2023年度 信号処理とフーリエ変換 期末試験問題

2024年1月24日 (水曜) 15:00〜16:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の5問に解答せよ。解答の順番は自由である (各問の解答は一箇所にまとめること)。

問 1.　f と g は $\mathbb{R}$ で定義された周期 2π の周期関数であり

$$f(x)=f(x)=\begin{cases} 1 & (0<x<\pi) \\ 0 & (x=0,\pi) \\ -1 & (-\pi<x<0), \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x & (0\le x<\pi) \\ 2\pi-x & (\pi\le x<2\pi) \end{cases}$$

を満たすとする。
(1) f と g のグラフを描け。(2) f と g の Fourier 級数を求めよ (cos, sin を用いるもの)。(3) f と g の Fourier 級数のうち、一様収束するのはどちらか、Gibbs の現象を起こすのはどちらか、それぞれ理由をつけて答えよ。

問 2.　$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (|x|<1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$ で定めるとき、以下のものを求めよ (計算せよ)。
(2), (3) について、知っている公式を用いる場合は、その公式を書き、可能ならばそれを導出すること。
(1) f の Fourier 変換 $g:=\mathscr{F}f$　(2) g の Fourier 変換 $h:=\mathscr{F}g=\mathscr{F}\mathscr{F}f$　(3) $\mathscr{F}[f(x-1)](\xi)$ $(\xi\in\mathbb{R})$

問 3.　数列 $f=\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の Fourier 変換 (離散時間 Fourier 変換) $\mathscr{F}f$ を

$$\mathscr{F}f(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\xi}\quad(\xi\in\mathbb{R})$$

で定める。また 数列 $f=\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と $g=\{g(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の畳み込み $f*g$ を

$$f*g(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(n-k)g(k)$$

で定める (以下で現れる級数はすべて収束すると仮定する)。

(1) $\mathscr{F}f$ は周期 2π であることを示せ。また $\mathscr{F}f$ から $f(n)$ を求める公式 (反転公式) を書け (公式の導出は不要)。

(2) $\mathscr{F}[f*g]=\mathscr{F}f\mathscr{F}g$ が成り立つことを示せ。

問 4.　$T>0$, $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 T の滑らかな関数, $N\in\mathbb{N}$ とするとき、$\omega:=e^{2\pi i/N}$, $h:=\dfrac{T}{N}$, $x_j:=jh$ $(j\in\mathbb{Z})$, $f_j:=f(x_j)$ $(j\in\mathbb{Z})$, さらには $C_n:=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}f_j\omega^{-nj}$ $(n\in\mathbb{Z})$ とおく。
(1) $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は周期 N の周期数列であることを示せ。　(2) $C_n=\displaystyle\sum_{m\equiv n \pmod N}c_m$ が成り立つことを示せ。
(3) 自然数 M は $N>2M$ を満たすとする。$f(t)=\displaystyle\sum_{n=-M}^{M}c_ne^{in\frac{2\pi}{T}t}$ のとき、c_n を C_m を用いて表せ (講義で紹介した式を書くだけで良い)。

問 5.　連続信号 $X=X(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ をサンプリング周波数 F_s (>0) でサンプリングして得られた離散信号を $x=\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とする。

(1) $x(n)$ を X, F_s, n を用いて表せ。

(2) $\Omega>0$, $X(t)=e^{i\Omega t}$ とするとき、$x=\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は等比数列であることを示せ。x から X が復元できるための条件を記せ。また、x の角周波数 (講義では ω という文字で表した) とは何か。Ω, F_s を用いて表せ。

計算があまり面倒にならないような問題にしてみました。

略解

問 1 解説

(1) f と g の $-10 \leq x \leq 10$ の範囲のグラフはそれぞれ次のようになる (本当は●○使いたいところですが、コンピューター上では少し面倒なので省略します)。

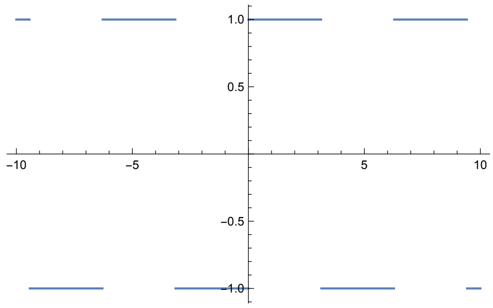

図 1: f のグラフ

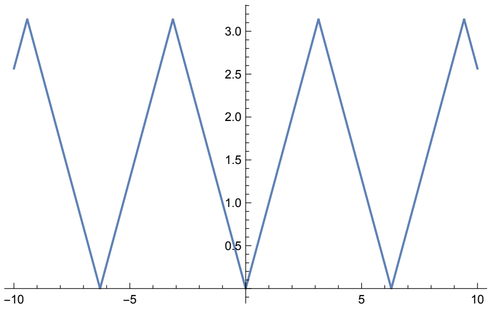

図 2: g のグラフ

(2) f は奇関数であるから sin のみ、g は偶関数であるから cos のみで展開される。

f について

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2(1+(-1)^{n+1})}{n\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{4}{n\pi} = \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & (n \text{ が奇数のとき}, n = 2k+1 \text{ とおく}) \end{cases} \end{aligned}$$

であるから

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x.$$

g について

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx \\ &= \begin{cases} \pi & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{2(-1+(-1)^n)}{n^2\pi} & (n \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \pi & (n = 0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi} & (n \text{ が奇数のとき}, n = 2k+1 \text{ とおく}) \\ 0 & (n \neq 0 \text{ かつ } n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

であるから

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi}\cos(2k+1)x.$$

(3) f は不連続かつ区分的に C^1 級であるから、f の Fourier 級数については Gibbs の現象が起こる。また、g は連続かつ区分的に C^1 級であるから、g の Fourier 級数は一様収束する。■

- (1) について: 偶関数・奇関数であるか、連続かどうか分かるように (1 周期を超えて) グラフを描きなさい、と授業で指導している。それが出来なかった人は以下正しく解けないかもしれない。
- (3) 「連続かつ区分的 C^1 級ならば一様収束」「不連続かつ区分的 C^1 級ならば Gibbs の現象が起こる」この 2 つは覚えて欲しい。後者は有名だけれど、前者とセットで覚えることで関数の連続性の影響が理解できる。

問 2 解説

(1)

$$g(\xi)=\mathscr{F}f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}.$$

(2) 反転公式 $\mathscr{F}^*\mathscr{F}f=f$, また Fourier 変換・共役 Fourier 変換の定義から分かる $\mathscr{F}^*g(x)=\mathscr{F}g(-x)$ より $\mathscr{F}\mathscr{F}f(x)=f(-x)$ (ていねいに説明した人も多く、それは良かったです). ゆえに

$$\mathscr{F}\mathscr{F}f(x)=f(-x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (|x|<1)\\ 0 & (|x|>1).\end{cases}$$

(3) $y=x-1$ とおくと、$dx=dy$, $x=(y+1)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[f(x-1)\right](\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-1)e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i(y+1)\xi}dy\\&=e^{-i\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-iy\xi}dy=e^{-i\xi}\mathscr{F}f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi}\frac{\sin\xi}{\xi}.\blacksquare\end{aligned}$$

問 3 解説

(1) $e^{2\pi i}=1$ であるから、n が整数のとき $e^{2n\pi i}=\left(e^{2\pi i}\right)^n=1^n=1$. ゆえに

$$\mathscr{F}f(\xi+2\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in(\xi+2\pi)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\xi}e^{-i2n\pi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\xi}=\mathscr{F}f(\xi).$$

ゆえに $\mathscr{F}f$ は周期 2π である。

反転公式は $\widehat{f}$ から f を求める式で

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(\xi)e^{in\xi}\,d\xi.$$

(2) 和の順序交換、変数 n を $\ell:=n-k$ で定める変数 ℓ に置き換えることを行って

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g](\xi)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f*g(n)e^{-in\xi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(n-k)g(k)\right)e^{-in\xi}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n-k)e^{-in\xi}\right)g(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}f(\ell)e^{-i\ell\xi}e^{-ik\xi}\right)g(k)\\&=\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}f(\ell)e^{-i\ell\xi}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(k)e^{-ik\xi}\right)\\&=\mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(\xi).\blacksquare\end{aligned}$$

(Fouier 変換は 4 種類あるけれど、離散時間 Fourie 変換はノーマークだったのか、(2) で周期性とかおかしなことを書いた人がいました。和の順序交換をしないような全然分かっていない答案もありました。)

問 4 解説

(1) $\omega^{-(n+N)j}=\omega^{-nj}\omega^{-Nj}=\omega^{-nj}$ であるから、

$$C_{n+N}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f_j\omega^{-(n+N)j}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f_j\omega^{-nj}=c_n.$$

(2) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\frac{2\pi}{T}x}$ であるから、

$$f_j=f(x_j)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\frac{2\pi}{T}x_j}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inj\frac{2\pi}{T}h}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\omega^{nj}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\omega^{-nj}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\omega^{mj}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sum_{j=0}^{N-1}\omega^{(m-n)j} = \frac{1}{N}\sum_{m\equiv n} c_m N = \sum_{m\equiv n} c_m. \end{aligned}$$

(3) $0 \le n \le M$ のとき、$m \equiv n \pmod N$, $0 \le m \le N-1$ となる m は n のみであるから、$C_n = c_n$.

また $-M \le n < 0$ のとき、$m \equiv n \pmod N$, $0 \le m \le N-1$ となる m は $N+n$ のみであるから、$C_{N+n} = c_n$.

$$c_n = \begin{cases} C_n & (0 \le n \le M) \\ C_{N+n} & (-M \le n < 0). \blacksquare \end{cases}$$

応用上は、(3) がレポート課題 2 でも出て来たところで、とても重要です。しかし正答した人がいなかったのは悲しいです。

問 5 解説

(1) サンプリング周期を T_s とすると、$T_s = \frac{1}{F_s}$ であるから

$$x(n) = X(nT_s) = X\left(\frac{n}{F_s}\right).$$

(2)

$$x(n) = X\left(nT_s\right) = e^{i\Omega(nT_s)} = \left(e^{i\Omega T_s}\right)^n = \left(e^{i\Omega/F_s}\right)^n.$$

ゆえに $\{x(n)\}$ は公比 $e^{i\frac{\Omega}{F_s}}$ の等比数列である。

X の角周波数は Ω であるから、X の周波数は $\frac{\Omega}{2\pi}$. サンプリング定理より $F_s > 2\cdot\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\Omega}{\pi}$ であれば、$\{x(n)\}$ から $X(t)$ が復元できる。同値な条件、例えば $\frac{\Omega}{F_s} < \pi$ としても良い。

$\{x(n)\}$ の角周波数とは、$\omega = \Omega T_s = \frac{\Omega}{F_s}$ のことをいう。■

レポート課題 2 は、毎年同じ内容だけれど、座学で学んだことをリアルの世界でちゃんと使ってみる、という内容で重要と考えています。この問題も、複雑な式変形は全然出て来ないけれど、リアルの世界とつなぐ意味で重要です。できないという人が少なくなかった。