応用複素関数

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/

桂田 祐史

katurada＠meiji.ac.jp, 910 号室

2015 年 3 月 12 日, 2017 年 2 月 27 日

水曜 5 限, 310 教室で講義します。

目 次

2016 年度まで、「Cauchy の積分定理 再説」という節があったが、その内容は「複素関数 講義ノート」 [1] に移したし、この「応用複素関数」では講義することをやめたので削除した。

記号・用語

コンパクト集合	$\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}$ の部分集合がコンパクトとは有界閉集合であること (一般には、任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在すること)
$D(c;r)$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z-c\rvert < r\}$
D_1	$D(0;1)$ のこと (頻出するので短い表記を用意)。

1　2016 年度

1.1　「はじめに」

2 年秋学期に講義している「複素関数・同演習」の内容は、理工系の学部で良くある関数論入門 (留数定理の簡単な応用まで) と、その理論 (原則すべてを証明する、ということ) であった。

複素関数論の領域は、この先、Riemann 球面, Riemann 面, 代数関数, 多変数関数論, 複素領域の常微分方程式, 特殊関数, 佐藤の超関数, … と広大に広がっている。

この講義では、応用、特にコンピューターが有効に使えそうなトピックスをいくつか選んで解説する。何らかの意味で「役に立つ」話がほとんどだが、その応用自体に価値があるというだけでなく、理論の活かし方、大切さが分かるような講義をすることを目標としている。

コンピューターが使える=アルゴリズムがある、ということで、講義の精神自体は、有名な Henrici [2] のテキストのそれに近いかもしれない。

Oh-o! Meiji に載せてあるシラバスとは内容が変わる予定である。現時点でのシラバス案は、2016 年度応用複素関数シラバス (案)[1] に載せてある。

期末試験をするが、レポートの比重を高くする予定である。

使用するソフトウェアは、Mathematica, C++, FreeFem++ となる予定である。

1.2　7/6 の段階で

4/13, 4/20 に 2 節の内容を講義した。

4/27〜6/1 (5 回) は数値積分について講義をした。見通しが甘く、関数論的な話をする前に時間を費やしてしまい、じっくり解説したいところまで行き着かなかった。

> 「数値積分」
> http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/numerical-integration.pdf

2　続 留数定理の応用

せちがらいことを言うと、複素関数論は理工系の大学院入試でも良く出題され[2]、ここで述べることも役に立ったりするかもしれない。でもそういうことはとりあえず脇に置いて、結果そのものよりも、どのようにしてそれが導かれるかを見て、留数定理の強力さを鑑賞してもらいたい。

2.1　留数定理と留数の計算 (思い出し)

(「複素関数」講義ノート [1] の第 11 節からの抜き書きである。)

「複素関数」では次の形の留数定理を与えた。

[1] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/applied-complex-function-syllabus.pdf

[2] ただし、明治大学先端数理科学研究科の現象数理学専攻の試験は該当しない (念のため)。

命題 2.1 (留数定理) D は $\mathbb{C}$ 内の有界領域で、その境界 ∂D は区分的 C^1 級単純閉曲線とする (向きはいわゆる正の向きとする)。また c_1, c_2, $\cdots$, c_N は D 内の相異なる点であり、Ω は $\overline{D} \subset \Omega$ を満たす $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \setminus \{c_1, c_2, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき、

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}\left(f; c_j\right).$$

留数の計算について、良く使うことを復習しておこう。

命題 2.2 (1 位の極の留数) c が f の高々 1 位の極ならば、

$$\operatorname{Res}(f;c) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z). \tag{1}$$

命題 2.3 (有理関数の分母の 1 位の零点における留数) $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、c は $P(z)$ の 1 位の零点ならば ($P(c)=0$ かつ $P'(c)\neq 0$ と言っても良い)、c は f の高々 1 位の極で

$$\operatorname{Res}(f;c) = \frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{2}$$

命題 2.4 (極の留数) c が f の高々 k 位の極ならば、

$$\operatorname{Res}(f;c) = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

次の命題は、「複素関数」では演習問題扱いだったが、後の例でしばしば $\varphi(z)=\log z$ あるいは $\varphi(z)=s_j(z)$ (s_j の定義は後述) として利用することになる。

命題 2.5 (1 位の極を持つ関数と正則関数の積の留数) c は f の 1 位の極であり、φ は c の近傍で正則とする。このとき

$$\operatorname{Res}\left(f\varphi; c\right) = \varphi(c)\operatorname{Res}\left(f;c\right).$$

証明　(念のため略証だけでも)

$$\operatorname{Res}\left(f\varphi;c\right) = \lim_{z\to c}\left((z-c)f(z)\varphi(z)\right) = \lim_{z\to c}\left((z-c)f(z)\right)\lim_{z\to c}\varphi(z) = \operatorname{Res}(f;c)\varphi(c). \blacksquare$$

2.2 定積分の計算

これまで有理関数 f に対して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ の値を留数を利用して計算する例を学んだ。

以下の 2 つの定理は留数定理を用いて証明される (「複素関数」講義ノート [1] の第 12 節を見よ)。

命題 2.6 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

命題 2.7 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $a > 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$$

(証明は「複素関数」の講義ノートに書いてある。)

2.2.1 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$

ここでは、半無限区間 $[0, \infty)$ 上の積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ の値を計算する方法を紹介する。

(「複素関数」では f が偶関数の場合に、$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ として、$(-\infty, \infty)$ の場合に帰着したが、以下述べるのは、f が偶関数とは限らない場合の話である。)

次の定理が 4/13 のメインの内容である。

命題 2.8 $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, ここで $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in [0, \infty))$ $P(x) \neq 0$ が成り立つとする。このとき

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = -\sum_{c \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)} \operatorname{Res}(f(z)\log z; c). \tag{3}$$

ただし $\log$ の値は、虚部が $(0, 2\pi)$ の範囲にあるように定める。

この命題の証明に入る前に、複素関数としての $\log$ について復習しよう。

複素対数関数 log

$z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$ とするとき、$e^w=z$ を満たす w は、

$$w=\log r+i(\theta+2n\pi)\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

(ここで $\log r$ は実関数としての対数関数を表すとする。以下の $\log x$ もそうである。) これを $\log z$ と表す。無限にたくさんの値があることに注意が必要である。使うときは、考える範囲を限定して、関数が連続 (結果的に正則になる) となるように値を 1 つうまく選択することが多い。

$z\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ であれば、$\theta\in(0,2\pi)$ と取り、

$$\log z=\log r+i\theta$$

と定めると良い。

$x>0$ とするとき、

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im}z>0}}\log z=\log x,\qquad \lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im}z<0}}\log z=\log x+2\pi i.$$

(「複素関数」では虚数部分が螺旋階段の高さ、という話をした。$z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ の場合に、$\theta\in(-\pi,\pi)$, $\log z=\log r+i\theta$ とするのが、対数関数の主値 Log であった。)

証明　方針は、$0<\varepsilon<R$, $0<\delta<\pi$ となる ε,R,δ に対して、$f(z)\log z$ を図 (準備中) の閉曲線 $C_1+C_2+C_3+C_4$ に沿って積分し、留数定理を用いて、$\delta\to0$ として、それから $\varepsilon\to0$, $R\to\infty$ とする。

図の代わりに

図を描くのがおっくうなので、とりあえず式を書いておきます。

$$\begin{aligned}
C_1\colon z&=te^{i\delta}\quad(\varepsilon\le t\le R),\\
C_2\colon z&=Re^{i\theta}\quad(\delta\le\theta\le2\pi-\delta),\\
-C_3\colon z&=te^{i(2\pi-\delta)}\quad(\varepsilon\le t\le R),\\
-C_4\colon z&=\varepsilon e^{i\theta}\quad(\delta\le\theta\le2\pi-\delta).
\end{aligned}$$

ε,δ が十分小さく、R が十分大きければ、$f(z)\log z$ の ($\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ における) 特異点 (極) は、すべて閉曲線 $C_1+C_2+C_3+C_4$ の囲む領域に含まれる。留数定理から

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4}f(x)\log z\,dz=2\pi i\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{Res}\left(f(z)\log z;c\right).$$

$\delta \to 0$ とすると、$\delta \le \theta \le 2\pi - \delta$ であったのが、$0 \le \theta \le 2\pi$ となること等から[3]、

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)\log z\,dz &\to \int_\varepsilon^R f(x)\log x\,dx,\\
\int_{C_3} f(z)\log z\,dz &\to -\int_\varepsilon^R f(x)\left(\log x + 2\pi i\right)dx,\\
\int_{C_2} f(z)\log z\,dz &\to \int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right)\left(\log R + i\theta\right)\cdot iRe^{i\theta}d\theta,\\
\int_{C_4} f(z)\log z\,dz &\to -\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)\left(\log\varepsilon + i\theta\right)\cdot i\varepsilon e^{i\theta}d\theta.
\end{aligned}$$

最初の 2 つから、$\delta \to 0$ とするとき

$$\int_{C_1} f(z)\log z\,dz + \int_{C_3} f(z)\log z\,dz \to -2\pi i\int_\varepsilon^R f(x)\,dx.$$

実数 M が存在して、十分大きい任意の R に対して、$\left|f(Re^{i\theta})\right| \le \dfrac{M}{R^2}$ であるから、$R \to \infty$ とするとき、

$$\left|\int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right)\left(\log R + i\theta\right)\cdot iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \frac{M}{R^2}\left(|\log R| + |2\pi i|\right)R\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi M\frac{\log R + 2\pi}{R} \to 0.$$

実数 M' が存在して、十分小さい任意の ε に対して、$\left|f(\varepsilon e^{i\theta})\right| \le M'$ であるから、$\varepsilon \to 0$ とするとき、

$$\left|-\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)\left(\log\varepsilon + i\theta\right)\cdot i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right| \le M'\left(|\log\varepsilon| + |2\pi i|\right)\varepsilon\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi M'\left(|\log\varepsilon| + 2\pi\right)\varepsilon \to 0.$$

まとめると、$\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ とするとき、

$$-2\pi i\int_0^\infty f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

$-2\pi i$ で割り算して、結果を得る。■

以上、$\log z$ が $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ での連続関数にはならないことをうまく利用した、とも言える計算である。

(4/13 の講義で具体例をあげなかったので、補足。4/20 に説明するかどうか…)

例 2.9 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$. (そもそも原始関数が分かるので容易に計算できるし、留数定理を使うにしても偶関数であるから命題 2.6 を使うことが出来るが、ここでは命題 2.8 を使ってみる。)

$$I = -\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1}; c\right) = -\sum_{c=i,-i}\operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1}; c\right).$$

[3] ここは説明を少し簡略化してある。桂田 [1] には、やや整理不十分ではあるが、省略せずに書いてある。

$i,\ -i$ は 1 位の極であるから、

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1}; i\right) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\log z}{z^2+1} = \left.\frac{\log z}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{\pi i/2}{2i} = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1}; -i\right) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{\log z}{z^2+1} = \left.\frac{\log z}{z-i}\right|_{z=-i} = \frac{3\pi i/2}{-2i} = -\frac{3\pi}{4}.$$

ゆえに

$$I = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

例 2.10

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$$

$z^3+1=0$ の根は $z = e^{\pi i/3}, e^{\pi i}, e^{5\pi i/3}$ であるから、

$$I = -\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1}; c\right) = -\sum_{c=e^{\pi i/3}, e^{\pi i}, e^{5\pi i/3}} \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1}; c\right).$$

$c = e^{\pi i/3}, e^{\pi i}, e^{5\pi i/3}$ のとき、$c^3 = -1$ であるから、

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1}; c\right) = \left.\frac{\log z}{(z^3+1)'}\right|_{z=c} = \left.\frac{\log z}{3z^2}\right|_{z=c} = -\left.\frac{z\log z}{3}\right|_{z=c}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\left(\left. z\log z\right|_{z=e^{\pi i/3}} + \left. z\log z\right|_{z=e^{\pi i}} + \left. z\log z\right|_{z=e^{5\pi i/3}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{\pi}{3}i + (-1)\cdot\pi i + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{5}{3}\pi i\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}. \blacksquare \end{aligned}$$

余談 2.1 (対数関数の主値の利用) この文書では、複素対数関数は、主値 Log か、偏角を $[0,2\pi)$ の範囲に選ぶもの、どちらか便利な方を使うことが多い。ところでコンピューターのプログラミング言語には、主値しか用意されていない場合が多い。そこで、公式をなるべく主値を用いて書く、というやり方がある。実は

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\mathrm{Log}(-z)\,dz = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}(f(z)\,\mathrm{Log}(-z); c).$$

が成り立つ (森・杉原 [3] pp. 160–163 など)。 ■

2.2.2 $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$

上の例と同じ積分路を用いた議論で、次の結果が得られる (上の例よりもこちらの方が有名かもしれない)。

命題 2.11 (Mellin 変換) $0 < \alpha < 1$, $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x > 0)\ P(x) \neq 0$, 0 は f の高々1位の極 (1位の極または正則点) とするとき、

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{c \neq 0} \operatorname{Res}\left(z^\alpha f(z); c\right).$$

ただし $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, $\log z$ の値は、虚部が $(0, 2\pi)$ の範囲にあるように定める。

証明　$\log z$ を上の例と同じように定め、z^α を $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ で定める。$x > 0$ とするとき、x^α を実関数としての冪関数として、

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z > 0}} z^\alpha = x^\alpha, \qquad \lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z < 0}} z^\alpha = x^\alpha e^{2\alpha\pi i}.$$

(以下少し雑。暇が出来たら直す。曲線の記号は、命題 2.8 と同じものを使う。)

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz &\to \int_\varepsilon^R x^\alpha f(x)\,dx, \\
\int_{C_3} z^\alpha f(z)\,dz &\to -e^{2\pi\alpha i} \int_\varepsilon^R x^\alpha f(x) dx, \\
\int_{C_2} z^\alpha f(z)\,dz &\to \int_0^{2\pi} e^{\alpha(\log R + i\theta)} f\left(Re^{i\theta}\right) \cdot iRe^{i\theta} d\theta, \\
\int_{C_4} z^\alpha f(z)\,dz &\to -\int_0^{2\pi} e^{\alpha(\log \varepsilon + i\theta)} f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right) \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta.
\end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
&\left(1 - e^{2\pi\alpha i}\right) \int_\varepsilon^R x^\alpha f(x)\,dx + iR^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta + i\varepsilon^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta} f(\varepsilon e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \\
&\quad = 2\pi i \sum_{\varepsilon < |c| < R} \operatorname{Res}\left(z^\alpha f(z); c\right).
\end{aligned}$$

実数 M が存在して、十分大きい任意の R に対して、$\left|f(Re^{i\theta})\right| \leq \dfrac{M}{R^2}$ であるから、$R \to \infty$ とするとき、

$$\left| R^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq R^{\alpha+1} \cdot \frac{M}{R^2} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi M R^{\alpha-1} \to 0.$$

実数 M' が存在して、曲線 C_4 上で $|f| \leq \dfrac{M'}{\varepsilon}$ であるから、$\varepsilon \to \infty$ とするとき、

$$\left| \varepsilon^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta} f(\varepsilon e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \varepsilon^{\alpha+1} \cdot \frac{M'}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi M' \varepsilon^\alpha \to 0.$$

以上より

$$\left(1 - e^{2\pi\alpha i}\right) \int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{c \neq 0} \operatorname{Res}\left(z^\alpha f(z); c\right).$$

割り算して証明が完了する。 ■

例 2.12 $0 < \alpha < 1$ とするとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; i\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; -i\right)\right)\\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\frac{e^{\pi\alpha i/2}}{2i} - \frac{e^{3\pi\alpha i}/2}{2i}\right)\\ &= \frac{\pi\left(e^{\pi\alpha i/2} - e^{3\pi\alpha i/2}\right)}{1-e^{2\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{2\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}.\blacksquare\end{aligned}$$

この例については、Mathematica, Maple 等でも問題なく計算できる (それぞれ `Integrate[x^a/(1+x^2), {x,-Infinity,Infinity}]`, `integrate(x^a/(1+x^2),x =-infinity..infinity)` と入力する)。 ■

例 2.13 $0 < \alpha < 1$ とするとき、

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.\blacksquare$$

(準備中)

2.2.3 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

時間が余ったら紹介しようと考えていた有名な定積分であるが、4/13 の講義で話すことを狙っていたけれど、残念ながら話せなかった。

例 2.14

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

以下の証明はやや見通しが悪いので、証明に入る前に少し考えてみる。被積分関数は偶関数であるから、$I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ と変形できるが、$\sin z/z$ は有理式ではない。特に z が虚数のとき、$|\sin z|$ は大きくなりうるので、これまでのような (命題 2.6 の証明で行ったような) 議論は通用しない。そこで (命題 2.7 の例でも使った) 等式

$$\frac{\sin x}{x} = \mathrm{Im}\,\frac{e^{ix}}{x}$$

を使うことを考える。例えば

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\,\frac{e^{ix}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx \quad (\text{最後の等号は問題がある}).$$

おっと、$\dfrac{e^{iz}}{z}$ は $z=0$ を 1 位の極に持つので、最右辺の積分は通常の意味では収束しない。いわゆる主値積分

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right)$$

と解釈すればうまく行く。以下では、主値積分という言葉が出さないが、本質的にはそれを計算していることになる。
(ここから証明) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$, $0<\varepsilon<R$,

$$\begin{aligned}C_R\colon z&=Re^{i\theta}\quad(\theta\in[0,\pi]),\\ C_\varepsilon\colon z&=\varepsilon e^{i\theta}\quad(\theta\in[0,\pi])\end{aligned}$$

とおき、図の閉曲線に沿って積分すると、Cauchy の積分定理から、

$$0=\int f(z)\,dz=\int_\varepsilon^R f(x)\,dx+\int_{C_R}f(z)\,dz+\int_{-R}^{-\varepsilon}f(x)\,dx-\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz.$$

(工事中 — 複素関数の講義ノートには書いてある。整理して移すのをしばらくサボる。)

2.3 級数の和の計算

(4/20 に話す予定の話題。ここは説明が粗いというか、疎である。要工事。)
この項の内容は (有名であり、色々な本に載っているが)、ほぼすべて一松 [4] から採った。
色々な定積分が留数を用いて計算出来るのとほぼ同様に、級数の和を留数を用いて計算出来る場合がある。
a_n が n の "簡単な" 式 (具体的には、f を正則関数として、$a_n=f(n)$) の場合に

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n \quad\text{または}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n a_n$$

を計算しよう。

2.3.1 準備

$$s_1(z):=\frac{\pi}{\sin\pi z}\quad(\pi\operatorname{cosec}\pi z\ \text{とも書かれる}), \tag{4}$$

$$s_2(z):=\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}\quad(\pi\cot\pi z\ \text{とも書かれる}) \tag{5}$$

とおく。分母、分子はいずれも $\mathbb{C}$ 全体で正則である。分母 $\sin\pi z$ の零点は $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ であり、その位数は 1 である。ゆえに、これらは $s_1(z)$, $s_2(z)$ の 1 位の極であり、留数は

$$\operatorname{Res}(s_1;n)=\left.\frac{\pi}{(\sin\pi z)'}\right|_{z=n}=(-1)^n,\quad \operatorname{Res}(s_2;n)=\left.\frac{\pi\cos\pi z}{(\sin\pi z)'}\right|_{z=n}=1\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

s_1, s_2 を指数関数を用いて表すと

$$s_1(z)=\frac{2\pi i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}},\quad s_2(z)=\pi\frac{2i\left(e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}\right)}{2\left(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}\right)}=i\pi\frac{1+e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}}.$$

これから、$x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$ とするとき、次の評価が得られる (すぐ後の積分の評価で必要になる)。

$$|y| = N + 1/2 \quad \Rightarrow \quad |s_1(z)| \le 2\pi e^{-\pi N}, \quad |s_2(z)| \le 2\pi, \tag{6}$$

$$|x| = N + 1/2 \quad \Rightarrow \quad |s_1(z)| \le \frac{\pi}{\cosh \pi y} \le \pi, \quad |s_2(z)| \le \pi\, |\tanh \pi y| \le \pi. \tag{7}$$

問 1. (6), (7) を示せ。

特に、任意の自然数 N に対して、$R := N + 1/2$ として、$\pm R \pm iR$ を 4 頂点とする正方形の周を正の向きに一周する曲線を Γ_N とすると、

$$z \in \Gamma_N \quad \Rightarrow \quad |s_1(z)| \le 2\pi, \quad |s_2(z)| \le 2\pi. \tag{8}$$

2.3.2 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$

命題 2.15 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$, $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $P(n) \ne 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}(f(z)s_2(z); c),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}(f(z)s_1(z); c).$$

ただし $s_1(z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$, $s_2(z) = \dfrac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$.

証明　任意の自然数 N に対して、Γ_N を前項の閉曲線とする。f の極 c が Γ_N 上になければ (N が十分大きければこれは成り立つ)、留数定理より、$j = 1, 2$ について

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{Res}\left(f(z)s_j(z); k\right) + 2\pi i \sum_{\substack{c\ \text{は}\ f\ \text{の極のうち} \\ c\ \text{は}\ \Gamma_N\ \text{の内部}}} \mathrm{Res}\left(f(z)s_j(z); c\right). \tag{9}$$

$N \to \infty$ のとき、左辺の積分は 0 に収束する。実際、ある定数 C が存在して、十分大きい任意の N に対して、$|f(z)| \le \dfrac{C}{N^2}$ $(z \in {\Gamma_N}^*)$ となるので、

$$\left| \int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\, dz \right| \le \max_{z \in {\Gamma_N}^*} |f(z)s_j(z)| \cdot (\Gamma_N\ \text{の長さ}) \le \frac{C}{N^2} \cdot 2\pi \cdot 4(2N+1) \to 0.$$

一方、

$$\mathrm{Res}\left(f(z)s_1(z); k\right) = f(k)\, \mathrm{Res}\left(s_1; k\right) = f(k) \cdot (-1)^k = (-1)^k f(k),$$
$$\mathrm{Res}\left(f(z)s_2(z); k\right) = f(k)\, \mathrm{Res}\left(s_2; k\right) = f(k) \cdot 1 = f(k)$$

が分かるので、

$$\sum_{k=-N}^{N} f(k) = -\sum_{\substack{c\text{ は }f\text{ の極のうち}\\ c\text{ は }\Gamma_N\text{ の内部}}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_2(z);c\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} f(z)s_2(z)\,dz,$$

$$\sum_{k=-N}^{N} (-1)^k f(k) = -\sum_{\substack{c\text{ は }f\text{ の極のうち}\\ c\text{ は }\Gamma_N\text{ の内部}}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_1(z);c\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} f(z)s_1(z)\,dz.$$

$N\to\infty$ とすると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(f(z)s_2(z);c),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(f(z)s_1(z);c).\blacksquare$$

例 2.16 $a>0$ とするとき

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$$

を求めよ。

(解) $f(z):=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ は、命題 2.15 の条件を満たす。また f は偶関数であるから、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty} f(-n)+f(0)+\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=S+\frac{1}{a^2}+S=2S+\frac{1}{a^2}.$$

f の極は $\pm ia$ で、分母の 1 位の零点であるから、命題 2.3 によって

$$\operatorname{Res}(f;ia)=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=ia}=\frac{1}{2ia}=-\frac{i}{2a},\quad \operatorname{Res}(f;-ia)=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=-ia}=\frac{1}{-2ia}=\frac{i}{2a}.$$

命題 2.15 より

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)&=-\left(\operatorname{Res}\left(fs_2;ia\right)+\operatorname{Res}\left(fs_2;-ia\right)\right)\\ &=-\left(\operatorname{Res}\left(f;ia\right)s_2(ia)+\operatorname{Res}\left(f;-ia\right)s_2(-ia)\right)\quad(\text{命題 2.5 を用いた})\\ &=-\left[-\frac{i}{2a}\cdot\pi\cot(i\pi a)+\frac{i}{2a}\cdot\pi\cot(-i\pi a)\right]\\ &=\frac{\pi i}{a}\cot\left(i\pi a\right)=\frac{\pi i}{a}\cdot(-i)\coth\left(\pi a\right)=\frac{\pi}{a}\coth\pi a.\end{aligned}$$

ゆえに

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth\pi a-\frac{1}{a^2}\right).\blacksquare$$

問 2.

(1) $\cosh(iz)$, $\sinh(iz)$, $\tanh(iz)$, $\cosh(iz)$ を三角関数で表せ。

(答は順に $\cos z$, $i\sin z$, $i\tan z$, $-i\cot z$)

(2) $\cos(iz)$, $\sin(iz)$, $\tan(iz)$, $\cos(iz)$ を双曲線関数で表せ。

(答は順に $\cosh z$, $i\sinh z$, $i\tanh z$, $-i\coth z$)

命題 2.15 では、$(\forall n \in \mathbb{Z})$ $P(n) \neq 0$ という仮定をおいたが、それが満たされない場合も証明中の (9) を

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{-N\le k\le N\\ P(k)\neq 0}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_j(z);k\right) + 2\pi i \sum_{\substack{c\ \text{は}\ f\ \text{の極のうち}\\ \Gamma_N\ \text{の内部}}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_j(z);c\right)$$

と修正すれば

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ P(n)\neq 0}} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_1(z);c\right), \tag{10}$$

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ P(n)\neq 0}} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_2(z);c\right) \tag{11}$$

が得られるので、$P(n)=0$ となる有限個の n について別処理すれば良い。

例 2.17 (Basel 問題)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^2};0\right).$$

$\cot z$ は $0<|z|<\pi$ で正則であるから、その範囲で Laurent 展開できるが、すぐ後で確かめるように、その最初の 3 項は

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 + \cdots \quad (0<|z|<\pi). \tag{12}$$

ゆえに

$$\frac{\pi\cot\pi z}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots \quad (0<|z|<1).$$

これから特に

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^2};0\right) = \frac{-\pi^2}{3}.$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.\blacksquare$$

(12) の証明:　$0 < |z| < \pi$ のとき、

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^{k}}, \quad w := z^2$$

であるが、右辺の第 2 因子は、変数 w の関数として、0 の近傍 $D(0;\pi^2)$ で正則であるから、冪級数展開出来る。すなわち、ある $\{c_k\}_{k\ge 0}$ が存在して

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k \quad (|w| < \pi^2).$$

分母を払って

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k\right) \quad (|w| < \pi^2).$$

冪級数の掛け算をすると、

$$1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{24} - \frac{w^3}{6!} + \cdots = c_0 + \left(c_1 - \frac{c_0}{6}\right) w + \left(c_2 - \frac{c_1}{6} + \frac{c_0}{120}\right) w^2 + \cdots.$$

係数を比較して

$$c_0 = 1, \quad c_1 - \frac{c_0}{6} = -\frac{1}{2}, \quad c_2 - \frac{c_1}{6} + \frac{c_0}{120} = \frac{1}{24}, \quad \cdots.$$

これから

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{3}, \quad c_2 = -\frac{1}{45}, \quad \cdots$$

ゆえに

$$\cot z = \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{w}{3} - \frac{w^2}{45} + \cdots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots. \blacksquare$$

例 2.18

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\ne 0} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z}; 0\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

実際

$$\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z} = \frac{1}{z^3} + \frac{\pi^2}{6z} + \frac{7\pi^4 z}{360} + \cdots$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}. \blacksquare$$

2.3.3 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{in\theta}$

Fourier 変換の積分の計算に留数が利用できたように、Fourier 級数 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ の和の計算に利用できることもある。

命題 2.19 (複素 Fourier 級数の和) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z)+2$, $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $P(n) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{in\theta} = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}(f(z)s_3(z)e^{iz\theta}; c) \quad (\theta \in [0, 2\pi)). \tag{13}$$

ただし $s_3(z) := s_2(z) - i\pi = \dfrac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}$.

証明の前に、s_2 でなく、それを修正した s_3 を用いる理由を説明する。$\displaystyle\int_{\Gamma_N} f(z)s_2(z)e^{iz\theta}\,dz$ が収束するか考えてみよう。$\theta \in [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ であるから、$\operatorname{Re}(i(x+iy)\theta) = -y\theta$ であり

$$\left|e^{iz\theta}\right| = \left|e^{i(x+iy)\theta}\right| = e^{-y\theta}.$$

これは、$y > 0$ のとき 1 で抑えられるが、$y \to -\infty$ のときは ($\theta \neq 0$ であれば) $+\infty$ に発散する。そのとき、x につき一様に $|s_2(x+iy)| \to i\pi$ となるので、積分は収束しなくなる。そこで代わりに s_2 から $i\pi$ を除いた s_3 を用いる。

証明

$$s_3(z) = s_2(z) - i\pi = i\pi\left(\frac{1+e^{-2\pi i z}}{1-e^{-2\pi i z}} - 1\right) = \frac{2\pi i e^{-2\pi i z}}{1-e^{-2\pi i z}} = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}.$$

s_3 は、s_2 と同様に、極は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、その位数は 1, $\operatorname{Res}(s_3; n) = 1$ であるから、

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_3(z)e^{iz\theta}\,dz = \sum_{n=-N}^{N} f(n)e^{in\theta} + \sum_{\substack{c\ \text{は}\ f\ \text{の極} \\ c\ \text{は}\ \Gamma_N\ \text{の内部}}} \operatorname{Res}(f(z)s_3(z); c).$$

Γ_N の周上で

- $y = -N - \frac{1}{2}$ のとき $|s_3(z)| \leq 2\pi e^{-2\pi N}$.
- $y = N + \frac{1}{2}$ のとき、$|s_3(z)| \leq 2\pi$.
- $|x| = N + \frac{1}{2}$ のとき、$|s_3(z)| \leq \dfrac{2\pi}{1+e^{-2\pi y}}$.

いずれの場合も $\left|s_3(z)e^{iz\theta}\right| \leq 2\pi e^{\pi}$ と定数で抑えられる。ゆえに $N \to \infty$ とすると、積分は 0 に収束し、(13) が導かれる。 ■

2.3.4　その他の例

例 2.20 (2 項係数の出て来る例)

(1) $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k \le n$ とするとき、$\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz$ を示せ。

(2) $|z|=1$ とするとき、$\displaystyle\left|\frac{(1+z)^2}{5z}\right| \le \frac{4}{5}$ であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}$ を求めよ。

(解答)

(1) $\displaystyle\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} = z^{-k-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{j-k-1}$ であり、$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^\ell\, dz = \begin{cases} 1 & (\ell=-1) \\ 0 & (\ell \ne -1)\end{cases}$ であるから、$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\,dz = \left.\binom{n}{j}\right|_{j-k-1=-1} = \binom{n}{k}$.

(2) $|z|=1$ のとき、$|(1+z)^2| = |1+z|^2 \le (1+|z|)^2 = (1+1)^2 = 4$, $|5z| = 5|z| = 5$ であるから、$\displaystyle\left|\frac{(1+z)^2}{5z}\right| \le \frac{4}{5}$.

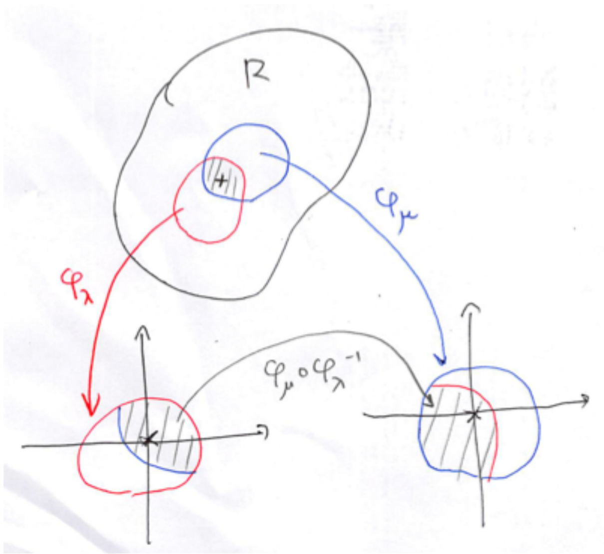
(3) まず (1) より $\displaystyle\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz$ である。(2) の評価と Weierstrass の M-test から、$|z|=1$ 上で $\displaystyle\sum\left(\frac{(1+z)^2}{5z}\right)^n$ が一様収束することに注意して、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz\cdot\frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{(1+z)^2}{5z}\right)^n dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1+z)^2}{5z}\right)^n dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{(1+z)^2}{5z}}dz \\
&= -5\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-3z+1} = -5\sum_{|c|<1}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+1};c\right) = \sqrt{5}. \blacksquare
\end{aligned}$$

3　無限遠点と Riemann 球面

複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えた $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ に色々便利な構造を加えたものを考える (最後は留数 $\mathrm{Res}(f;\infty)$ まで定義する)。それは Riemann 球面と呼ばれるが、Riemann 面 (1 次元複素多様体) と呼ばれる重要な概念の典型例にもなっている。

Riemann 面とは、昔風に言うと、$\mathbb{C}$ の開集合を貼りあわせて出来るものである。もう少し現代風に言うと、位相空間で、局所的に $\mathbb{C}$ の開集合と同相であり、“座標変換” が正則関数になっているもののことである。



Riemann 面について、簡単過ぎる説明 (典型的な多価関数の Riemann 面に限定して素朴に説明) と、(3 年生向けにはかなり) 高度な説明の両極端が多いが、田村 [5] はその間を目指した貴重な参考書である。

入門書である志賀 [6] に書いてあることは、間接的かもしれないが参考になる。

3.1 無限遠点の導入

3.1.1 はじめに

無限遠点 (無限大, infinity, point at infinity) ∞ について。

複素数の世界 (複素平面 $\mathbb{C}$) に、新たに[4]1 点 ∞ を付け加えて、これまでの $\to \infty$ (絶対値をいくらでも大きくする、絶対値が発散する) が、点 ∞ に近づける、収束することを意味するように、必要なことを定義する。

[4]念のために注意しておく。∞ は複素数ではない。

実数世界と複素数世界の無限大の違い

実数の世界の ∞ と複素数の世界の ∞ は、記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは区別を強調するため、実数世界の ∞ は $+\infty$ と書くことにする。
実数の世界には、$-\infty$ というものもあって、これは $+\infty$ とは違うものである。
実数の世界には、数直線で言うと、右の果て $+\infty$ と、左の果て $-\infty$ がある。

$$-\infty = (-1)\cdot(+\infty) \neq +\infty$$

が成り立つ。
複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点 ∞ が 1 個あるだけ。

$$(-1)\cdot\infty = \infty$$

である。

3.1.2 lim と ∞

これまで $+\infty$, $-\infty$, ∞ は、lim に現れるものであった。それを復習しよう。

実関数の場合 f を実関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$, $a \in \overline{I}$, $A \in \mathbb{R}$ とする。

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0) \quad (\exists\delta>0) \quad (\forall x\in I) \quad |x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall U\in\mathbb{R}) \quad (\exists\delta>0) \quad (\forall x\in I) \quad |x-a|<\delta \Longrightarrow f(x)>U.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0) \quad (\exists R\in\mathbb{R}) \quad (\forall x\in I) \quad x>R \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

問 1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ はどういうことか？

問 2. $\to +\infty$ の代りに $\to -\infty$ とすると？

複素関数の場合 f を複素関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(\Omega \subset \mathbb{C})$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{C}$ とする。

$$\lim_{z\to a} f(z) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0) \quad (\exists\delta>0) \quad (\forall z\in \Omega) \quad |z-a|<\delta \Longrightarrow |f(z)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall U\in\mathbb{R}) \quad (\exists\delta>0) \quad (\forall z\in \Omega) \quad |z-a|<\delta \Longrightarrow |f(z)|>U.$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0) \quad (\exists R\in\mathbb{R}) \quad (\forall z\in \Omega) \quad |z|>R \Longrightarrow |f(z)-A|<\varepsilon.$$

問 3. $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ はどういうことか？

例 3.1 実関数の場合、

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

は発散する。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ ではないことに注意する。

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$$

が成り立つ。一方、複素関数の場合、

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty$$

が成り立つ。■

問 4. これを証明せよ。

問 5. $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$ を示せ。

例 3.2 (もう少し詳しく実関数の極限との相違点) 対応する実関数の極限との微妙な違いに注意すること。

以下、毎回実関数、複素関数と書くのは面倒なので、特に断らない限り、変数の名前に z を用いた場合は複素関数、x を用いた場合は実関数とする。

$n\in\mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{z\to\infty}z^n=\infty$. (Cf. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^n=\pm\infty$ (n が偶数のとき $+$, n が奇数のとき $-$))

より一般に次数が 1 以上の多項式 (定数でない多項式) $P(z)$ に対して、$\displaystyle\lim_{z\to\infty}P(z)=\infty$.

$n\in\mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^n}=\infty$. (Cf. n が偶数ならば、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}=+\infty$. n が奇数ならば、$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^n}=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^n}=-\infty$ であるから、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}$ は存在しない。)

$\displaystyle\lim_{z\to\infty}\exp z$ は存在しない。(Cf. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.)

もちろん $\displaystyle\lim_{z\to 0}\sin z=0$. ゆえに $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{\sin z}=\infty$. 同様に $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2}\cos z=0$, $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2}\tan z=\infty$. ■

対数の主値 $\operatorname{Log} z$ について、$\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)\\ z\to\infty}}\operatorname{Log} z=\infty$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)\\ z\to 0}}\operatorname{Log} z=\infty$. $\log z$ は多価であるが、$\operatorname{Re}\log z=\log|z|$ (右辺の $\log$ は実関数としての $\log$) なので、$|\log z|\ge\log|z|$ (右辺の $\log$ は実関数としての $\log$). ゆえに実は主値に限定しなくても、やはり $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\log z=\infty$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\\ z\to 0}}\log z=\infty$.

冪乗 $\mathbb{C}\setminus\{0\}\ni z\mapsto z^\alpha$ も一般には多価関数であるが、$\alpha\in\mathbb{R}$ の場合は $|z^\alpha|=|z|^\alpha$ (右辺は実関数としての冪乗) であるから、

(i) $\alpha>0$ のとき、$\displaystyle\lim_{z\to\infty}z^\alpha=\infty$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\ne 0\\ z\to 0}}z^\alpha=0$.

(ii) $\alpha<0$ のとき、$\displaystyle\lim_{z\to\infty}z^\alpha=0$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\ne 0\\ z\to 0}}z^\alpha=\infty$.

ここに書いてある式を覚えようと努力することはお勧めしない。むしろ、自分でどうなるか確かめられる (計算できる) ようにしておくべきである。この辺は三角関数にからむ公式をど

こまで覚えるかという話と似ている。確実に覚えておける公式 (それは人によって異なる[5]) から、他の公式をどうやって導くかを体得するのが望ましい。

($|\log z| \geq \log|z|$ 等が要点になるのかも。)■

問 1 の解答 $(\forall U \in \mathbb{R})\ (\exists R \in \mathbb{R})\ (\forall x \in I)\ x > R \Rightarrow f(x) > U.$ ■

問 2 の解答 例えば $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ は、$(\forall L \in \mathbb{R})\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in I)\ |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < L.$ ■

問 3 の解答 $(\forall U \in \mathbb{R})\ (\exists R \in \mathbb{R})\ (\forall z \in \Omega)\ |z| > R \Rightarrow |f(z)| > U.$ ■

問 4 の解答 $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty$ だけ証明する。$z \mapsto \dfrac{1}{z}$ は $\Omega := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ が定義域である。任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して $\delta := \dfrac{1}{|U|+1}$ とおくと、$\delta > 0$ で、$|z| < \delta$ を満たす任意の $z \in \Omega$ に対して

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > \frac{1}{\delta} = |U|+1 > |U| \geq U.$$

これは $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty$ を示している。■

問 5 の解答 $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ は $\Omega := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ が定義域である。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $R := \frac{1}{\varepsilon}$ とおくと、$R \in \mathbb{R}$ で、$|z| > R$ を満たす任意の $z \in \Omega$ に対して

$$\left|\frac{1}{z} - 0\right| = \frac{1}{|z|} < \frac{1}{R} = \varepsilon.$$

これは $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z} = 0$ を示している。■

3.1.3 四則

前項に出て来る ∞ は独立した意味を持つモノではない (∞ 単独で出て来るわけでなくて、必ず "$\to \infty$" あるいは $\lim =$ の右辺という形で現れ、それは絶対値がどんな数よりも大きくなるという意味であった)。

∞ を新しい点 ($\infty \notin \mathbb{C}$) として、$\mathbb{C}$ にそれをつけ加えて拡張したものを $\widehat{\mathbb{C}}$ あるいは $\mathbb{P}^1$ と書く:

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

(これ (特に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と書いたとき) は、1 **次元複素射影空間**と呼ばれるものであるが、ここでは後で正式に紹介する「Riemann 球面」と呼び名を使うことを推奨する。)

[5]筆者の場合は、sin, cos の加法定理は高校生のとき以来正確に覚えていられるようなので (ちなみに tan はダメです)、いつもそこからスタートするが、人によっては、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (と指数法則) や、原点のまわりの回転を表す行列 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (と行列の積の定義) からスタートするかもしれない。一方もっとたくさんの公式を苦労なく覚えておける、という人もいるだろう。

余談 3.1 実関数の世界では、テキストによっては、$\mathbb{R}$ に $+\infty$ と $-\infty$ を添加した、**補完実数直線** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を導入するものがある。■

∞ の四則　lim と「合う」ように次のように定めることもある。

$$(\forall a \in \mathbb{C}) \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$$

$$(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \frac{a}{0} = \infty.$$

$$(\forall b \in \mathbb{C}) \quad \frac{b}{\infty} = 0.$$

しかし、$\infty + \infty$ や $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

そんなので何の役に立つ？例えば 1 次分数変換[6]

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\, b,\, c,\, d \text{ は } ad - bc \neq 0 \text{ を満たす複素数の定数})$$

は、$\mathbb{C}$ の範囲で考えると、定義できない点もあるし、結構煩わしいことが起きるが、$\widehat{\mathbb{C}}$ を導入すると、$f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が同相写像 (全単射かつ両連続) になる (非常にすっきりとする)。

例 3.3 ((前倒しで) 1 次分数変換と ∞) $f(z) = \dfrac{z+2}{3z+4}$ は、"普通に" 考えると、$z \neq -\dfrac{4}{3}$ に対して定義できる。つまり $f\colon \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbb{C}$ である。これは単射 ($z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$) であるが、全射ではない。実際、$f(z) = \dfrac{1}{3}$ を満たす z は存在しない ($\dfrac{z+2}{3z+4} = \dfrac{1}{3}$ は $3(z+2) = 3z+4$ と同値で、これは解を持たないことは明らか)。ところで

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1+2/z}{3+4/z} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{\substack{z\neq -4/3\\ z\to -4/3}} f(z) = \infty$$

であることに注目しよう。そこで

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} \dfrac{z+2}{3z+4} & (z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}) \\ \infty & (z = -\dfrac{4}{3}) \\ \dfrac{1}{3} & (z = \infty) \end{cases}$$

とおくと、$\widetilde{f}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で、$\widetilde{f}$ は全単射になる。また

$$\lim_{z\to -4/3} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}\left(-\frac{4}{3}\right), \quad \lim_{z\to\infty} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(\infty)$$

であるので、後で $\widehat{\mathbb{C}}$ に (この lim と整合する) 位相を定めると $\widetilde{f}$ は連続になる。実は $\widetilde{f}^{-1}$ も同様の 1 次変換になるので連続で、$\widetilde{f}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は**同相写像** (homeomorphism) になる。■

[6] 少し後で詳しく扱う。

3.1.4 幾何学的イメージ — Riemann 球面

$\widehat{\mathbb{C}}$ は3次元空間内の球面と同一視できることを説明する。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また x_1x_2 平面 $(x_3 = 0)$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

$\forall P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像 $\varphi\colon S \setminus \{N\} \ni P \mapsto P' \in H = \mathbb{C}$ を、N からの**立体射影** (**stereographic projection**) と呼ぶ。

$P' = (x, y, 0) = x + iy$ とすると、簡単な計算 (与えられた2点を通る直線と、与えられた平面との交点を求める計算) により

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}, \quad x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

問 6. このことを確かめよ。

$\varphi\colon S \setminus \{N\} \to H$ は全単射である。このことは幾何学的イメージから明らかであるが、$z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ が次のように具体的に x_1, x_2, x_3 について解けることからも分かる[7]。

$$|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}.$$

$\varphi(\text{北半球}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, $\varphi(\text{赤道}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\varphi(\text{南半球}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\varphi(\text{南極}) = 0$ が成り立つ。

この $\varphi\colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ の拡張 $\varphi\colon S \to \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を

$$\varphi(N) := \infty$$

で定義する (拡張した写像を同じ文字 φ を用いて表している)。この φ はやはり全単射である。

こうして、$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と対応づけた球面 S のことを **Riemann 球面** (the **Riemann sphere**) と呼ぶ。

もともと $P \to N$ のとき、$\varphi(P) \to \infty$ であるから、$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相を適切に定義すれば (この後、実際にそれを行う)、φ は N で連続となると期待できるが、実は $\varphi\colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ も $\varphi^{-1}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to S$ も連続である。つまり φ は同相写像であり、位相的にも $\widehat{\mathbb{C}}$ は S と同一視できる (ここでは四則演算は無視している)。そこで $\widehat{\mathbb{C}}$ 自身を Riemann 球面と呼ぶことも多い。

注意 3.4 実は、Riemann 球面 S の定義は、本によって異なる。S は $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1/2)^2 = (1/2)^2$ であるとしたり、北極の代わりに南極からの立体射影を用いたり (おっと教科書 [7] はこっちでしたか…)、色々なバリエーションがある。 ■

---

[7]念のため、少し書いておく。$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ であるから、$|z|^2 = x^2+y^2 = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \dfrac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \dfrac{1 + x_3}{1 - x_3}$. これを x_3 について解いて、$x_3 = \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$. これから $1 - x_3 = \dfrac{2}{|z|^2 + 1}$ が導かれるので、$x_1 = x(1 - x_3) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \cdot \dfrac{2}{|z|^2 + 1} = \dfrac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}$. 同様に $x_2 = y(1 - x_3) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} \cdot \dfrac{2}{|z|^2 + 1} = \dfrac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}$.

この辺はコンピューターを使って、うまい可視化が出来ないかな、と思うのだけど…

問 6 の解答 $N(0,0,1)$ と $P(x_1,x_2,x_3)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_1-0 \\ x_2-0 \\ x_3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ t(x_3-1)+1 \end{pmatrix} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

平面 $z=0$ との交点では、$t(x_3-1)+1=0$ より $t=\dfrac{1}{1-x_3}$. ゆえに

$$x=\frac{x_1}{1-x_3},\quad y=\frac{x_2}{1-x_3}.$$

ゆえに $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x+iy=\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3}$. ■

3.1.5 $\widehat{\mathbb{C}}$ に位相を導入

点列の極限や、部分集合上で定義された関数の極限や連続性などを定義するには、位相と呼ばれる構造を定義する必要がある。

$\mathbb{C}$ については、任意の二点 z_1,z_2 の距離 $|z_1-z_2|$ を用いて位相を定義した。これは $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ のときと同様のやり方で、慣れているので分かりやすいと思われるが、関数論の多くのテキストでは、無限遠点の "基本近傍系" を新たに定めることで $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相を定義している。以下それを説明しよう (そういう標準的な説明が理解できるようになってほしい)。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の各点 a に対して (後で a の基本近傍系と呼ばれることになる) 集合族 $\mathcal{U}_a$ を次式で定める:

$$\mathcal{U}_a := \{U(a;r) \mid r>0\}. \tag{14}$$

ここで $U(a;r)$ は、a の r 近傍と呼ばれる集合で、次のように定義される。

(a) $a\in\mathbb{C}$ (a が複素数) の場合

$$U(a;r)=D(a;r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-a|<r\} \qquad (\text{これはおなじみかも}\cdots).$$

(b) $a=\infty$ の場合

$$U(a;r):=U_r:=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>r\}\cup\{\infty\}$$

($|\infty|=+\infty$ とみなして、U_r のことを $U_r=\left\{z\in\widehat{\mathbb{C}} \,\middle|\, r<|z|\le+\infty\right\}$ とも表す。)

天下りになるが、この $\mathcal{U}_a$ を用いて、次のように $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合、点列の収束 (極限)、関数の連続性を定義する。

定義 3.5 ($\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合、点列の収束、関数の連続性) (a) $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall a \in \Omega)$ $(\exists U \in \mathcal{U}_a)$ $U \subset \Omega$.

(b) $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が、$a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に収束 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall U \in \mathcal{U}_a)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)$ $z_n \in U$.

(c) $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $f\colon \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$, $a \in \Omega$ とするとき、f が a で連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall V \in \mathcal{U}_{f(a)})$ $(\exists U \in \mathcal{U}_a)$ $f(U \cap \Omega) \subset V$.

もともとの $\mathbb{C}$ の場合と比べてみよう

上の定義と比べやすくするため、距離の代わりに円盤を使って表現し直してある。

(a) $\Omega \subset \mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall a \in \Omega)$ $(\exists \varepsilon > 0)$ $D(a;\varepsilon) \subset \Omega$.

(b) $\mathbb{C}$ 内の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $a \in \mathbb{C}$ に収束 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)$ $z_n \in D(a;\varepsilon)$.
(普通 $|z_n - a| < \varepsilon$ と書くところを、$z_n \in D(a;\varepsilon)$ と書き換えてある。)

(c) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ とするとき、f が a で連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $f(D(a;\delta) \cap \Omega) \subset D(f(a);\varepsilon)$.
(普通 $(\forall z \in \Omega\colon |z - a| < \delta))\ |f(z) - f(a)| < \varepsilon$ のように書くところを、$f(D(a;\delta) \cap \Omega) \subset D(f(a);\varepsilon)$ と書き換えてある。)

このように定義すると、以下が成り立つ。

- 開集合系の公理[8]が成立する。
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ の場合は、Ω が $\mathbb{C}$ の開集合であることと $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合であることは同値である。
- $z_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in \mathbb{C}$ であるとき、$\{z_n\}$ が $\mathbb{C}$ で a に収束することと、$\widehat{\mathbb{C}}$ で a に収束することは同値である。
- $z_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ であるとき、$\{z_n\}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ で ∞ に収束することと

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |z_n| > R$$

  が成り立つことは同値である。

問 7. このことを確かめよ。

余談 3.2 (きちんとやるには) 一般に、与えられた集合 X に対して、その中の点列の極限や、関数の連続性を考えるには、位相と呼ばれる構造を用いる。X の位相を定義するのは、X の

[8](i) $\emptyset$ と $\widehat{\mathbb{C}}$ は開集合, (ii) 二つの開集合の共通部分は開集合, (iii) 開集合からなる集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の合併 $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合.

開集合系 (開集合の全体) を定めるやり方を採用することが多いが、X の各点 a に対して、a の基本近傍系と呼ばれる集合族を定めるやり方もある。これについては、位相空間の詳し目のテキスト (例えば定評のある松坂 [8] や、古典的な定番テキストである河田・三村 [9]) を見ると良い。■

複素数 a に対して、$\widehat{\mathbb{C}}$ で a に収束というのは、これまでと同じ意味 ($\mathbb{C}$ で a に収束) で、$\widehat{\mathbb{C}}$ で ∞ に収束というのは、これまで $\to\infty$ (無限大に発散) と言ってきたことに相当する。

(これまで、普通は「十分小さい ε」だったのに、「十分大きい R」が対応するのは違和感があると思うが、そもそも ε-δ 論法の論理式に「大きい」、「小さい」という言葉は入っていないことを思い出そう。)

例 3.6 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は、$z=0$ で連続である。実際、上の規約により $f(0)=\dfrac{1}{0}=\infty$,

$$\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}} f(z)=\infty$$

であるから、$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=f(0)$ が成り立つ。同様に f は $z=\infty$ でも連続である。■

実は $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ は、次式で定義される d を距離として距離空間になる:

$$d(z,z'):=\left\|\varphi^{-1}(z)-\varphi^{-1}(z')\right\|. \tag{15}$$

(ただし、$\varphi\colon S\to\widehat{\mathbb{C}}$ は立体射影で、$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^3$ のベクトルの長さ $\|x\|=\sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}x_j^2}$ を表す。)

これは要するに、$z,z'\in\widehat{\mathbb{C}}$ の距離を、対応する Riemann 球面 S 上の二点 $\varphi^{-1}(z)$, $\varphi^{-1}(z')$ の $\mathbb{R}^3$ における距離として定義してるわけである。

問 8. 特に $z,z'\in\mathbb{C}$ の場合は、次のように書けることを示せ。

$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)\,(1+|z'|^2)}}.$$

この距離 $d(\cdot,\cdot)$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相を定めることが出来るが、それは上の基本近傍系で定めた位相と同じであることが証明できる (ここでは省略する)。

問 7 の解答 (これは気になれば自分でやってみるくらいで良いと思う。そんなに難しくない。)

問 8 の解答 (準備中)

3.2 無限遠点での座標

無限遠点の近傍における「局所座標」というものを導入する。それを用いることで無限遠点での微分可能性などが定義できる (天下りに感じられるかもしれない。実はこれは Riemann 面の一般論から来ている。)。

$z=\infty$ が、$f(z)$ の孤立特異点、正則点 (除去可能特異点)、極、(孤立) 真性特異点である、という定義は、$z=\dfrac{1}{w}$ で変数変換した $g(w):=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ の $w=0$ での性質で定める。ただし留数については少し注意が必要である。

定義 3.7 (∞ が孤立特異点、正則点、極、真性特異点とは) ∞ が f の**孤立特異点** (isolated singularity) であるとは、$(\exists R\in(0,+\infty))$ $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>R\}$ は f の定義域に含まれ、そこで f は正則であることをいう。このとき、

$$g(w):=f\left(\frac{1}{w}\right)\quad (0<|w|<\frac{1}{R})$$

とおくと、0 は g の孤立真性特異点となるが、この g を使って、f の孤立特異点 ∞ の分類をする。

(i) ∞ が f の**除去可能特異点** (removable singularity, **正則点**, regular point) であるとは、0 が g の除去可能特異点であることをいう。

(ii) ∞ が f の**極** (pole) であるとは、0 が g の極であることをいう。0 が g の k 位の極であるとき、∞ は f の k 位の極であるという。

(iii) ∞ が f の**(孤立) 真性特異点** (essential singularity) であるとは、0 が g の孤立真性特異点であることをいう。

(注意: 領域 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>R\}$ のことを、$R<|z|<+\infty$ と表すことがある。$\left\{z\in\widehat{\mathbb{C}}\,\middle|\,|z|>R\right\}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>R\}\cup\{\infty\}$ と区別するために、$|z|<+\infty$ としてある。)

命題 3.8 (∞ のまわりの Laurent 展開とそれに基づく孤立特異点の分類) ∞ が f の孤立真性特異点とするとき、定義によって $(\exists R\in(0,+\infty))$ f は $R<|z|<\infty$ で正則であるが、$(\exists!\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$

(16)
$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\quad (R<|z|<+\infty)$$

が成り立つ。実は

(17)
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\quad (n\in\mathbb{Z};\ R<r<\infty)$$

である。さらに以下の (1)〜(3) が成り立つ。

(1) ∞ が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ $a_n=0$.

(2) ∞ が f の極 $\Leftrightarrow$ $(\exists k\in\mathbb{N})$ $[a_k\neq 0$ かつ $(\forall n\in\mathbb{N}\colon n>k)$ $a_n=0]$.

(3) ∞ が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $(\forall k\in\mathbb{N})$ $(\exists n\in\mathbb{N}\colon n>k)$ $a_n\neq 0$.

証明 「複素関数」で、円環領域 $A(c;R_1,R_2)$ $(0 \le R_1 < R_2 \le +\infty)$ で正則な関数は Laurent 展開が出来ることを証明済みである。$A(0;R,+\infty)$ について適用して、(16) を満たす $\{a_n\}$ が一意的に存在し、(17) が成り立つことが導ける。

一方、g は $A(0;0,1/R)$ で正則であるから、0 は g の孤立特異点で、$(\exists \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{w^n} \quad (0 < |w| < 1/R).$$

実は $0 < r < 1/R$ を満たす任意の r に対して

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\,dw \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

これから

$$f(z) = g(1/z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n \quad (R < |z| < \infty).$$

(16) の形の級数展開の一意性から

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad b_{-n} = a_n.$$

ゆえに

- ∞ が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $b_{-n} = 0$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n = 0$.
- ∞ が f の極 $\Leftrightarrow$ $(\exists k \in \mathbb{N})$ $[b_{-k} \ne 0$ かつ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n > k)$ $b_{-k} = 0]$ $\Leftrightarrow$ $(\exists k \in \mathbb{N})$ $[a_k \ne 0$ かつ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n > k)$ $a_k = 0]$
- ∞ が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\colon n > k)$ $b_{-n} \ne 0]$ $\Leftrightarrow$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\colon n > k)$ $a_n \ne 0]$ ■

(16) を、f の孤立特異点 ∞ のまわりの **Laurent 展開**、また $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ をその主部と呼ぶ。

具体的に a_n を求めるのに、(17) はあまり役に立たないことが多い。f が有理関数の場合は比較的簡単な計算法がある (後述する)。

$c \in \mathbb{C}$ の場合と同様に、孤立特異点の種類は、$\lim_{z\to\infty} f(z)$ によって判定できる。

命題 3.9 (孤立特異点 ∞ の lim による特徴づけ) ∞ が f の孤立特異点であるとき、次の (1),(2),(3) が成り立つ。

(1) ∞ が f の正則点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ z\to\infty}} f(z)$ は $\mathbb{C}$ 内で極限を持つ (実は a_0 に等しいことが分かる)

(2) ∞ が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ z\to\infty}} f(z) = \infty$.

(3) ∞ が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ z\to\infty}} f(z)$ は $\mathbb{C}$ 内で収束しないし、$= \infty$ でもない ($\widehat{\mathbb{C}}$ で収束しない)

証明 $z = \dfrac{1}{w}$ の関係があるとき、$z \to \infty \Leftrightarrow w \to 0$ であるから、有限な孤立特異点の特徴づけの定理から明らかである。 ■

注意 3.10 後で **Riemann 面** (1 次元複素多様体) を学ぶと、$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が Riemann 面で、∞ の座標近傍 $U_R = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \;\middle|\; R < |z| \le \infty \right\}$ における局所座標が $w = \dfrac{1}{z}$ であると理解できる。 ■

例 3.11 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ は、$z = \infty$ を正則点 (除去可能特異点) とする。実際、

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{w}} = w$$

は $w = 0$ を正則点に持つから。これは $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$ (有限の極限！) からも明らかである。 ■

例 3.12 $f(z) = z$ は、$z = \infty$ を極に持つ。実際、

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w}$$

は $w = 0$ を極に持つから。これは $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z = \infty$ からも明らかである。 ■

復習: $c \in \mathbb{C}$ での Laurent 展開、留数解析

$c \in \mathbb{C}$ が複素関数 f の**孤立特異点** (isolated singularity) であるとは、$(\exists\varepsilon > 0)$ f は $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < \varepsilon\}$ (これは $D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}$ とも書ける) を定義域に含み、そこで正則であることをいう。このとき、$(\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < \varepsilon).$$

この右辺の級数を、f の c における (c のまわりの) **Laurent 級数**、この級数を求めることを f を c において **Laurent 展開**する、という。
f の孤立特異点 c は以下の 3 つに分類できる。

(i) c が**除去可能特異点** (removable singulariry, 正則点, regular point) であるとは、$(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_{-n} = 0$ が成り立つことをいう。これは次の (a) や (b) と同値である。

(a) $(\exists\varepsilon \in (0,\varepsilon))$ f は $0 < |z-c| < \varepsilon$ で有界である。

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ は $\mathbb{C}$ 内で極限を持つ (実は $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = a_0$)。

(ii) c が**極 (pole)** であるとは、$(\exists k \in \mathbb{N})$ $a_{-k} \neq 0$ かつ $\forall n > k$ $a_{-n} = 0$ が成り立つことをいう (このとき k を極 c の**位数** (order), c は f の k 位の極と呼ぶ)。これは $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ と同値である。

(iii) c が**(孤立) 真性特異点** (essential singularity) であるとは、$(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n > k)$ $a_{-n} \neq 0$ が成り立つことをいう。これは $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が $\mathbb{C}$ 内で極限を持たず、かつ $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ でもないことを意味する ($\widehat{\mathbb{C}}$ で極限を持たない、とも言い換えられる)。

f の c における**留数** (residue) $\mathrm{Res}(f;c)$ を

$$\mathrm{Res}(f;c) = \operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz := a_{-1}$$

で定義する。c のまわりを正の向きに一周する、区分的に滑らかな $D(c;\varepsilon)$ 内の閉曲線 C に対して、

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f;c)$$

が成り立つ。

例 3.13 (これはもう少し事前の説明が必要ではないか？カットするか？) $f(z) := \dfrac{z-1}{z+1}$ とするとき、

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\dfrac{1}{w} - 1}{\dfrac{1}{w} + 1} = \frac{1-w}{1+w}$$

は w の関数として $w = 0$ の近傍で正則であるから、f は $z = \infty$ の近傍で正則である (もち

ろん $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ であるから、と言っても良い)。また $f(\infty) = 1$. ゆえに $g(z) := \operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z+1}$ も $z = \infty$ で正則で $g(\infty) = 0$. ■

例 3.14 $n \in \mathbb{N}$ とするとき、n 次多項式 $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ について、

$$P\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a_0}{w^n} + \cdots + \frac{a_1}{w} + a_0, \quad a_0 \neq 0$$

は $w = 0$ は n 位の極に持つから、$z = \infty$ は P の n 位の極である。■

例 3.15 $z = \infty$ は、$\sin z$, $\exp z$ など、多項式でない整関数の (孤立) 真性特異点である。実際、$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が整関数ならば、

$$(\exists \{a_n\}_{n\ge 0}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

多項式でないということは、$a_n \neq 0$ を満たす a_n が無限個あるということである。

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{w^n} + a_0 \quad (w \in \mathbb{C})$$

は、$w \mapsto f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ の $w = 0$ のまわりでのローラン展開であるから、$w = 0$ はこの関数の (孤立) 真性特異点である。ゆえに ∞ は f の (孤立) 真性特異点である。■

3.3 無限遠点での留数

定義 3.16 (関数の孤立特異点 ∞ における留数) Ω が $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、∞ が f の孤立特異点とする。このとき $(\exists R \in (0, +\infty))$ $(\exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \quad (R < |z| < +\infty).$$

が成り立つが、$-a_{-1}$ を f の ∞ における**留数** と呼び、$\operatorname{Res}(f; \infty)$ または $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\,dz$ で表す。

$r > 0$ として、$z = re^{-i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ で定まる閉曲線を C としよう。これは原点を中心とする半径 r の円周上を、時計回りに一周する閉曲線である。天下りになってしまうが、C は ∞ の周りを正の向きに一周するという。この C に対して、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = -a_{-1} = \operatorname{Res}(f; \infty) \tag{18}$$

が成り立つ (孤立特異点の周りを正の向きに一周する閉曲線に沿って関数を積分して、$2\pi i$ で割ると留数が得られる)。

少々こじつけ気味に感じられるかもしれないが、C を Riemann 球面 S に映すと、(球面の中心から見て) 北極 N の周りを反時計回りに一周する閉曲線となる。また $w=\dfrac{1}{z}$ により w 平面に写すと、0 の周りを円周 $\{w\in\mathbb{C}\mid |w|=1/r\}$ に沿って、反時計回りに一周する閉曲線になる。

上の等式は、z 平面で考えても分かるが、w 平面に写して考えても次のように導ける。

$w=1/z$ とするとき、$dz=-dw/w^2$ であるから、$f(z)\,dz=-\dfrac{g(w)}{w^2}dw$ で、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1/r} f(1/w)\cdot\left(-\frac{1}{w^2}\right)dw \\
&= -\frac{g(w)}{w^2}\ \text{の}\ w^{-1}\ \text{の係数} = -b_1 = -a_{-1}.
\end{aligned}
$$

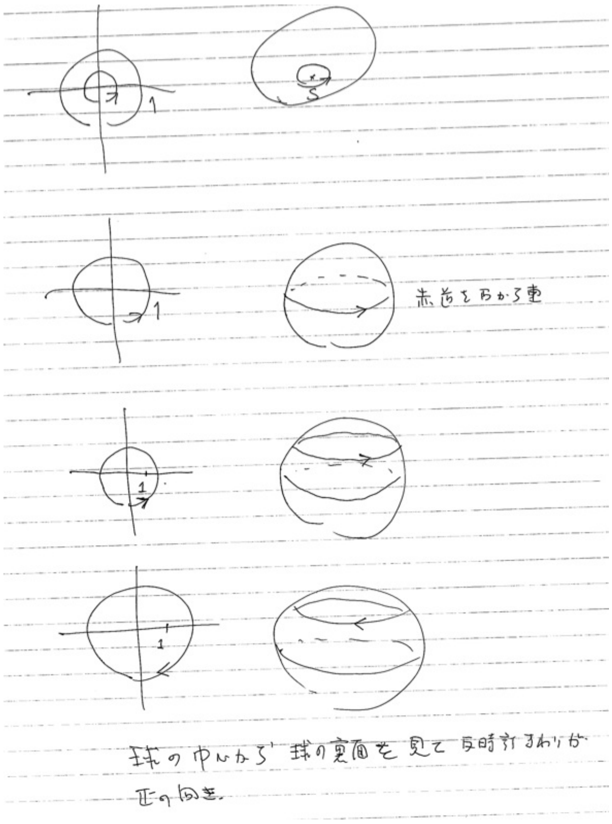


図 1: (まともな図に置き換えよう。z 平面，w 平面, Riemann 球面の 3 つを描いて。)

注意 3.17 (危険な曲り角) $\mathrm{Res}(f;\infty)$ は、Laurent 展開の主要部の最初の項の係数 a_1 でもないし、$\mathrm{Res}(g;0)$ でもないことに注意しよう。無限遠点が正則点 ($\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n=0$) であっても、$\mathrm{Res}(f;\infty)\neq 0$ ($-a_{-1}\neq 0$) ということがありうる。 ■

注意 3.18 (留数を表す記号について) 我々が教科書としている神保 [7] では、留数を $\mathrm{Res}(f;c)$ でなく $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz$ と書き、線積分や留数は、関数 f でなく、微分形式 $f(z)dz$ に対して定義される、と考えるのが自然であるから、としてある。しかし、この記号を採用してあるテキス

トはあまり多くない (一松先生の本 [4] には、留数は実は微分形式に対して定義されるものだと書いてあるが、記号はそうなっていない)。やはり書くのに少し面倒だからであろう。しかし、このあたりは、教科書の言い分が良く分かる。 ■

例 3.19 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は $z=\infty$ で正則である。

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\,dz=\operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{w}}\right)dw=-\operatorname*{Res}_{w=0}\frac{dw}{w}=-1.$$

もちろん、$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n$ と見て、$a_n=0$ $(n\neq-1)$, $a_{-1}=1$ を求めて、$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)\,dz=-a_{-1}=-1$ としても良い。 ■

例 3.20 (有理関数の ∞ での Laurent 展開の主要部と留数の求め方) 有理関数の ∞ での Laurent 展開の主要部と留数の求め方を例で説明しよう。

$$(*)\qquad f(z)=\frac{z^4+10z^2+9}{z^2-z+2}.$$

この有理関数の $\mathbb{C}$ 内での極は $\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ である。$\alpha:=\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$, $\beta:=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$ とおく。

$|\alpha|=|\beta|=2$ であるから、$D(0;2)$ で Taylor 展開、$A(0;2,+\infty)$ で Laurent 展開出来る。後者を求めると良い。

$(*)$ の右辺の分子の多項式 z^4+10z^2+9 を、分母の多項式 z^2-z+2 で割り算すると、商 z^2+z+9, 余り $7z-9$ であるから、次のように多項式 + 真分数式の形に変形できる:

$$(19)\qquad f(z)=\frac{(z^2-z+2)(z^2+z+9)+7z-9}{z^2-z+2}=z^2+z+9+\frac{7z-9}{z^2-z+2}.$$

$z^2+z-2=(z-\alpha)(z-\beta)$ と因数分解できるので、

$$\frac{7z-9}{z^2-z+2}=\frac{A}{z-\alpha}+\frac{B}{z-\beta}$$

を満たす A, B が存在する。$7z-9=A(z-\beta)+B(z-\alpha)$ から、

$$A=\frac{9-7\alpha}{\beta-\alpha},\quad B=\frac{7\beta-9}{\beta-\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
f(z)&=z^2+z+9+\frac{A}{z}\cdot\frac{1}{1-\alpha/z}+\frac{B}{z}\cdot\frac{1}{1-\beta/z}\\
&=z^2+z+9+\frac{A}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^2+\frac{B}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{z}\right)^2\\
&=z^2+z+9+A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{z^n}+B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{n-1}}{z^n}\\
&=z^2+z+9+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}}{z^n}\qquad(2<|z|<+\infty).
\end{aligned}$$

これが f の ∞ の周りの Laurent 展開である。留数は

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-(A+B)=-\frac{9-7\alpha+7\beta-9}{\beta-\alpha}=-7.$$

あるいは、

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty}z\frac{7z-9}{z^2-z+2}=-7.$$

(この例は、以前は何か勘違いをして、ひどく回りくどいやり方で計算していた。) ■

注意 3.21 (有理関数の ∞ における Laurent 展開の主部と留数の計算) 落ち着いて振り返ると、有理関数の、∞ における Laurent 展開の主部と留数は一般に次のように簡単な計算で求まる。(Laurent 展開の係数は全部必要になることはあまりなくて、留数さえ分かれば用が足りることが多いので、とても便利である。)

有理関数 $f=\frac{Q}{P}$ の ∞ における Laurent 展開の主部は、割り算の商を計算することで求まる。つまり $Q(z)=q(z)P(z)+r(z)$, $\deg r(z)<\deg P(z)$ として、$f=p+\frac{r}{P}$ となるが、p の 1 次以上の項を集めたものが Laurent 展開の主部である。また留数は、$\operatorname{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty}\dfrac{zr(z)}{P(z)}$. 非常に簡単である。 ■

4 有理関数

f が**有理関数 (rational function)** であるとは、$f(z)$ が z の有理式であること、つまり

$$(\exists P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z])\quad f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}\quad (P(z)\neq 0 \text{ となる } z\in\mathbb{C})$$

が成り立つことをいうのであった。

$P(z)$ と $Q(z)$ の最大公約多項式を求めて、それで割り算することにより (除去可能特異点が正則点になったりするが、関数論的には違いがない[9])、$P(z)$ と $Q(z)$ が互いに素であることを仮定できる。

4.1 (有理関数の) 部分分数分解

(教科書 [7] にこういう内容が用意されているのは、Mittag-Leffler の定理などを意識しているのだろうか？)

有理関数の**部分分数分解 (partial fraction decomposition)** は、微分積分の授業で、有理関数の不定積分を計算するときにおなじみであろう[10]。ここでは複素関数論の観点から見直してみる。

先に結論を標語的に書いておくと、

[9] 例えば、$P(z)=z$, $Q(z)=z^2$ のとき、$f(z)=\dfrac{z^2}{z}$ の定義域を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とみなすか、$f(z)=z$ と簡単化して $\mathbb{C}$ とみなすか、集合論的には大違いであるが、関数論としては区別しない。

[10] そのときは、実関数の範囲で分解するように、判別式が負であるような 2 次式が現れたりしたが、複素関数の場合は、任意の多項式は 1 次式の積に分解されるため、もっと簡単になる。

有理関数の部分分数分解は、$\widehat{\mathbb{C}}$ 内のすべての極における Laurent 展開の主部の和に等しい。

有理関数 f を

$$f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)},\quad (P(z),\,Q(z)\ \text{は互いに素な複素係数多項式})$$

と表す。$f(z)$ の $\mathbb{C}$ 内の極は $P(z)$ の零点であるので、有限個である。それを $c_1, \dots, c_r$, さらに、各 c_j における主要部を

$$f_j(z):=\frac{a^{(j)}_{-k_j}}{(z-c_j)^{k_j}}+\cdots+\frac{a^{(j)}_{-1}}{z-c_j}$$

とおく。

$R:=\max\{|c_1|,\cdots,|c_r|\}+1$ とおくと、f は $R<|z|<\infty$ で正則であるから、$\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\quad (R<|z|<+\infty).$$

これを f の ∞ のまわりの Laurent 展開、また正羃の項を集めた

$$f_\infty(z):=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

を、f の ∞ のまわりの Laurent 展開の主部と呼ぶのであった。

$n:=\deg Q(z)$, $m:=\deg P(z)$, $N:=n-m$ とおくとき、

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^N}=a_N\neq 0,\quad (\forall n>N)\quad a_n=0$$

が成り立つことは容易に分かる。特に

$$f_\infty(z)=\sum_{n=1}^{N}a_nz^n\quad \left(N\le 0\ \text{のとき、}\sum_{n=1}^{N}=0\ \text{と考える}\right).$$

さて、

$$g(z):=f(z)-\sum_{j=1}^{r}f_j(z)-f_\infty(z)\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{c_j\}_{j=1}^{r})$$

とおくと、g は $\widehat{\mathbb{C}}$ で極を持たず、至るところ正則である。

特に g は $\mathbb{C}$ で有界である。実際、$\lim\limits_{z\to\infty}g(z)=a_0$ は明らかであるから、

$$(\exists R'>0)(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\ge R')\quad |g(z)|\le|a_0|+1$$

が成り立ち、$\forall z\in\mathbb{C}$ に対して、

$$|g(z)|\le\max\{M,|a_0|+1\},\quad M:=\max_{|z|\le R'}|g(z)|.$$

ゆえに Liouville の定理から、g は定数関数である:

$$(\exists C \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad g(z) = C.$$

$z \to \infty$ の極限を考えると、$a_0 = C$. ゆえに

$$f(z) = (a_0 + f_\infty(z)) + \sum_{j=1}^{N} f_j(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{c_j\}_{j=1}^{r}).$$

これは実は $f(z)$ の部分分数分解に他ならない。そのことを理解するために「部分分数分解の一意性」を示そう。

部分分数分解の一意性　部分分数分解については、次のように学んだ人が多いと思われる。任意の有理式 $f(z)$ が与えられたとき、ある手順 (知っているはずなのでここでは省略するが、もし知らなかった場合はきちんと復習して計算できるようにしておく必要がある) に基づいて計算すると、次の ($\sharp$) の形に変形できて、その結果を $f(z)$ の部分分数分解と呼ぶ。計算手順を別にして、「ある形」の部分に焦点を合わせると、次の定理が得られていることになる。

複素係数有理式の部分分数分解

任意の有理式 $f(z)$ に対して、

$$(\exists N \in \mathbb{N} \cup \{0\})(\exists \{a_n\}_{n=0}^{N})(\exists r \in \mathbb{N} \cup \{0\})(\exists \{c_j\}_{j=1}^{r})(\exists \{m_j\}_{j=1}^{r})(\exists \{a_{jk}\}_{\substack{1 \le j \le r \\ 1 \le k \le m_j}})$$

s.t.
($\sharp$)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{jk}}{(z - c_j)^k} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{c_j\}_{j=1}^{r}), \quad N = 0 \quad \text{または} \quad a_N \ne 0, \quad a_{jm_j} \ne 0.$$

ここで存在を主張している $\{a_n\}$, r, $\{c_j\}$, $\{m_j\}$, $\{a_{jk}\}$ には、以下に示す意味での一意性がある。そのことをその証明のアイディアと一緒に説明しよう。

多項式の係数の一意性は高校以来知っているであろう。すなわち、

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}) \quad \Longrightarrow \quad (a_0, a_1, \ldots, a_N) = (b_0, b_1, \ldots, b_N).$$

この事実は色々な証明の仕方があるが、ここでは極限を用いよう。まず、仮定の式を移項した

$$\sum_{n=1}^{N} (a_n - b_n) z^n = b_0 - a_0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

で $z \to \infty$ として、左辺の極限が有限であるために $a_n - b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. すると左辺は 0 になるので、右辺 $= b_0 - a_0 = 0$. 結局 $(a_0, a_1, \ldots, a_N) = (b_0, b_1, \ldots, b_N)$.

任意の $a_1, \ldots, a_m$ について

$$\lim_{z \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(z - c)^k} = 0$$

が成り立つことに注意すると、部分分数分解の多項式部分 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ の一意性はまったく同じ論法で導くことが出来る。

さらに、(i) $a_m \neq 0$ であれば、

$$\lim_{z\to c}\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(z-c)^k}=\infty,$$

(ii) $c \neq c'$ であれば、

$$\lim_{z\to c'}\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(z-c)^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(c'-c)^k}\quad \text{(特に有限)}.$$

この (i), (ii) 二つの事実を用いると、多項式部分以外の部分についても一意性が導かれる。

例 4.1 (有理関数の Laurent 展開の主部を集めて部分分数分解を求める)

$$f(z) := \frac{z^4+3z-1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

この関数 f のすべての極における Laurent 展開の主部を求めることで、$f(z)$ の部分分数分解を求めてみよう (実際にこの $f(z)$ の部分分数分解を求めるには、微分積分で学ぶアルゴリズムの方が簡単であるので、以下の計算はあくまでも、上の議論の確認をするためのものである)。

-2 は $f(z)$ の分母の 1 位の零点であるから、f の 1 位の極であり、

$$\operatorname{Res}(f;-2)=\lim_{z\to-2}(z+2)f(z)=\lim_{z\to-2}\frac{z^4+3z-1}{(z-1)^2}=\frac{(-2)^4+3\cdot(-2)-1}{(-3)^2}=\frac{16-6-1}{9}=1.$$

ゆえに f の -2 のまわりの Laurent 展開の主部は、$f_{-2}(z) := \dfrac{1}{z+2}$ である。

1 は $f(z)$ の分母の 2 位の零点であるから、f の 2 位の極である。従って f の 1 のまわりの Laurent 展開は、

$$f(z)=\frac{b_{-2}}{(z-1)^2}+\frac{b_{-1}}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-1)^n$$

の形をしている。これから容易に

$$\begin{aligned}
b_{-2}&=\lim_{z\to1}(z-1)^2f(z)=\lim_{z\to1}\frac{z^4+3z-1}{z+2}=\frac{1+3-1}{3}=1,\\
b_{-1}&=\operatorname{Res}(f;1)=\lim_{z\to1}\frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}(z-1)^2f(z)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^4+3z-1}{z+2}\right)\\
&=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(z^3-2x^2+4z-5+\frac{9}{z+2}\right)=\lim_{z\to1}\left(3z^2-4z+4-\frac{9}{(z+1)^2}\right)\\
&=3-4+4-\frac{9}{3^2}=2.
\end{aligned}$$

ゆえに f の 1 のまわりの Laurent 展開の主部は、$f_1(z) := \dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{2}{z-1}$ である。

$f(z)$ は $2<|z|<\infty$ で正則である ($\mathbb{C}$ 内で極は -2, 1 のみ) から、$\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t.

$$(\sharp)\qquad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\quad(2<|z|<\infty).$$

ところで $f(z)$ の分子 z^4+3z-1 を分母 $(z-1)^2(z+2)=z^3-3z+2$ で割ると、商が z, 余りが $3z^2+z-1$ であるから

$$(\flat)\qquad f(z)=z+\frac{3z^2+z-1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

$(\sharp)$ と $(\flat)$ を見比べ、

$$\lim_{z\to\infty}\frac{3z^2+z-1}{(z-1)^2(z+2)}=0,\quad \lim_{z\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}=0$$

に注意すると

$$a_0+(a_1-1)z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\to 0\quad(z\to\infty).$$

ゆえに

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_n=0\quad(n\ge 2)$$

が得られる。ゆえに f の ∞ のまわりの Laurent 展開の主部は、$f_\infty(z):=z$ である。ついでに留数を求めておくと、

$$\mathrm{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty}z\frac{3z^2+z-1}{(z-1)^2(z+2)}=-3.$$

上に述べたように

$$f(z)=f_{-2}(z)+f_1(z)+f_\infty(z)+a_0=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-1}+z$$

が成り立ち、これが $f(z)$ の部分分数分解である。■

問 9. 微積分で学ぶ方法を用いて、上の例の f を部分分数分解せよ。

問 9 の解答 (省略)

4.2 有理関数の留数

$$f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)},\quad(P(z),\ Q(z)\text{ は互いに素な複素係数多項式})$$

とする。$f(z)$ の $\mathbb{C}$ 内の極を $c_1,\dots,c_N$ とする ($N=0$ もあり得る)。$R>0$ を $\{c_1,\cdots,c_n\}\subset D(0;R)$ を満たすように十分大きく取る (例えば、$N\ge 1$ の場合は $R:=\max\{|c_1|,\dots,|c_N|\}+1$ とおけば良い)。

このとき、留数定理より、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(f;c_j).$$

一方、∞ における留数の定義によって、左辺は $-\operatorname{Res}(f;\infty)$ である。従って次の命題を得る。

命題 4.2 (有理関数の Riemann 球面内のすべての n 留数の和は 0) 有理関数 f の $\mathbb{C}$ 内のすべての極を $c_1, \cdots, c_N$ とするとき、

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(f;c_j) + \operatorname{Res}(f;\infty) = 0.$$

この命題は一見当たり前 (trivial) であるような気がするかもしれないが、意外とそうではない。この形にまとめておかないと、なかなか気が付かない事実である。

例 4.3 (既に計算してある例で確認) 例 4.1 で関数

$$f(z) = \frac{z^4+3z-1}{(z-1)^2(z+2)}$$

について調べたが (Laurent 展開の主部を求めると部分分数分解が出来る、ということの確認をするのが目的であった)、同時に

$$\operatorname{Res}(f;1) = 2, \quad \operatorname{Res}(f;-2) = 1, \quad \operatorname{Res}(f;\infty) = -3$$

が分かった。確かに

$$\operatorname{Res}(f;1) + \operatorname{Res}(f;-2) + \operatorname{Res}(f;\infty) = 2 + 1 + (-3) = 0.\blacksquare$$

例 4.4 a, b, c, d は互いに相異なる 4 つの複素数とするとき、

$$\begin{aligned}&\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)}\\ &\quad + \frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} + 1 = 0\end{aligned} \tag{20}$$

を示せ。

(解) ずっと昔は大学入試でこの手の「計算問題」が出題されたようだが、それはさておき。

a, b, c, d のいずれも 0 でないとして示す (いずれかが 0 である場合は目視で (20) が正しいことが分かる)。

$$f(z) := \frac{abcd}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}\cdot\frac{1}{z}$$

とおくと、f の $\mathbb{C}$ 内の極は $a, b, c, d, 0$ であり、いずれの位数も 1 である。例えば a は、f の 1 位の極であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;a) &= \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{abcd}{(z-b)(z-c)(z-d)}\cdot\frac{1}{z} = \frac{abcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}\cdot\frac{1}{a}\\ &= \frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}.\end{aligned}$$

同様にして

$$\operatorname{Res}(f;b)=\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)},\quad \operatorname{Res}(f;c)=\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)},$$
$$\operatorname{Res}(f;d)=\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

さらに

$$\operatorname{Res}(f;0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{abcd}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}=\frac{abcd}{(-a)(-b)(-c)(-d)}=1.$$

従って、(20) の左辺は、f の $\mathbb{C}$ 内の極における留数の和である。ゆえに右辺は $-\operatorname{Res}(f;\infty)$ に等しいはずである。

$f(z)$ は z の 5 次多項式の逆数であるから、$\lim_{z\to\infty} z^4 f(z)=0$. 特に $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$. 次の命題 4.5 により、

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty}zf(z)=0.$$

ゆえに (20) が証明された。■

次の命題は、実質的に上の例の中で証明して用いた (後のために書き抜いておく)。

命題 4.5 ∞ が f の孤立特異点で、$\lim_{z\to\infty} zf(z)$ が有限の極限値 A を持てば、$\operatorname{Res}(f;\infty)=-A$. 特に $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$ ならば、$\operatorname{Res}(f;\infty)=0$.

証明 f の ∞ のまわりの Laurent 展開を

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$$

とするとき、

$$zf(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^{n+1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n-1}z^n.$$

$z\to\infty$ のとき、有限の極限 A を持つことから、

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_{n-1}=0 \quad\wedge\quad A=a_{-1}.$$

ゆえに

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-a_{-1}=-A.\blacksquare$$

注意 4.6 (命題 4.5 の類似) 実は「$c\in\mathbb{C}$ が f の孤立特異点で、$\lim_{z\to c}(z-c)f(z)$ が有限の極限値 A を持つならば、$\operatorname{Res}(f;c)=A$.」という命題が成り立つ。■

注意 4.7 (「正則 ⇒ 留数は 0」は ∞ については不成立) 有限の複素数 c が f の正則点であるとき、$\operatorname{Res}(f;c)=0$ であるが、f が ∞ の近傍で正則であっても、$\operatorname{Res}(f;\infty)=0$ であるとは限らない。例えば $f(z)=\dfrac{1}{z}$ のとき、$\lim_{z\to\infty}f(z)=0$ であるから、f は ∞ で正則であるが、$\operatorname{Res}(f;\infty)=-1\neq 0$. 上の命題は、$\operatorname{Res}(f;\infty)=0$ のための簡単な十分条件を与えている点で価値がある。■

4.3 有理型関数

(これは授業では後回しにするかも。)

有理関数とある意味で似ている、有理型関数を紹介する。我々は極の取り扱いに十分慣れたので、それを例外的とはみなさないで仲間に入れてみよう、というニュアンス？

定義 4.8 (有理型関数) D を $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の領域とするとき、f が D で**有理型 (meromorphic)** とは、極を除いて正則であることをいう (除去可能特異点がある場合、そこで関数の定義を修正して、正則であると考える)。すなわち、$(\exists E \subset D)$ $D \setminus E$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域で、$f\colon D \setminus E \to \mathbb{C}$ は正則、$\forall c \in E$ に対して、c は f の極である。

極全体の集合 $E = \emptyset$ もありうる (こういう場合を除外していない) ので、「正則関数は有理型関数である」。

注意 4.9 E の各点は孤立点である。実際、$c \in E$ とするとき、c は f の極であり、特に孤立特異点であるから、$(\exists R > 0)$ f は $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < R\}$ で定義されていて正則であるから、$D(c; R) \cap E = \{c\}$. ■

命題 4.10 (有理関数は Riemann 球で有理型) 有理関数は $\widehat{\mathbb{C}}$ で有理型である。

証明 $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z)$, $Q(z)$ は互いに素な複素係数の多項式) とする。$P(z)$ の零点を c_1, $\ldots$, c_N とするとき、f は $\mathbb{C} \setminus \{c_1, \ldots, c_N\}$ で正則であり、f は c_j を極とする ($j = 1, 2, \ldots, N$)。一方、$z = \infty$ について調べよう。

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right)$$

とおくとき、明らかに

$$g(w) = \frac{w\text{ の多項式}}{w\text{ の多項式}}$$

と書き直すことが出来る。これは $w = 0$ を極または除去可能特異点とする。ゆえに $f(z)$ は $z = \infty$ を極または正則点とする。

(後半の別証明: $R := \max\{|c_1|, \ldots, |c_N|\} + 1$ とおくとき、$R > 0$ で、$R < |z < \infty$ で f は正則であるから、∞ は f の孤立特異点である。

$$\lim_{\substack{z \neq \infty \\ z \to \infty}} f(z)$$

は ∞ または有限の複素数であることは容易に分かる。前者の場合 ∞ は f の極で、後者の場合 ∞ は f の除去可能特異点である。) ■

実は命題 4.10 の逆が成り立つ。

命題 4.11 $\widehat{\mathbb{C}}$ で有理型な関数は有理関数である。

(実は証明の要は、例 4.1 の議論と同じである。)

証明　f が $\widehat{\mathbb{C}}$ で有理型とする。定義から、f のすべての極の集合を $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ とするとき、$\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ で f は正則である。

実は E は有限集合である。実際、もし無限集合ならば、$\exists \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n \in E$, かつ $\forall j \neq k$ $c_j \neq c_k$. $\widehat{\mathbb{C}}$ は球面に同相であるからコンパクトで、$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列を持つ。その極限を c とする。c が極であっても (i.e. $c \in E$)、c が極でなくても (i.e. $c \notin E$, c は f の正則点)、$\exists R > 0$ s.t. f は $0 < |z - c| < R$ で正則となる。これは $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ と矛盾する[11]。

E が有限集合であるので、各点 c_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ における Laurent 展開の主部 f_j を集めて、$f - \sum_{j=1}^{N} f_j$ を考えると、上の議論と同様に定数関数となる。その定数を C とおくと

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} f_j(z) + C \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

Laurent 展開の主部 f_j はいずれも z の有理関数であるから、f も有理関数である。■

$\mathbb{C}$ においては、収束部分列を持たない点列が存在する。それは実は必ず有界でない点列である (Bolzano-Wierstrass の定理を思いだそう)。そのような点列は、∞ に発散するような部分列を持つが、$\widehat{\mathbb{C}}$ においては、それは ∞ に収束することに注意しよう。

有理型関数でない関数としては、真性特異点を持つ関数、分岐点を持つ関数がある。真性特異点は、孤立特異点でない場合にも定義することを注意しておく。

定義 4.12 (一般の真性特異点の定義) $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$, f は $A(c; 0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < R\}$ で有理型とする。c が f の**真性特異点**であるとは、f は $D(c; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < R\}$ では有理型でないことをいう。

c が f の孤立特異点であるとき、真性特異点の二つの定義の条件は同値である。実際、c が f の孤立特異点 ($\exists R > 0$) f は $A(c; 0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < R\}$ で正則) という前提のもとで、(a) (除去可能特異点), (b) (極) のいずれの場合も、f は $D(c; \varepsilon)$ で有理型であり、一方 (c) (孤立真性特異点) の場合、f は $D(c; \varepsilon)$ で有理型とはならない。

c が f の真性特異点であるとは、要するに、c は f の除去可能特異点や極ではないということである。

定理 4.13 (Picard) f は $0 < |z - c| < R$ で有理型で、c は f の真性特異点とするとき、

$$0 < |z - c| < R \quad \text{かつ} \quad f(z) \neq \omega$$

であるような $\omega \in \widehat{\mathbb{C}}$ は存在するとしても高々 2 つである。

$\widehat{\mathbb{C}} \setminus f(A(c; 0, R))$ の要素数は 2 以下である。

例 4.14 $f(z) = \exp \dfrac{1}{z}$ は 0 を真性特異点に持つ。$\widehat{\mathbb{C}} \setminus f(A(c; 0, R)) = \{0, \infty\}$

[11] 念のために書いておくと、$c_n \to c$ であることから、$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N$ $|c_n - c| < R$. c_N と c_{N+1} は相異なり、ともに E の点であるから、$D(c; R)$ 内に 2 つの E の点があることになる。

5 1次分数変換

微積分の世界で1次関数 $f(x) = ax + b$ が基本的であることは認めてもらえるであろう。($\mathbb{C}$ の世界では1次関数が基本的、と言っても良いかもしれない。) $\widehat{\mathbb{C}}$ の世界では、ここで紹介する1次分数変換が基本的である！

5.1 定義

1次分数変換とは、一口に言うと、$w = \frac{az+b}{cz+d}$ の形の式で定まる $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像である。

定義 5.1 $ad - bc \neq 0$ を満たす a, b, c, d を用いて

(i) ($c \neq 0$ の場合)

$$\varphi(z) := \begin{cases} \infty & (z = -d/c) \\ \dfrac{a}{c} & (z = \infty) \\ \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq -d/c, \infty) \end{cases}$$

(ii) ($c = 0$ の場合)

$$\varphi(z) := \begin{cases} \infty & (z = \infty) \\ \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を**1次分数変換 (linear fractional transformation)** と呼ぶ。

∞ での値や、$-d/c$ での値は、極限として定義されていると考えるのが覚えやすい。

細かいチェック

(a) $c \neq 0$ のとき。$z \to -\dfrac{d}{c}$ のとき $cz + d \to 0$, $az + b \to -\dfrac{ad}{c} + b = -\dfrac{ad-bc}{c} \neq 0$ に注意して、

$$\lim_{\substack{z \neq -d/c \\ z \to -d/c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty = \varphi(-d/c), \qquad \lim_{\substack{z \neq \infty \\ z \to \infty}} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z \to \infty} \frac{a + b/z}{c + d/z} = \frac{a}{c} = \varphi(\infty).$$

(b) $c = 0$ のとき。$ad - bc \neq 0$ であるから、$a, d \neq 0$, ゆえに $\dfrac{a}{d} \neq 0$ であるから

$$\lim_{\substack{z \neq \infty \\ z \to \infty}} \left(\frac{a}{d} z + \frac{b}{d} \right) = \infty = \varphi(\infty).$$

$c = 0$ の場合は、$-d/c = \infty$ であるので、例外扱いの2点 ($-d/c$ と ∞) が一致することに注意しよう。

$ad - bc \neq 0$ は、定数関数でないための条件である。

$ad-bc=0$ ならば定数関数であることの証明

よりどりみどり。$\varphi'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, あるいは $\varphi(z)-\varphi(0)=\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{b}{d}=\dfrac{(ad-bc)^2}{cz+d}$, あるいは割り算して得られる $\varphi(z)=\dfrac{a}{c}-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{ad-bc}{cz+d}$ のいずれかを使う。

5.2 性質

命題 5.2 任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続関数である (後で同相写像であることが分かる)。

証明 φ を任意の 1 次分数変換とするとき、$\forall z_0\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して、

$$\lim_{\substack{z\neq z_0\\ z\to z_0}}\varphi(z)=\varphi(z_0)$$

を示せば良い。$z_0\in\mathbb{C}$ かつ $cz_0+d\neq 0$ の場合は明らか。$z_0=\infty$ あるいは $cz_0+d=0$ の場合は、上の「細かいチェック」から分かる。■

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL(2;\mathbb{C})$ に対して、$\varphi_A(z):=\dfrac{az+b}{cz+d}$ とおく。$A\mapsto\varphi_A$ は $GL(2;\mathbb{C})$ から 1 次分数変換全体への全射である。

命題 5.3 (1) $A, B\in GL(2;\mathbb{C})$ ならば $\varphi_A\circ\varphi_B=\varphi_{AB}$.

(2) $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ に対して、$\varphi_I=\mathrm{id}$ ($\widehat{\mathbb{C}}$ の恒等写像).

(3) $A\in GL(2;\mathbb{C})$ ならば $\varphi_{A^{-1}}=(\varphi_A)^{-1}$.

証明

(1) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\in GL(2;\mathbb{C})$ とするとき、

$$AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+br&aq+bs\\cp+dr&cq+ds\end{pmatrix}.$$

$z\in\mathbb{C}$, $rz+s\neq 0$, $c\varphi_B(z)+d\neq 0$ とするとき、

$$\varphi_A\circ\varphi_B(z)=\varphi_A\left(\varphi_B(z)\right)=\varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right)=\frac{a\dfrac{pz+q}{rz+s}+b}{c\dfrac{pz+q}{rz+s}+d}=\frac{a(pz+q)+b(rz+s)}{c(pz+q)+d(rz+s)}$$
$$=\frac{(ap+br)z+(aq+bs)}{(cp+dr)z+(cq+ds)}=\varphi_{AB}(z).$$

結局、有限個の点を除いて、$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_{AB}(z)$. $\widehat{\mathbb{C}}$ から有限個の点を除いた集合は、$\widehat{\mathbb{C}}$ で稠密であるので、等式延長の原理から[12]、$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

(2) $c = 0$ の場合に相当するので、定義から

$$\varphi_I(z) = \begin{cases} \infty & (z = \infty) \\ z & (z \neq \infty). \end{cases}$$

これは φ_I が $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の恒等写像であることを示す。

(3) $A \in GL(2;\mathbb{C})$ のとき、$A^{-1} \in GL(2;\mathbb{C})$ である。

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = id, \quad \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \varphi_{A^{-1}A} = \varphi_I = id.$$

ゆえに $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$. ■

系 5.4 任意の 1 次分数変換 $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は全単射である。

証明　逆写像が存在するから。■

5.3 平行移動、定数倍、反転

平行移動 $T_b(z) := z + b$ は、

$$z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}$$

と書けるから、1 次分数変換である。行列 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が対応する。

定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ は、

$$az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$$

と書けるから、1 次分数変換である。行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が対応する。これはさらに 2 つに分解した方が分かりやすいかも知れない。つまり $a = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ と極形式で書き、$w = az = re^{i\theta z}$ を、$\zeta = e^{i\theta} z$, $w = r\zeta$ と分解すると、

$$\zeta = e^{i\theta} z$$

[12]「(X, d), (X', d') を距離空間とする。Ω は X の稠密な部分集合とする。連続写像 $f\colon X \to X'$, $g\colon X \to X'$ について、

$$\forall x \in \Omega \quad f(x) = g(x)$$

が成り立つならば、

$$\forall x \in X \quad f(x) = g(x).$$

は原点中心の角度 θ の回転を表し、

$$w = r\zeta$$

は拡大 ($r > 1$ の場合) または縮小 ($0 < r < 1$ の場合) を表す ($r = 1$ のときは恒等写像)。

反転 $R(z) = \dfrac{1}{z}$ は、

$$\frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}$$

と書けるから、1 次分数変換である。行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が対応する。

以上から、「平行移動、定数倍 (原点中心の回転と拡大・縮小)、反転は 1 次分数変換」であるが、逆に次が成り立つ。

命題 5.5 任意の 1 次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成で表される。

証明

(a) $c \neq 0$ の場合、$az + b$ を $cz + d$ で割り算すると、商が a/c, 余りが $b - ad/c$ であるから、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{b - \dfrac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{ad-bc}{cz+d} = -\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \dfrac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

$T_{d/c}$, R, $M_{-(ad-bc)/c^2}$, $T_{a/c}$ を順に施したことになる。

(b) $c = 0$ の場合、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

であるから、$M_{a/d}$, $T_{b/d}$ を順に施したことになる。■

5.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、$\mathbb{C}$ の (普通の) 円と直線の総称である。一般に、$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0$$

の形をした方程式で表される (教科書 [7] p.9 の例題 1.4)。$a = 0$ ならば直線、$a \neq 0$ ならば普通の円を表す。

命題 5.6 任意の 1 次分数変換は、任意の $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

証明　平行移動 T_d で、直線は直線に、普通の円は普通の円に写される。

定数倍 M_a ($a \neq 0$) で、直線は直線に、普通の円は普通の円に写される。

反転 $w=R(z)=\dfrac{1}{z}$ でどうなるか、調べよう。$z=\dfrac{1}{w}$ を方程式に代入すると、

$$a\frac{1}{w}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\overline{\beta}\frac{1}{w}+c=0.$$

$w\overline{w}$ をかけて

$$a+\beta w+\overline{\beta}\overline{w}+cw\overline{w}=0.$$

$$c':=a,\quad \beta':=\overline{\beta},\quad a':=c$$

とおくと、

$$a'w\overline{w}+\beta'\overline{w}+\overline{\beta'}w+c'=0.$$

これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを意味する。■

(雑ですね。

$$\{z\in\widehat{\mathbb{C}};az\overline{z}+\beta\overline{z}+\overline{\beta}z+c=0\}$$

の $w=\frac{1}{z}$ による像が

$$\{w\in\widehat{\mathbb{C}};a'w\overline{w}+\beta'\overline{w}+\overline{\beta'}w+c'=0\}$$

ということを主張しているつもりだが、証明は半分 (包含関係) しかやっていない。文句を言う人の課題とする。)

例 5.7 (準備中)

5.5 任意の相異なる 3 点を任意の相異なる 3 点に写す

命題 5.8 $\alpha,\beta,\gamma\in\widehat{\mathbb{C}}$ 相異なる 3 点とするとき、

$$\varphi(\alpha)=1,\quad \varphi(\beta)=0,\quad \varphi(\gamma)=\infty$$

を満たす 1 次分数変換 φ が一意的に存在する。

証明 (存在) 実際に構成してみせる。

$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ の場合、

$$\varphi(z):=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma},$$

$\beta=\infty$ の場合は

$$\varphi(z)=\frac{\alpha-\gamma}{z-\gamma},$$

$\gamma=\infty$ の場合は

$$\varphi(z)=\frac{z-\beta}{\alpha-\beta},$$

$\alpha=\infty$ の場合は

$$\varphi(z)=\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とすれば良い。
(一意性) φ_1, φ_2 がともに α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ にうつす 1 次分数変換とすると、$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ は、$\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ を満たす。$\varphi(\infty) = \infty$ より、$\exists a, b \in \mathbb{C}$ s.t. $\varphi(z) = az + b$ $(z \in \mathbb{C})$. $\varphi(0) = 0$ より $b = 0$. $\varphi(1) = 1$ を用いて $a = 1$. これから $\varphi = \mathrm{id}$. ゆえに $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

余談 5.1 $\varphi(z)$ を具体的に表した

$$\frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

を z, α, β, γ の**非調和比 (cross ratio)** と呼び、$(z, \alpha, \beta, \gamma)$ と表すことがある:

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}.$$

これは色々使い途があるが、ここでは深入りしない。 ■

系 5.9 α, β, $\gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ を相異なる 3 点とする。また、α', β', $\gamma' \in \widehat{\mathbb{C}}$ も相異なる 3 点とする。このとき、

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'$$

を満たす 1 次分数変換 φ が存在する。

証明 命題 5.8 の 1 次分数変換を $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ と表すことにして、$\varphi := \varphi_{\alpha'\beta'\gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta\gamma}$ とおくと、φ は条件を満たす 1 次分数変換である。 ■

例題 5.1 1, 2, 3 をそれぞれ 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。
(解答) 相異なる 3 点 α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す分数変換 $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ は、

$$\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2,3}(z) &= \frac{1-3}{1-2} \cdot \frac{z-2}{z-3} = \frac{2(z-2)}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}, \\ \varphi_{2,3,1}(z) &= \frac{2-1}{2-3} \cdot \frac{z-3}{z-1} = \frac{z-3}{-(z-1)} = \frac{-z+3}{z-1}. \end{aligned}$$

これらを与える行列は、それぞれ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である。求める 1 次分数変換 φ は、$\varphi = \varphi_{2,3,1}^{-1} \circ \varphi_{1,2,3}$ である。これは行列

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-1)(-1) - 3 \cdot 1} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

で与えられる 1 次分数変換で、

$$\varphi(z) = \frac{\frac{5}{2}z + \frac{-13}{2}}{\frac{3}{2}z + \frac{-7}{2}} = \frac{5z - 13}{3z - 7}. ■$$

6 無限和と無限積

(連分数展開もやりたかったのだが、どうも時間的に無理みたい。どこかで紹介する機会を伺う、か？)

6.1 はじめに

Taylor 展開、Laurent 展開以外にも、(正則, 有理型) 関数を表現する方法はある、という話をする。

(Cf. 多項式の因数分解, 有理式の部分分数分解.)

次に上げる等式は、初めて見たとき私は不思議に感じたが、調べてみると段々と自然な式に思えて来て、色々な応用があることを知るにつれて深く驚いたものである。

$$\pi\cot\pi z = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

(左辺の関数の極は $z = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ で、位数は 1 位、留数は 1 (詳しくは後述) であるから、Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{z-n}$ で、それらしい式であるが、こんなにシンプルとは！なお、$\dfrac{2z}{z^2-n^2} = \dfrac{1}{z-n} + \dfrac{1}{z+n}$ である。)

cot を知らない人のために

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \tan(\pi/2 - x)$. グラフは図 2 (p. 50)

歴史的には、余角の tangent ということで余接 (cotangent) と呼ばれた。

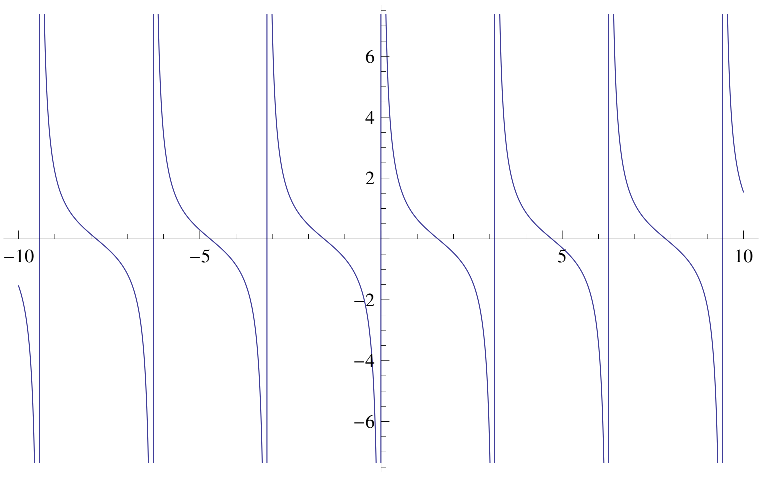


図 2: 実関数としての $\cot x$ のグラフ

次の等式は Euler によるものだが、“因数分解” のような式で、初めて見ると不思議な印象

を持つ人も多いだろう。

$$\begin{aligned}\sin \pi z &= \lim_{N\to\infty} \pi z \left(1-\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{N}\right)\left(1+\frac{z}{N}\right)\\ &= \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

($\sin \pi z$ は $z=n$ ($n\in\mathbb{Z}$) を 1 位の零点とするので、$(z-n)=-n(1-z/n)$ を因数としてくくり出せることは明らかだが、等式が成り立つのは簡単には信じられない。)

(余談: Euler は

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots \quad (\text{Maclaurin 展開})\\ &= \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

の右辺を展開して、x^2 の項の係数を比較することで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を初めて証明した (1748 年)。)

6.2 (復習) 一様収束

キーワード「一様収束」について、良くある説明をする。復習のようなものに感じられる人はこの項を飛ばして構わない。授業でもスキップすると思う。

定義 6.1 (関数列の各点収束、一様収束) $f\colon \Omega\to\mathbb{C}$, また $\forall n\in\mathbb{N}$ について $f_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とする。

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω 上**各点収束** (pointwise convergence, pointwise convergent, converges pointwise) するとは、

$$(\forall x\in\Omega)\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

i.e. $(\forall x\in\Omega)$ $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists N\in\mathbb{N})$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\quad n\ge N \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$
(あるいは $(\forall\varepsilon>0)$ $(\forall x\in\Omega)$ $(\exists N\in\mathbb{N})$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\quad n\ge N\Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$)

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上 f に**一様収束** (uniform convergence, uniformly convergent, converges uniformly) するとは、

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Omega}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

i.e. $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists N\in\mathbb{N})$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ $(\forall x\in\Omega)$ $\quad n\ge N\Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$
($(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists N\in\mathbb{N})$ $(\forall x\in\Omega)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\quad n\ge N\Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$)

例 6.2 (連続関数列の各点収束極限は連続ではないかも) $\{f_n\}$ が f に各点収束するというだ

けでは、f_n がすべて連続であっても、f が連続でないことがありうる。

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \geq \frac{1}{n}) \\ -1 & (x \leq -\frac{1}{n}) \\ nx & (-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}), \end{cases} \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \\ nx & (x = 0) \end{cases}$$

とおくとき、$\{f_n\}$ は f に各点収束する。f_n はすべて連続であるが、f は $x = 0$ で不連続である。 ■

例 6.3 (各点収束だけでは項別積分が出来ないかも) $\{f_n\}$ が f に各点収束するというだけでは、項別積分が出来ないかもしれない。

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ -n^2\left(x - \frac{2}{n}\right) & (\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}) \\ 0 & (x < 0 \text{ or } x > \frac{2}{n}), \end{cases} \qquad f(x) := 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

とおくとき、$\{f_n\}$ は f に各点収束する。ところで、

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1, \quad \int_0^2 f(x)\,dx = 0$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. ■$$

命題 6.4 (連続関数列の一様収束極限は連続関数、一様収束すれば項別積分可能)

(1) 連続関数列が一様収束すれば極限も連続である。

(2) 一様収束すれば、積分と lim は交換可能である。

証明

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow \sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. 特に $\sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. $\forall a \in \Omega$ に対して、f_N は a で連続なので

$$\exists \delta > 0, \forall y \in \Omega \quad |y - a| < \delta \Longrightarrow |f_N(y) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに $|y - a| < \delta$ を満たす任意の y に対して、

$$\begin{aligned} |f(y) - f(a)| &= |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \\ &\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2)

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx$$
$$\le \int_a^b \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\,dx = \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\int_a^b dx$$
$$= (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| \to 0 \quad (n\to\infty).\blacksquare$$

複素線積分についても同様である。曲線 C の像 C^* の上で、$\{f_n\}$ が一様に f に収束するならば、

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz\right| \le \sup_{z\in C^*}|f_n(z)-f(z)|\int_C |dz| \to 0.$$

命題 6.5 (導関数が一様収束すれば項別微分可能) 区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束し、$\{f_n'\}$ が I 上 g に一様収束するならば、f は C^1 級で、$f'=g$.

証明　$a\in I$ を任意に固定すると、

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \quad (x\in I)$$

が成り立つ。$n\to\infty$ とすると、

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \quad (x\in I).$$

ゆえに $f'(x)=g(x)$. ■

この証明と同様にして[13]

> $\mathbb{C}$ の領域 Ω 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f(z)$ に各点収束し、導関数の列 $\{g_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $g(z)$ に一様収束するならば、f は正則で、$f'=g$.

という命題が得られるが、実はもっと強い結果が成り立つ (命題 6.8)。

注意 6.1 (広義一様収束すれば項別微分が出来る) 実は命題 6.5 の仮定は緩められる。$\{f_n'\}$ は I 全体で g に一様収束する必要はなく、各点のある開近傍で一様収束すれば良い。すなわち、

$$\forall a\in I \quad (\exists V : a \text{ の開近傍}) \quad \text{s.t.} \quad \{f_n'\} \text{ は } V \text{ で一様に } g \text{ に収束する}$$

と仮定しても同じ結論が得られる。実際、

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \quad (x\in V)$$

[13] 既に述べたように、$F'=f$ となる F が存在する場合、$\int_C f(z)\,dz = F(b)-F(a)$ (a, b はそれぞれ C の始点、終点) であるから、$\int_a^z f_n'(\zeta)d\zeta = f_n(z)-f_n(a)$.

から

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,dt \quad (x\in V)$$

が得られ、これから $f'(x)=g(x)$ $(x\in V)$ が導かれるから。微分は局所的な演算であることが本質的である。

I の各点のある近傍で一様収束するという条件は、任意のコンパクト集合上で一様収束するということと同値である。このことを I で**広義一様収束**するという。英語では、“uniform convergence on every compact set” とか、“uniform convergence on compacta” という。

連続性についても事情は同じである。すなわち Ω 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上で広義一様に f に収束するならば、f は Ω で連続である。

逆に言うと、これまでに紹介した命題のうちで、広義一様収束だけでは駄目なのは (一様収束が必要なのは)、項別積分だけである。■

一様収束の判定法としては、次の定理に基づくものが便利である (これは一つの十分条件であって必要十分条件ではないが、非常に多くの場合にこの定理で一様収束が証明できる)。

命題 6.6 (Weierstrass の M test) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ は収束する正項級数で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は空でない集合 Ω 上定義された複素数値の関数列で、

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\Omega \quad |f_n(z)|\le M_n$$

が成り立つならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ は Ω 上一様に絶対収束する (特に一様収束するし、各点ごとに絶対収束する)。

証明 「絶対収束するならば収束する」ので、$\forall z\in\Omega$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ は収束する。和を $S(z)$ とおく。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ の和を U とおくと、

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}\quad n\ge N\Longrightarrow U-\sum_{k=1}^{n}M_k<\varepsilon.$$

このとき、$\forall z\in\Omega$ に対して、

$$\left|S(z)-\sum_{k=1}^{n}f_k(z)\right|=\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}f_k(z)\right|\le\sum_{k=m+1}^{\infty}|f_k(z)|\le\sum_{k=m+1}^{\infty}M_k=U-\sum_{k=1}^{n}M_k<\varepsilon.\blacksquare$$

注意 6.7 一様に絶対収束すること、すなわち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ は Ω 上一様収束することも分かる。■

冪級数の収束円の存在、収束円内で広義一様収束すること、収束円内の曲線に沿う積分で項別積分が出来ること、ローラン級数に関しても同様の命題が得られることは「複素関数」で説明してある。

6.3 正則関数列の広義一様収束

正則関数からなる関数列についても、「一様収束すれば項別積分可能」が成立する。それだけでなく、次の命題が成り立つ。

命題 6.8 (正則関数列が広義一様収束すれば項別微分可能) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上で定義された正則関数からなる関数列、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とする。$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上で広義一様に f に収束するならば、f は正則で、$f'(z)=\lim_{n\to\infty} f_n'(z)$ $(z\in\Omega)$.

(一般に、f に各点収束する C^1 級関数列 $\{f_n\}$ の導関数列が g に広義一様収束するならば、f は C^1 級で $f'=g$ という定理があるが、正則関数については、導関数列が収束する仮定の要らない定理がある、ということ。)

証明 まず f が Ω で連続であることは明らかである (一般に連続関数列の広義一様収束極限は連続であるから)。

$a\in\Omega$ とする。$\overline{D}(a;\varepsilon)\subset\Omega$ となる $\varepsilon>0$ を取る。任意の $z\in D(a;\varepsilon)$ を固定する。$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して、Cauchy の積分公式から、

$$(\sharp)\qquad f_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

$k=0$ の場合に、$n\to\infty$ とするとき、被積分関数は $|\zeta-a|=\varepsilon$ 上で一様収束する。実際、$d:=\varepsilon-|z-a|$ とおくと $d>0$ で、$|\zeta-a|=\varepsilon$ を満たす任意の ζ に対して

$$|\zeta-z|\geq|\zeta-a|-|a-z|=\varepsilon-|a-z|=d$$

となるので、Ω 内のコンパクト集合 $\{\zeta\in\mathbb{C};|\zeta-a|=\varepsilon\}$ 上で、$\{f_n\}$ は f に一様収束することに注意して

$$\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}\left|\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|\leq\frac{1}{d}\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta$$

が得られる。ゆえに f は $D(a;\varepsilon)$ で正則であり、

$$(\flat)\qquad (\forall k\in\mathbb{N})\quad f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\quad(z\in D(a;\varepsilon)).$$

最後に、$f_n^{(k)}\to f^{(k)}$ が広義一様収束であることを示す。

$$\left|f^{(k)}(z)-f_n^{(k)}(z)\right|\leq\frac{k!}{2\pi}\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}|f(\zeta)-f_n(\zeta)|\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{k+1}}.$$

$K := \overline{D}(a;\varepsilon/2)$ とおき、$z \in K$ とする。$|\zeta - a| = \varepsilon$ を満たす任意の ζ に対して

$$|\zeta - z| = |\zeta - a + a - z| \geq |\zeta - a| - |a - z| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

であるから

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{k+1}} \leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1}, \quad \int_{|\zeta-a|=\varepsilon} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{k+1}} \leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1} \cdot 2\pi\varepsilon.$$

ゆえに

$$\sup_{z\in K} \left| f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) \right| \leq k! \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1} \varepsilon \sup_{|\zeta-a|=\varepsilon} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

これは $\{f_n^{(k)}\}$ が K で一様収束することを意味する。■

関数列が Ω で一様収束するならば、当然ながら Ω で広義一様収束する (きちんと納得するべし)。従って、次のことも成り立つ。

系 6.9 (正則関数列が一様収束すれば項別微分可能) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上で定義された正則関数からなる関数列、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上で一様に f に収束するならば、f は正則で、$f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$ $(z \in \Omega)$.

ここまでの議論は、それなりに長くて、紆余曲折あったが、結局関数論で使える道具として、以下のものが得られた。

Ω 上の正則関数からなる関数列 $\{f_n\}$ が、Ω 上で f に広義一様収束するとき、f は Ω で正則で、

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (\Omega \text{ で広義一様}).$$

さらに C 内の任意の区分的に滑らかな曲線 C に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\, dz = \int_C f(z)\, dz.$$

(C の像 C^* は Ω 内のコンパクト集合であるから、$\{f_n\}$ は C^* 上で f に一様収束することに注意せよ。)

これから、(冪級数、ローラン級数以外の) 色々な正則関数を作り出すことが出来る。

例 6.10 (Riemann のゼータ関数) (以下では、$n \in \mathbb{N}$ に対して $n^z = \exp(z \log n)$ と定義する。ここで $\log n$ は主値、この場合は要するに $\log n \in \mathbb{R}$ となる、高校数学でおなじみの実関数としての対数関数と一致する。n^z は $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である。)

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

の右辺の級数は、領域 $D := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 1\}$ で正則な関数を表すことを以下に示す。これは **Riemann のゼータ関数**と呼ばれ、非常に有名である。

任意の $\alpha > 1$ を固定して、$D_\alpha := \{z \in D \mid \mathrm{Re}\, z > \alpha\}$ で考える。

$$|n^z| = |\exp(z \log n)| = \exp \mathrm{Re}(z \log n) = \exp[(\mathrm{Re}\, z) \log n] = n^{\mathrm{Re}\, z} \geq n^\alpha.$$

ゆえに $M_n := \dfrac{1}{n^\alpha}$ とおくとき、

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| \leq M_n \quad (n \in \mathbb{N},\ z \in D_\alpha), \qquad \sum_{n=1}^\infty M_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} < \infty.$$

ゆえに Weierstrass の M-test から、D_α で、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ は一様収束し、正則関数 ζ を定める (系 6.9)。$\alpha > 1$ は任意であったから、ζ は D で正則となる。

— ここでは系 6.9 を用いたが、命題 6.8 を用いて証明することも出来る[14]。

Riemann のゼータ関数では、変数を s と書くのが通(つう)である[15]:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}.$$

これは $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されるが、その零点について、有名な **Riemann 予想**がある。

Riemann 予想 (1859 年)

$\zeta(s)$ の零点は、自明な零点 $s = -2n$ $(n \in \mathbb{N})$ 以外はすべて直線 $\mathrm{Re}\, s = \dfrac{1}{2}$ 上に乗っている。

これはもともとは**素数定理**[16]の証明のために持ち出された予想 (1859 年) であるが、素数定理が別の方法[17]で証明された後も未解決として残った。もし証明されれば、様々な重要な結果を導くことが知られている。周辺的な結果は色々得られているが、上の命題自体は、2015 年 5 月現在証明されていない。 ■

例 6.11 ($\pi \cot \pi z$ **の部分分数展開、まず展開式が広義一様収束すること**)

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

の右辺の級数は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で広義一様に収束し、正則関数 f を定めることを以下に示す。

$n \to \infty$ のときに、級数の一般項 $\sim \dfrac{2z}{-n^2}$ であることを観察しておこう。

$|z| < n$ とするとき、$|1 - z^2/n^2| \geq 1 - |z|^2/n^2 > 0$ であるから、

$$\left|\frac{2z}{z^2 - n^2}\right| = \left|\frac{2z}{-n^2(1 - z^2/n^2)}\right| = \frac{2|z|}{n^2|1 - z^2/n^2|} \leq \frac{2|z|}{n^2(1 - |z|^2/n^2)}.$$

[14] K を D 内の任意のコンパクト集合とするとき、$\min\{\mathrm{Re}\, z \mid z \in K\}$ が存在するので、それを α とおくと、$\alpha > 1$, $K \subset \overline{D_\alpha}$. 級数は $\overline{D_\alpha}$ で一様収束するので、K で一様収束する。ゆえに級数は D で広義一様収束する。

[15] Riemann がそうしたから (Riemann の論文の邦訳が鹿野 [10] にある)、大抵の人はそれに従っている。

[16] x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ について、$\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$ $(x \to +\infty)$. Gauss が予想した。

[17] 例えば Bak-Newman [11] §19.5.

任意の $R>0$ に対して、$N\in\mathbb{N}$ を $N\ge 2R$ となるように取ると、

$$(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\le R)\ (\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N)\quad \left|\frac{z}{n}\right|\le\frac{R}{N}\le\frac{1}{2}.$$

このとき

$$\frac{1}{1-|z|^2/n^2}\le\frac{1}{1-(1/2)^2}=\frac{4}{3}.$$

まとめると、

$$\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right|\le\frac{2R}{n^2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8R}{3}\cdot\frac{1}{n^2}\quad(|z|\le R,\ n\ge N).$$

Weierstrass の M-test によって、$|z|<R$ で $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$ は一様収束することが分かる。ゆえに、$\{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\mid |z|<R\}$ で正則な関数 f が定まる。$R>0$ は任意であるから、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で正則な関数 f が定まる。■

6.4 余接関数の部分分数分解

関数 φ を

$$\varphi(z):=\pi\cot\pi z=\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}$$

で定めるとき、φ は $\mathbb{C}$ で有理型で、$z=n$ $(n\in\mathbb{Z})$ を 1 位の極に持ち、そこでの留数は 1 であり、それ以外に極は持たない。実際、$P(z):=\sin\pi z$, $Q(z):=\pi\cos\pi z$ とおくとき、$P(z)$ と $Q(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則であり、

$$\begin{aligned}&(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})\quad P(z)\ne 0,\\&(\forall n\in\mathbb{Z})\quad P(n)=0\land P'(n)\ne 0\land Q(n)\ne 0,\\&\mathrm{Res}(\varphi;n)=\mathrm{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)};n\right)=\frac{Q(n)}{P'(n)}=\frac{\pi\cos n\pi}{\pi\cos n\pi}=1.\end{aligned}$$

ゆえに、φ の極は $n\in\mathbb{Z}$ であり、n のまわりのローラン展開の主要部は $\dfrac{1}{z-n}$ である。これを集めた $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-n}$ は収束しない (大ざっぱに言うと、z を任意に固定したとき、$|n|$ が大きいとき、$\dfrac{1}{z-n}\sim-\dfrac{1}{n}$ であり、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\infty$)。しかし、これを

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}&=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)\right]=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{N}\frac{2z}{z^2-n^2}\right)\\&=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\end{aligned}$$

のように、0 をはさんで左右対称に和を取ってから極限を取るようにまとめ直すと、広義一様収束する (例 6.11 で証明済み)。そして、実はこの和は $\varphi(z)$ である。すなわち次が成り立つ。

命題 6.12 (余接関数の部分分数展開) $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ に対して、

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{21}$$

有理関数 $f=\dfrac{Q}{P}$ については、$\mathbb{C}$ 内の全ての極 $c_1,\dots,c_r$ と、無限遠点 ∞ における Laurent 展開の主部を集めると、f が再生される (そして、それは f の部分分数分解に他ならない) という結果があったが、それに良く似ている。

証明 $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ を固定し、関数 f を

$$f(\zeta):=\frac{\pi\cot\pi\zeta}{\zeta-z}$$

で定める。

$N\in\mathbb{N}$ は $|z|<N$ が成り立つよう十分大きいとして、$R:=N+\dfrac{1}{2}$ とおく。複素平面で、4 点 $\pm R\pm iR$ を頂点とする正方形の周を、正の向きに 1 周する閉曲線を C とする (図が欲しい)。

このとき $\displaystyle\int_C f(\zeta)\,d\zeta$ を考えよう。

f は $\mathbb{C}$ 全体で有理型であり、$\zeta=z$, $\zeta=k$ $(k\in\mathbb{Z})$ が極の全体で、位数はいずれも 1 である。それらの点における留数は[18]

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;z)&=\lim_{\zeta\to z}(\zeta-z)f(\zeta)=\lim_{\zeta\to z}\pi\cot\pi\zeta=\pi\cot\pi z,\\
\operatorname{Res}(f;k)&=\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta-z}\cdot\pi\cot\pi\zeta;k\right)=\left.\frac{1}{\zeta-z}\right|_{\zeta=k}\operatorname{Res}(\pi\cot\pi z;k)=\frac{1}{k-z}\cdot 1=\frac{1}{k-z}.
\end{aligned}$$

留数定理により、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta&=\sum_{c\text{ は曲線 }C\text{ の内部}}\operatorname{Res}(f;c)=\sum_{c=z,0,\pm1,\dots,\pm N}\operatorname{Res}(f;c)\\
&=\pi\cot\pi z+\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{k-z}\\
&=\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{z+k}\right).
\end{aligned}$$

$N\to\infty$ のときの右辺の極限が 0 であることを示すことができれば、(21) が証明できる。そのためには、左辺の極限が 0 であること、すなわち

$$\lim_{N\to\infty}\int_C f(\zeta)\,d\zeta=0$$

を示せばよい。

[18]「c が f の正則点、g の 1 位の極であるとき、$\operatorname{Res}(fg;c)=f(c)\operatorname{Res}(g;c)$」が成り立つ。

C の上の辺では、$\zeta = x + iR$ $(x \in [-R, R])$ と書ける。

$$\cot \pi\zeta = \frac{\cos \pi\zeta}{\sin \pi\zeta} = \frac{e^{i\pi\zeta} + e^{-i\pi\zeta}}{2} \cdot \frac{2i}{e^{i\pi\zeta} - e^{-i\pi\zeta}} = i\frac{e^{i\pi\zeta} + e^{-i\pi\zeta}}{e^{i\pi\zeta} - e^{-i\pi\zeta}} = i\frac{1 + e^{-2i\pi\zeta}}{1 - e^{-2i\pi\zeta}}$$
$$= i\frac{1 + e^{-2i\pi(x+iR)}}{1 - e^{-2i\pi(x+iR)}} = i\frac{1 + e^{2\pi(R-ix)}}{1 - e^{2\pi(R-ix)}} = -i\frac{e^{2\pi(R-ix)} + 1}{e^{2\pi(R-ix)} - 1}$$

であるから、

$$|\cot \pi\zeta| = \frac{\left|e^{2\pi(R-ix)} + 1\right|}{\left|e^{2\pi(R-ix)} - 1\right|} \le \frac{\left|e^{2\pi(R-ix)}\right| + 1}{\left|e^{2\pi(R-ix)}\right| - 1} = \frac{e^{2\pi R} + 1}{e^{2\pi R} - 1}.$$

$R = N + \dfrac{1}{2} \ge \dfrac{3}{2}$ であるから、$2\pi R \ge 2\pi \cdot \dfrac{3}{2} = 3\pi \ge 9$ であり、$e^{2\pi R} \ge 2^9 = 512$. $t \mapsto \dfrac{t+1}{t-1}$ は $t > 1$ で単調減少であることから、

$$|\cot \pi\zeta| \le \frac{512 + 1}{512 - 1} = \frac{513}{511} \le 2.$$

同様の計算で、C の下の辺でも、$|\cot \pi\zeta| \le 2$.

また C の左の辺、右の辺では、$|\cot \pi\zeta| \le 1$ が成り立つ。実際、$\zeta = \pm R + iy$ のとき、$-2\pi i\zeta = 2\pi y \mp 2\pi i R$ であるから、$e^{-2\pi i\zeta} = -e^{2\pi y}$ であり、

$$\cot \pi\zeta = i\frac{1 - e^{2\pi y}}{1 + e^{2\pi y}}, \quad \text{ゆえに} \quad |\cot \pi\zeta| = \frac{1 - e^{2\pi y}}{1 + e^{2\pi y}} < 1.$$

さて、$g(\zeta) := \dfrac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta}$ とおくとき、これは偶関数 $(g(-\zeta) = g(\zeta))$ であるから、積分路の対称性から[19]

$$\int_C g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

それゆえ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(f(\zeta) - g(\zeta)\right)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \pi \cot \pi\zeta \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right)\, d\zeta$$
$$= \frac{z}{2i}\int_C \cot \pi\zeta \frac{1}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta$$

であるから、$|\zeta| \ge R > |z|$ に注意して、

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\, d\zeta\right| \le \frac{|z|}{2}\int_C |\cot \pi\zeta| \frac{1}{|\zeta| \cdot |\zeta - z|}\, |d\zeta| \le \frac{|z|}{2}\int_C 2\frac{1}{|\zeta|(|\zeta| - |z|)}\, |d\zeta|$$
$$\le |z|\int_C \frac{1}{R(R - |z|)}\, |d\zeta| \le |z| \cdot 8R \cdot \frac{1}{R(R - |z|)}$$
$$= 8|z|\frac{1}{R - |z|} \to 0 \quad (N \to \infty).\blacksquare$$

---

[19] C のうち、正方形の右の辺、上の辺の部分を C_1, それ以外の部分を C_2 とすると、$C = C_1 + C_2$. C_1 上の積分 $\int_{C_1} g(\zeta)\, d\zeta$ で、$\zeta = -w$ と変数変換すると、$\int_{C_1} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{C_2} g(-w) \cdot (-dw) = -\int_{C_2} g(w) dw$. ゆえに $\int_C g(\zeta)\, d\zeta = 0$.

例 6.13 **($1/\sin^2$ の部分分数展開)** $\pi\cot\pi z$ の部分分数展開

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

の右辺は、各項が正則関数の、広義一様収束級数であるから、命題 6.8 によって、項別微分可能で、その結果も広義一様収束級数である:

$$\pi\cdot\left(-\frac{\pi}{\sin^2\pi z}\right) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{(z-n)^2} + \frac{(-1)}{(z+n)^2}\right).$$

整理して

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right). \blacksquare$$

系 6.14 **(ゼータ関数の正の偶数における値)** ζ を Riemann のゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ とする。$\pi z\cot\pi z$ の 0 の周りの Taylor 展開を $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ とするとき

$$\zeta(2m) = -\frac{b_{2m}}{2} \quad (m\in\mathbb{N}).$$

Bernoulli 数 ($\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$ で定まる $\{B_{2n}\}_{n\geq 0}$) を使って言い替えると

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m} \quad (m\in\mathbb{N}).$$

証明 (21) より

$$\pi z\cot\pi z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2-n^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z^2}{n^2}\right)^m = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\right)z^{2m}$$
$$= 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)z^{2m}.$$

係数を比較して $b_{2m} = -2\zeta(2m)$ $(m\in\mathbb{N})$ であるから、

$$\zeta(2m) = -\frac{b_{2m}}{2} \quad (m\in\mathbb{N}).$$

Bernoulli 数を用いると、$\pi z\cot\pi z$ の Taylor 展開は

$$\pi z\cot\pi z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}z^{2n}. \tag{22}$$

と表されるのであった。ゆえに

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!} \pi^{2m} \quad (m \in \mathbb{N}).\blacksquare$$

余談 6.1 筆者が高校生の頃、数学の未解決問題として有名なものには、双子素数の問題、四色問題、フェルマー予想、ポアンカレ予想、リーマン予想などがあった。このうち四色問題は 1976 年に解決、フェルマー予想は 1995 年に解決、ポアンカレ予想は 2006 年 (?) に解決した。残っているのは双子素数の問題とリーマン予想だけ… ■

速習: Bernoulli 数と cot, tan の Taylor 展開

$f(z) := \dfrac{z}{e^z - 1}$ は $|z| < 2\pi$ で正則であるから、

$$B_n := f^{(n)}(0) \quad \text{とおくと、} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (|z| < 2\pi).$$

最初の数項を計算すると、

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \cdots$$

B_n を **Bernoulli 数**と呼ぶ。ヨハン・ベルヌーイにちなむが、和算家の関孝和も独立に発見していたという話がある (冪乗和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$ の公式に現れる)。その定義には、様々な流儀があるが、上の定義は一番メジャーなもので、Mathematica でも採用されている (`BernoulliB[]` という関数が用意されている)。なお、二番目にメジャーな定義では、$B_1 = 1/2$ (符号が違う) である以外は上と一致するので、cot, tan の Taylor 展開 (B_1 は現れない) には影響しない。

実は $B_{2k-1} = 0$ $(k = 2, 3, \cdots)$ である。これは

$$f(z) + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}$$

が偶関数である (容易に確認可能) ことから分かる。

実は

$$\cot z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

実際、

$$\cot z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i \left(1 + \frac{2}{e^{2iz} - 1} \right)$$

より

$$\begin{aligned} z \cot z &= iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = iz + f(2iz) = iz + \left(-\frac{2iz}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2iz)^{2k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \end{aligned}$$

一方、

$$2 \cot 2z = 2 \frac{\cos 2z}{\sin 2z} = 2 \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{2 \sin z \cos z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{\sin z}{\cos z} = \cot z - \tan z$$

であるから、

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} \left(2^{2n} - 1\right) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

注意 6.15 上の系 6.14 は、神保 [7] によるが、[7] では Bernoulli 数の定義がこの「速習」と食い違っている。

$$神保\ [7]\ の\ B_{2n} = (-1)^{n-1}B_{2n} > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

である。■

6.5 無限乗積

(準備中)

7 等角写像

この節を通じて、複素平面内の原点を中心とする単位円盤 $D(0;1)$ が頻出するので、D_1 と書くことにする。

$$D_1 := D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

U, V が $\mathbb{C}$ の開集合、$\varphi\colon U \to V$ とするとき、φ が**双正則** (biholomorphic) であるとは、φ が正則かつ全単射で、$\varphi^{-1}\colon V \to U$ も正則であることをいう。

7.1 はじめに

定理 7.1 (Riemann の写像定理, 1851 年) $\mathbb{C}$ 内の任意の単連結領域 D ($\neq \mathbb{C}$) は、単位円盤 D_1 に「等角に写される」。すなわち全単射 $\varphi\colon D \to D_1$ で、φ と φ^{-1} の双方が正則であるものが存在する。

このように、与えられた領域 D に対して、D から単位円盤のような「標準的な」領域への双正則写像 φ があるとき、φ を、領域 D の**等角写像**あるいは**写像関数**と呼ぶ。

この定理は理論的にも重要であるが、工学的にも、問題となっている領域 D の等角写像が得られると便利な場合が多く、その存在を保証するこの定理は尊重されている (ようである)。

なお、単連結の場合しか書いていないテキストが多いが、多重連結領域の場合にも同様の等角写像 (ただし値域は単位円盤ではない) の存在を保証する定理がある。

注意 7.2 (等角写像とは) $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ と $z_0 \in \Omega$, z_0 を通る滑らかな曲線 C_0, C_1 に対して、$w_0 := f(z_0)$, C_0 と C_1 の像 $f(C_0)$, $f(C_1)$ を作るとき、C_0 と C_1 のなす角と $f(C_0)$ と $f(C_1)$ のなす角が等しいとき、f は z_0 で等角という。

領域内の各点で等角であるためには、f が正則で、$f' \neq 0$ が成り立つことが必要十分であることが知られている。■

7.2 単位円盤 D_1 の等角写像

次の事実を証明しよう。

D_1 から D_1 への双正則な関数の一般形は

$$f(z)=\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z},$$

ただし ε, z_0 は、$|\varepsilon|=1$, $|z_0|<1$ を満たす複素数である。

命題 7.3 (Schwarz の補題) $f\colon D_1\to\mathbb{C}$ は正則で

$$(\forall z\in D_1)\,|f(z)|\le 1,\quad f(0)=0$$

を満たすならば、

$$(\forall z\in D_1)\,|f(z)|\le |z|\,,\quad |f'(0)|\le 1$$

が成り立つ。さらに

$$(*)\qquad ((\exists z_1: 0<|z_1|<1)\,|f(z_1)|=|z_1|)\quad\vee\quad |f'(0)|=1$$

が成り立つならば、

$$(\exists c\in\mathbb{C}: |c|=1)(\forall z\in D_1)\quad f(z)=cz.$$

この命題を証明するために、正則関数の最大値原理が必要になる。念のため、復習しておこう。

命題 7.4 (正則関数の最大値原理 (the maximum modulus principle)) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$g\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$z_0\in\Omega$,

$$(\forall z\in\Omega)\quad |g(z)|\le|g(z_0)|\quad (\text{i.e., } |g(z_0)| \text{ は } |g| \text{ の最大値})$$

が成り立つならば、

$$(\exists c\in\mathbb{C})(\forall z\in\Omega)\quad g(z)=c.$$

(領域で正則関数の絶対値が最大値を取れば、実は定数関数である。)

Schwarz の補題は以下のように証明出来る。

証明 $g(z):=\dfrac{f(z)}{z}$ は $z=0$ を除去可能特異点とするので、D_1 で正則として良い。

$0<r<1$ を満たす任意の実数 r に対して、$|g|$ の $\overline{D}(0;r)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le r\}$ における最大値は、最大値原理によって、円周 $|z|=r$ 上で実現されることが分かる。すなわち

$$(\exists z_0\in\mathbb{C}: |z_0|=r)(\forall z\in\mathbb{C}: |z|\le r)\quad |g(z)|\le|g(z_0)|\,.$$

ゆえに

$$|g(z)|\le|g(z_0)|=\frac{|f(z_0)|}{|z_0|}\le\frac{1}{r}.$$

特に

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \le r) \quad |g(z)| \le \frac{1}{r}.$$

これから

$$(\forall z \in D_1) \quad |g(z)| \le 1$$

が得られる (背理法を使えば簡単)。f で書くと

$$(\forall z \in D_1) \quad |f(z)| \le |z|\,.$$

また $g(0) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = f'(0)$ であるから、

$$|f'(0)| = |g(0)| \le 1.$$

$(*)$ が成り立つ場合を考える。$(*)$ は g で表すと、

$$(\exists z \in D_1) \quad |g(z)| = 1$$

である。これは領域 D_1 で正則関数の絶対値 $|g|$ の最大値が存在する、ということを意味するので、最大値の原理によって、g は定数関数である:

$$(\exists c \in \mathbb{C})(\forall z \in D_1) \quad g(z) = c.$$

$\max_{z\in D_1} |g(z)| = 1$ であるから $|c| = 1$ である。ゆえに $f(z) = cz$ $(z \in D_1)$. ■

問 10. $z_0, \varepsilon \in \mathbb{C}$, $|z_0| < 1$, $|\varepsilon| = 1$ とするとき、

$$w = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}\, z}$$

で定まる 1 次分数変換について、以下のことを示せ。

(1) $|1 - \overline{z_0} z|^2 - |z - z_0|^2 = \left(1 - |z_0|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)$.

(2) $1 - |w|^2 = \dfrac{\left(1 - |z_0|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{|1 - \overline{z_0}\, z|^2}$.

補題 7.5 $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, $z_0 \in D_1$ とするとき、

$$f(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} |z| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |f(z)| < 1, \\ |z| = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |f(z)| = 1, \\ |z| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |f(z)| > 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。特に $f(D_1) = D_1$ で、$f|_{D_1} \colon D_1 \to D_1$ は双正則である。

証明　$f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は 1 次分数変換であるから、双正則であることに注意する。問 10 より

$$1-|f(z)|^2=\frac{\left(1-|z_0|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\overline{z_0}z|^2}$$

が成り立つ。$1-|z_0|^2>0$, $|1-\overline{z_0}z|^2>0$ であるから、左辺の符号は $1-|z|^2$ の符号と一致する。

$|z|<1 \Rightarrow |f(z)|<1$ より $f(D_1)\subset D_1$. $|f(z)|<1 \Rightarrow |z|<1$ は、$|w|<1 \Rightarrow |f^{-1}(w)|<1$ を意味するので $f^{-1}(D_1)\subset D_1$. ゆえに $D_1\subset f(D_1)$. ゆえに $f(D_1)=D_1$. ■

命題 7.6 (単位円盤の等角写像の特徴付け) $f\colon D_1\to D_1$ が双正則であれば

$$(\exists\varepsilon\in\mathbb{C}:|\varepsilon|=1)(\exists z_0\in D_1)(\forall z\in D_1)\quad f(z)=\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}.$$

(証明に先立ち、黒板に 3 つの単位円を描く。)

証明　$f(D_1)=D_1\ni 0$ より、$f(z_0)=0$ を満たす $z_0\in D_1$ が存在する。

$$\varphi(z):=\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z},\quad F(z):=f\left(\varphi^{-1}(z)\right)$$

とおくと、$\varphi\colon D_1\to D_1$ と $f\colon D_1\to D_1$ が双正則であることから、$F\colon D_1\to D_1$ も双正則である。そして

$$F(0)=f\left(\varphi^{-1}(0)\right)=f(z_0)=0.$$

$|F(z)|<1$ $(z\in D_1)$ より Schwarz の補題が適用できて、

$$|F(z)|\le|z|\quad(z\in D_1).$$

一方 $F^{-1}(D_1)=D_1$ であるから、やはり Schwarz の補題が適用できて、

$$\left|F^{-1}(w)\right|\le|w|\quad(w\in D_1).$$

これは

$$|z|\le|F(z)|\quad(z\in D_1)$$

を意味する。ゆえに

$$|F(z)|=|z|\quad(z\in D_1).$$

再び Schwarz の補題によって、

$$(\exists\varepsilon\in\mathbb{C}:|\varepsilon|=1)(\forall z\in D_1)\quad F(z)=\varepsilon z.$$

$F=f\circ\varphi^{-1}$ であるから、

$$f(z)=F\left(\varphi(z)\right)=\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}. ■$$

余談 7.1 次の命題は、命題 7.6 よりも弱いので、論理的には必要ないが、証明のアイディアが参考になるので紹介しておく。

> 1 次分数変換 $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が $f(D_1) = D_1$ を満たすならば
>
> $$(\exists \varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| = 1)(\exists z_0 \in D_1)(\forall z \in D_1) \quad f(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}.$$

証明 $f(D_1) = D_1$ より $(\exists z_0 \in D_1)\ f(z_0) = 0$. 鏡像の原理より、$z_0$ の鏡像 $\dfrac{z_0}{|z_0|^2} = \dfrac{1}{\overline{z_0}}$ の f による像は ∞ である。これから

$$(\exists c \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = c \frac{z - z_0}{z - 1/\overline{z_0}} = -c \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}.$$

$|z| = 1$ とするとき、$\overline{z} = \dfrac{|z|^2}{z} = \dfrac{1}{z}$ より、

$$|z - z_0| = |z|\,|1 - z_0/z| = 1 \cdot |1 - z_0 \overline{z}| = |1 - \overline{z_0} z|$$

であるから、$|f(z)| = |c|$. ゆえに $|c| = 1$. $\varepsilon := -c$ とおくと、$|\varepsilon| = 1$ であり、かつ

$$f(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}. \blacksquare$$

A　2015 年度の「はじめに」

この講義の内容をさらっと説明する。大きく 2 つのパートに分けられる。

前半は「複素関数」の続きである。「複素関数」の内容は、少なくとも計算に関する部分は、多くの大学の理工系の学科で講義されている標準的なものであるが (ただし、証明をきちんとするのは数学科とこの現象数理学科くらいだ)、“もう少し” 詳しい内容を教えているところも多い。それらは応用上有用なもの、少なくともその基礎となるものが多いので、適当にピックアップして解説する。この部分は、(「複素関数」の教科書でもあった) 神保 [7] を教科書と考えてもらいたい。

後半は複素関数論の応用の中からいくつかのトピックを選んで紹介する。私自身がある程度詳しく知っていて、個人的に重要だと信じていることを選んだ (この部分は誰が講義を担当するかで違うが、それほど突飛な選択ではないと思っている)。この講義は、コンピューター数理ということになっていて、その趣旨にも合う内容にするつもりである。

B　近傍

この講義では、近傍について学びたければ、位相空間のテキスト (古いけれど、大抵のことが確実に書いてあるものとして、松坂 [8], 河田・三村 [9] をあげておく) で自習しよう、というスタンスだけれど、言葉の定義くらいは説明しておこう。

以下、一応は一般的な位相空間の話として説明するが、$X = \mathbb{C}$ と思って読めば十分である。

定義 B.1 (点の近傍, 部分集合の近傍) (1) X を位相空間、$a \in X, U \subset X$ とする。U が a の**近傍** (a neighborhood of a) であるとは、X の開集合 V で、$a \in V \subset U$ を満たすものが存在することをいう。U が開集合である場合、U は a の開近傍であるという。

(2) X を位相空間, $a \in X$ とするとき、a の近傍全体の集合を a の**近傍系** (the complete system of neighborhoods for a) と呼ぶ。

余談 B.1 (部分集合の近傍) 点でなく、部分集合に対しても、その近傍が定義される。

X を位相空間、$A \subset X, U \subset X$ とする。U が A の**近傍** (neighborhood) であるとは、X の開集合 V で、$A \subset V \subset U$ を満たすものが存在することをいう。U が開集合である場合、U は A の開近傍であるという。 ■

一般の「近傍」は知らなくても、「ε 近傍」という言葉は知っている人が多いと想像する。a の ε 近傍とは、a を中心とする半径 ε の開円盤 $D(a;\varepsilon)$ である。

例 B.2 (ε 近傍は近傍である) $a \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0$ とするとき、$U := D(a;\varepsilon)$ は a の近傍である。実際、$V := U$ とおくと、V は開集合で、$a \in V \subset U$. ゆえに U は a の近傍である。 ■

例 B.3 $a \in \mathbb{C}, U \subset \mathbb{C}$ の場合、U が a の近傍であるためには、

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad D(a;\varepsilon) \subset U$$

であることが必要十分である。(感覚的な言い回しになるが、a に十分近い点はもれなく含んでいるのが近傍である。) この条件を見て、開集合の定義を思い出す人も多いと思う。開集合は、それに属する任意の点の近傍である。 ■

問 11. このことを証明せよ。

問 10 の解答 U が a の近傍とすると、ある開集合 V が存在して、$a \in V \subset U$. 開集合の定義から、$(\exists \varepsilon > 0)\ D(a;\varepsilon) \subset V$. ゆえに $D(a;\varepsilon) \subset U$.

逆に、 $(\exists \varepsilon > 0)\ D(a;\varepsilon) \subset U$ が成り立つとするとき、$V := D(a;\varepsilon)$ とおくと、V は開集合で、$a \in V \subset U$ が成り立つ。■

定義 B.4 (位相空間の 1 点の基本近傍系) X を位相空間、$a \in X$ とする。X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が、a の**基本近傍系**とは、次の 2 条件が成り立つことを言う。

(i) $\mathcal{U}$ の任意の元 U は a の近傍である (U は a を含むある開集合を含む)。

(ii) $(\forall V\colon V$ は a の近傍$)\ (\exists U \in \mathcal{U})\ U \subset V$.

基本近傍系は、近傍系の部分集合であるが、開集合、点列の極限、関数の極限・連続性などの判定には、基本近傍系だけあれば十分である (Riemann 球面の場合の定義 3.5 を見よ)。

例 B.5 (ある点を中心とする球の族は、その点の基本近傍系) $a \in \mathbb{C}$ とするとき、$\{D(a;\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ は a の基本近傍系になる。 ■

問 12. このことを証明せよ。(上で色々準備してあるので、簡単に済む。)

以上は、あらかじめ位相が決まっている (開集合系が与えられている) 場合の話であるが、位相が定まっていない集合に対して、各点の基本近傍系となるべき集合族を与えることで位相を定めることが出来る (Riemann 球面の位相の決定がまさにそれであった)。

そのための基礎となるのが次の命題である。

命題 B.6 集合 X の各点 x に対して、X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{B}(x)$ が与えられていて、次の条件を満たすとき、X の位相が一意的に存在して、それについて、$\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系となる。

任意の $x \in X$ に対して、

(i) $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$.

(ii) $(\forall V_1, V_2 \in \mathcal{B}(x))\ (\exists U \in \mathcal{B}(x))\ U \subset V_1 \cap V_2$.

(iii) $\emptyset \notin \mathcal{B}(x)$.

(変だな。(iii) は $\forall V \in \mathcal{B}(x)\ x \in V$ とすべきか ??)

問 13.　このことを証明せよ。(方針の説明: 開集合をどう定義すれば良いか、すぐ思いつくであろう。そのとき、位相 (開集合系) の公理が成り立つことは簡単に確認できる。その開集合系を使って近傍を定義したとき、$\mathcal{B}(x)$ が x の基本近傍系になっていることを確認する。一意性は⋯)

問 11 の解答　(略)

問 12 の解答　(略)

C　関数の表現

D　解析接続

E　ラプラス方程式の境界値問題

F　複素流体力学

別の文書に書いてある。

G　数値積分の誤差評価 — 高橋・森理論

別の文書に書いてある。

H　佐藤の超関数

別の文書に書いてある。

I　自分用メモ: 近傍系, フィルター

位相空間 X とその要素 a があるとき、a の近傍系 (the complete system of neighborhoods, the neighborhood filter) とは、 a の近傍全体の集合である。ここでは $\mathcal{U}(a)$ と書くことにする。

集合族 $\mathcal{B}(a)$ が a の基本近傍系 (a neighborhood basis for a, a filter base of the neighborhood filter) とは、次の二つの条件 (i), (ii) を満たすことと定義する。

(i) $\mathcal{B}(a) \subset \mathcal{U}(a)$.

(ii) $(\forall U \in \mathcal{U}(a))\ (\exists V \in \mathcal{B}(a))\ V \subset U$.

$\mathcal{B}(a)$ が a の基本近傍系であれば、a の近傍系は、$\mathcal{B}(a)$ の要素を含むような集合の全体である:

$$\mathcal{U}(a) = \{U \mid (\exists V \in \mathcal{B}(a))\ V \subset U \subset X\}.$$

距離空間 $(X; d)$ において、

$$\mathcal{B}(a) = \{B(a; 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

で定まる $\mathcal{B}(a)$ は a の基本近傍系である。($B(a;r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$.)

半順序集合 $(X; \leq)$ の部分集合の族 $\mathcal{F}$ がフィルターであるとは、

(a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(b) $(\forall x, y \in \mathcal{F})\ (\exists z \in \mathcal{F})\ z \leq x \wedge z \leq y$.

(c) $(\forall x \in \mathcal{F})\ (\forall y \in X)\ x \leq y \Rightarrow y \in \mathcal{F}$.

フィルターの例として、位相空間 X, $a \in X$ に対して、a の近傍系 $U(a)$ があげられる。実際、(a) $\mathcal{U}(a)$ は順序集合 $(2^X; \subset)$ の部分集合の族であり、$X \in \mathcal{U}(a)$ であるから、$\mathcal{U}(a) \neq \emptyset$. (b) $U, V \in \mathcal{U}(a)$ とするとき、$W := U \cap V$ とすると、$W \in \mathcal{U}(a)$, $W \subset U$, $W \subset V$. (c) $U \in \mathcal{U}(a)$, $V \subset X$, $U \subset V$ ならば $V \in \mathcal{U}(a)$.

参考文献案内

「複素関数」でも紹介したが、杉浦 [12], Ahlfors [13], 高橋 [14] は、1 変数複素関数論の定番のテキストである。(これより高度な本 — Riemann 面とか多変数関数論とか複素多様体とかを詳述してある — もあるが、そうなると日本語で読める本にこだわるよりは、洋書まで探索範囲を広げるのが良いかもしれない。)

田村 [5] は、微分積分の延長として、関数論の初等的範囲から重要な話題をピックアップして作った、とあり、確かに標準的な関数論入門の少し先を初等的に取り扱っている (格好良く出来たりもするところを初等的に押し通すのはとても好感が持てる)。「地味」と捉えられがちであるが (普通の関数論入門で重要視されるような計算問題の解き方を詳しく解説する、という本ではないので、一般受けしないのだろう)、思いの外参考になる。

この講義の話題には、Riemann 面を意識したもの (背景に Riemann 面があるもの) がいくつかあり、いわゆる微積分の延長としての解析学に止まらない、数学的常識が必要とされることが多い。位相空間については、とっつきやすそうな新しいテキストも増えているが、松坂 [8], 河田・三村 [9] をあげておく。

Henrici [2] は、厚手の本 3 冊からなる数値的な応用複素関数論のテキストである。ややクラシックな応用数学の本と言うべきかもしれないが、私には、ある意味では逆に時代を先取りしているように思える。20 世紀の数学では、対象の存在が証明出来れば、それを求めるアルゴリズムを必須とせずに議論を進めるようになった。それは数学の大きな進歩ではあったが、行き過ぎの面があったと思う。具体的に計算できる場合は、計算で求めてしまった方が良い場合があるのは当然である。それなのに計算の価値を不当に低く評価してきたようなところがあ

る。最近は、アルゴリズムの追求が尊重されるようになって来ている。(解析学では、微分方程式の解を近似的にでも計算することに、従来から一定の価値が認められてきたが、最近では代数学 (Gröbner 基底に基づく様々な計算法など) や幾何学の分野でも変化が進んでいるように見受けられる。)

参考文献

[1] 桂田祐史:複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/complex2016.pdf (2014〜).

[2] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons Inc (1977).

[3] 森正武, 杉原正顯：複素関数論, 岩波書店 (2003).

[4] 一松信(ひとつまつしん)：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。

[5] 田村二郎：解析関数, 裳華房 (初版 1962, 新版 1983).

[6] 志賀浩二：複素数 30 講, 朝倉書店 (1989).

[7] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003).

[8] 松坂和夫：集合・位相入門, 岩波書店 (1968).

[9] 河田敬義(かわだゆきよし), 三村雄征(ゆきお)：現代数学概説 II, 岩波書店 (1965), 古いテキストであるが、大事なことが証明付きで程よく網羅されているので、辞書として使うのに好適である。

[10] 鹿野健：リーマン予想, 日本評論社 (1991).

[11] Bak, J. and Newman, D. J.: *Complex Analysis, Second Edition*, Springer (1999).

[12] 杉浦光夫：解析入門 II, 東京大学出版会 (1985).

[13] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).

[14] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された。

索 引