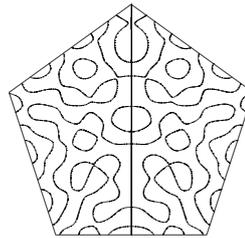
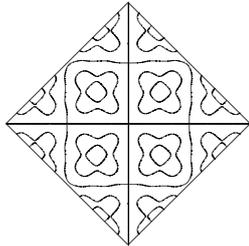


179

k/179, en0207148

k/179, en056881

k/179, en0501916

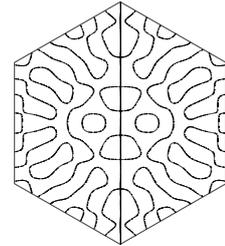
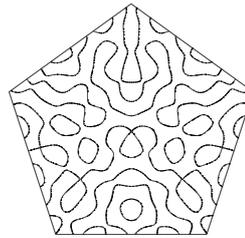
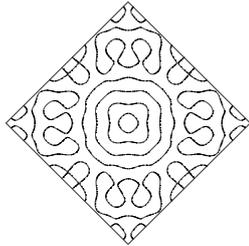


180

k/180, en040081

k/179, en056881

k/180, en070236



181

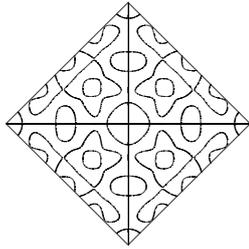
k

正方形

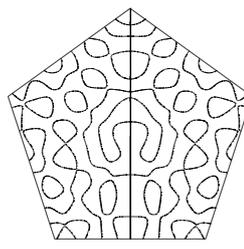
正五角形

正六角形

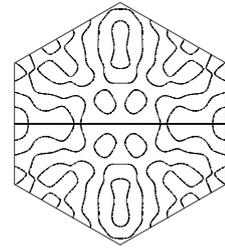
k/181, en/04753



k/181, en/70153

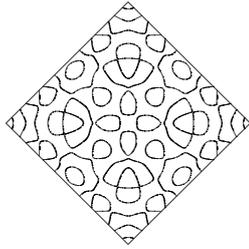


k/181, en/07026

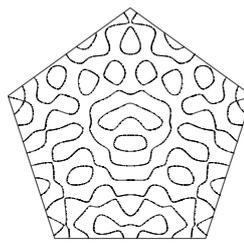


182

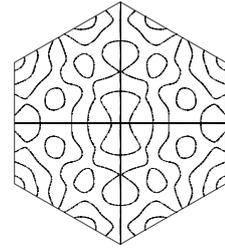
k/182, en/05032



k/181, en/70153

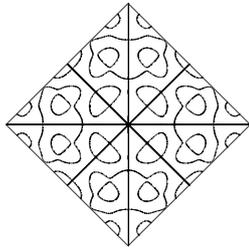


k/182, en/05705

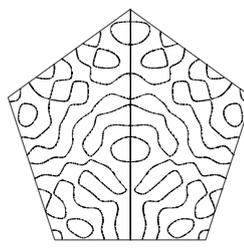


183

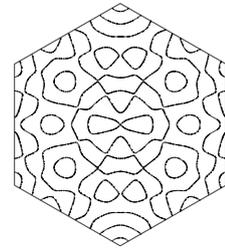
k/183, en/102814-06



k/183, en/71279

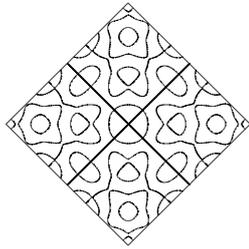


k/182, en/05705

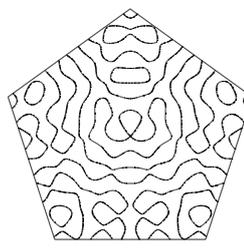


184

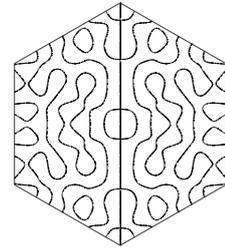
k/184, en/102076-06



k/183, en/71279

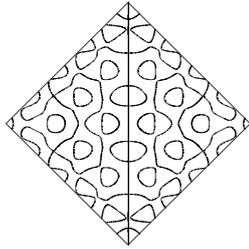


k/184, en/07227

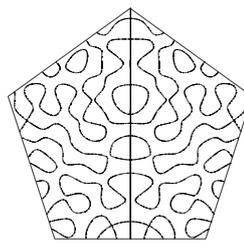


185

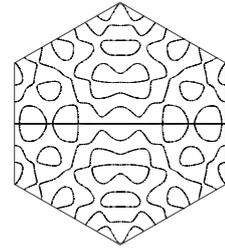
k/185, en/104076-06



k/185, en/72251

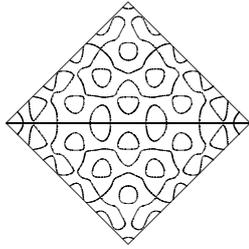


k/184, en/07227

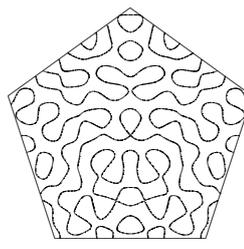


186

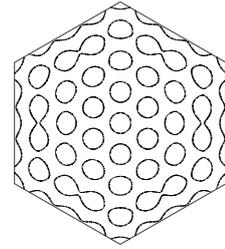
k/185, en/104076-06



k/185, en/72251



k/185, en/02854



187

k

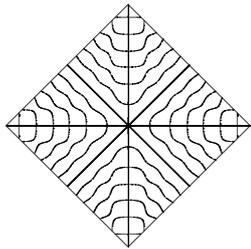
正方形

正五角形

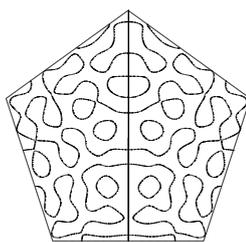
正六角形

188

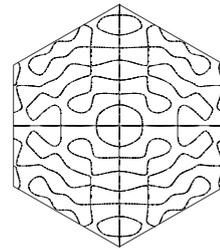
k/187, en1 00224a-05



k/187, en1 70430

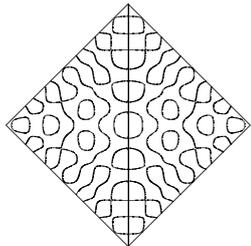


k/187, en1 02073

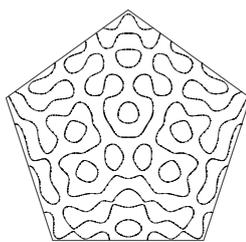


189

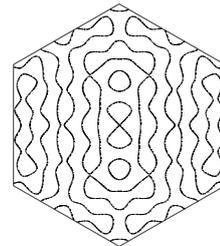
k/188, en1 05454a-05



k/187, en1 70430

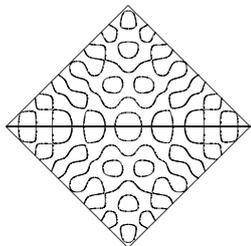


k/187, en1 02073

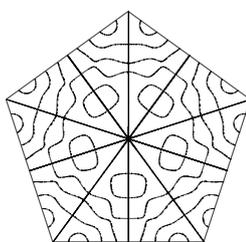


190

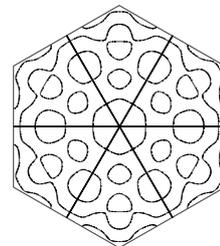
k/188, en1 05454a-05



k/188, en1 70207

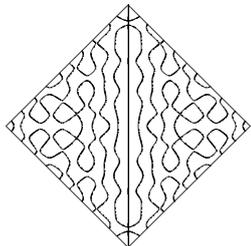


k/188, en1 02073

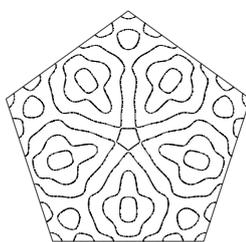


191

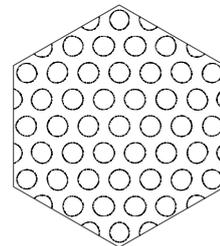
k/190, en1 07347a-05



k/190, en1 70205

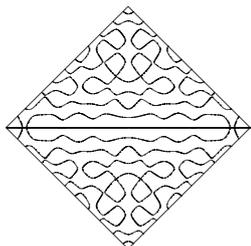


k/190, en1 02766

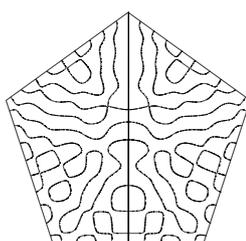


192

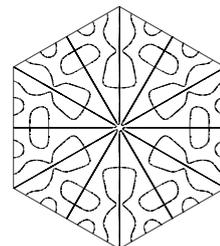
k/190, en1 07347a-05



k/191, en1 70188

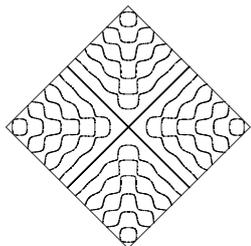


k/191, en1 02025

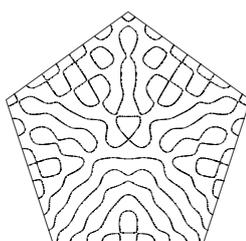


193

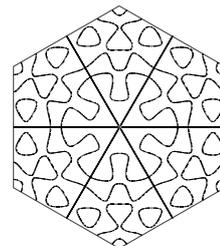
k/192, en1 07954a-05



k/191, en1 70188



k/192, en1 05430



k

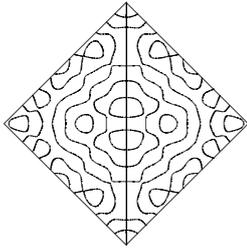
正方形

正五边形

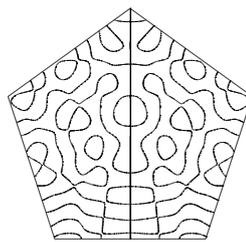
正六边形

194

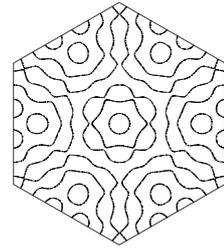
ku193, ew1 10283a-05



ku193, ew1 801051

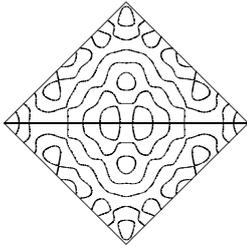


ku193, ew1 692032

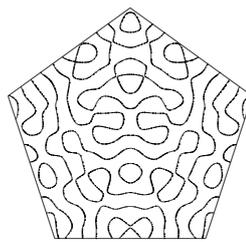


195

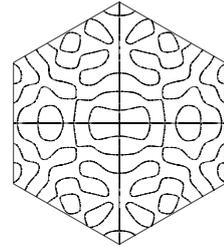
ku193, ew1 10283a-05



ku193, ew1 801051

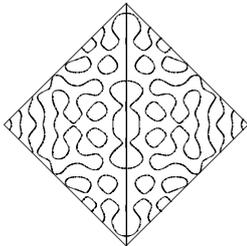


ku194, ew1 692255

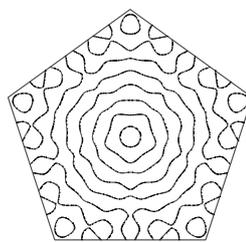


196

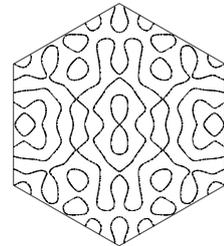
ku195, ew1 112029a-05



ku195, ew1 801052

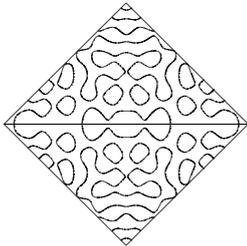


ku194, ew1 692255

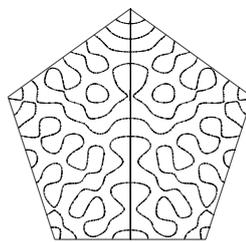


197

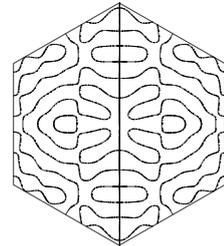
ku195, ew1 112029a-05



ku195, ew1 822880

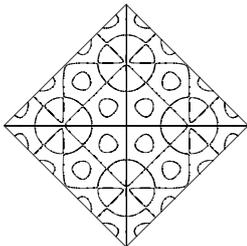


ku195, ew1 672115

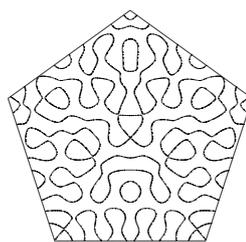


198

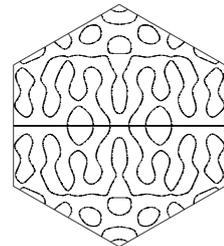
ku197, ew1 15423a-05



ku195, ew1 822880

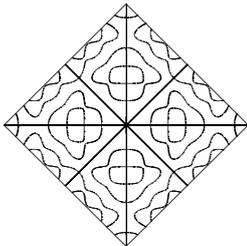


ku195, ew1 672115

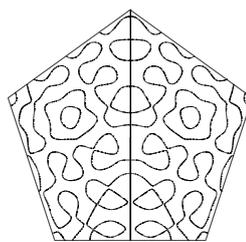


199

ku198, ew1 15472a-05



ku198, ew1 822102



ku198, ew1 674220

