

# 複素関数と流体力学

桂田 祐史

2015年6月17日, 2025年5月13日

COVID19 対応のため、2020, 2021 年度はオンデマンド講義をした。その資料 ([1], [2], [3]) からのフィードバック工事中。どうまとめるのか良く分からない。

## 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>流体力学の方程式</b>	<b>3</b>
2.1	連続の方程式 (質量保存), 非圧縮条件	4
2.2	応力テンソルと圧力	6
2.3	運動方程式 (運動量の保存)	8
2.4	数学的チャレンジ: Euler 方程式、Navier-Stokes 方程式は解けるか?	12
2.5	状態方程式	13
<b>3</b>	<b>非圧縮流体の渦なしの流れ</b>	<b>13</b>
3.1	渦度と渦なしの流れ	13
3.2	完全流体における Lagrange の渦定理	14
3.3	非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (3次元の場合)	14
3.4	非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (2次元の場合)	16
3.5	流線と等ポテンシャル線	18
<b>4</b>	<b>正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れとその可視化</b>	<b>21</b>
4.1	基本的な流れ	21
4.1.1	一様な流れ	21
4.1.2	湧き出し、吸い込み	22
4.1.3	渦糸 (点渦)	23
4.2	Mathematica で可視化してみる (やり方の説明)	23
4.3	基本的な流れの重ね合わせ	26

<b>5</b>	<b>ポテンシャル問題を解いて流れを求める</b>	<b>32</b>
5.1	ポテンシャル問題とは	32
5.2	有限要素法でポテンシャル問題を解く	33
5.2.1	Poisson 方程式の境界値問題とそれに対する弱形式	33
5.2.2	有限要素法, FreeFem++	34
5.2.3	(5.1), (5.2) を解くための FreeFem++ のプログラム	35
<b>A</b>	<b>ベクトル解析駆け足の復習</b>	<b>37</b>
<b>B</b>	<b>流体力学の補足</b>	<b>39</b>
B.1	Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数	39
B.2	Bernoulli の定理	41
<b>C</b>	<b>問の略解</b>	<b>42</b>

この文書に関する TODO リスト: Bernoulli の定理、Cauchy の式と応力テンソルの対称性の証明、循環 (circulation) について補足する。境界条件の話も足すべきか?? Navier-Stokes-Korteweg 方程式なんてのもある。

部分的には、授業資料 (スライドなど) の方が整備が進んでいる面がある。

## 1 はじめに

**流体 (fluid)** とは大まかに言って、気体や液体のように“流れるもの”を理想化したものである。圧縮性と粘性という2つの性質の有無によって大きく分類される。

流体の運動を決定せよ、というのは、古くからある問題であるが、非線形の微分方程式が現れる場合もあり、現在でも完全には解決されていない。この講義では、簡単な状況下では、複素関数論を使って取り扱うことが出来る、ということを示す。解決出来る問題は限定的であるが、流体力学に現れる諸概念の紹介が出来るのは良いことだと考えている。

何か一つだけ覚えるとする、次の1行になるだろう。

**2次元の非圧縮流体のポテンシャル流 (≡渦なしの流れ) = 正則関数**

複素関数論を用いて流体力学の問題を取り扱うことも可能であるし、その逆に複素関数の問題を流体力学のイメージで考えることも出来る。

## 参考書

複素関数と流体力学がオーバーラップするところを学ぶ際の参考書としては、まずは今井 [4] をあげておく (実はあまり読みやすくない)。著者の今井功先生 (1914–2004) は、流体力学の権威で、著書の今井 [5] は流体力学の基本的な文献であるとされている。航空機の飛行に

関する流体力学の研究で著名であり、有名な「物理学の散歩道」<sup>1</sup>を書いたロゲルギストのメンバーでもある。佐藤の超関数の流体力学的解釈を述べた今井 [6] も非常に興味深い著作である。

流体力学のテキストとしては、[5] 以外に、異 [7] をあげておく。話題が豊富であることに加え、基本的な部分の説明は特に良く行き届いている。

なお、流体力学の古典とも言える Lamb [8] (初版 1892 年, 最後は 1932 年?) は、数学的にしっかりしているが、複素関数とのからみについても詳しい (現在翻訳本の入手は難しいが、原著の入手は容易である)。

非圧縮流体の方程式の数学的取り扱いについては、岡本 [9] を見よ。

最近では圧縮性流体の研究も盛んであるが、複素関数との関連性は薄くなるので、参考書も紹介しない (筆者は良く知らないので出来ない)。

現実の液体・気体は多かれ少なかれ圧縮性を持っている。無視できるくらい小さい場合に、非圧縮流体として取り扱う、ということになる。空気一つとっても、流速が小さい場合は、非圧縮流体として取り扱うことが出来るが、流速が大きくなるとそれが不適當になり、圧縮流体として取り扱うべき、ということになる (「100 m/s くらいが目安だ」と言う話を聞いたこともある)。

## 予備知識

複素関数論以外に、ベクトル解析と偏微分方程式を用いる。

ベクトル解析については、簡単な復習を付録 A に用意しておいた。ベクトル解析は、歴史的には電磁気学や流体力学を記述するために発達したもので、現在でもそれらへの応用を意識しつつ学ぶことは有益である。

(それで、現象数理学科では「電磁気とベクトル解析」という科目が用意されている訳であるが、この科目で流体力学を取り上げるのも、同じような趣旨と言える。)

偏微分方程式については、体験的入門というノリで進める。コンピューターで解く方法をいくつか (FreeFem++ 等) 紹介するので、興味のある人は試してみたい。

テンソルという言葉は初耳という人が多いかもしれない。応力テンソルについては、流体力学や弾性力学の本の解説を読むのが一番と思われる<sup>2</sup>。

## 2 流体力学の方程式

連立偏微分方程式の話になるが、「解け」というわけでないので、あまり怖がらないこと。

数学の文献では、天下りに方程式を書くことも少なくないが、現象の理解のためにはそれでは不十分であろう。以下では、なぜそのような方程式になるか、“理屈”を一応説明してある。

---

<sup>1</sup>日本の物理学者の同人会であるロゲルギストが 1959 年から 24 年間、雑誌「科学」(中央公論社)に寄稿したエッセイ集で、岩波書店から「物理学の散歩道」、中央公論社から「新・物理学の散歩道」として単行本化された。

<sup>2</sup>噛んで含めるような感じで書かれているフライシュ [10] はユニークな本であるが、詳しく取り上げている例が、剛体力学の慣性テンソル、電磁場のテンソル、リーマン曲率テンソルであり、流体力学に必要な応力テンソルについては触れられていない (それでも面白い本なので、機会があればめくってみることを勧める)。

物理的にも数学的にも中途半端な説明になっているが、興味を持った人は適当な文献に当たって見て欲しい(今井 [5], Lamb [8], より数学的な解説として、岡本・中村 [11] の §10.2<sup>3</sup>, 岡本 [12], Chorin-Marsden [13], Meyer [14])。

流体の状態は、ふつう次の3つ(2つ? 4つ?)のものを求めて定まる。

- 速度  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$
- 圧力  $p(\mathbf{x}, t)$
- 密度  $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 ... 今回は考えない。

問 1. 水、空気のおおよその密度 (SI 単位系) を求めよ。密度の比はどれくらいか。(結果は、 $10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $1.3 \text{ kg/m}^3$ , 770)

(圧力については、後で問を用意してある。)

## 2.1 連続の方程式 (質量保存), 非圧縮条件

連続の方程式 (continuity equation) と呼ばれる次式がつねに成り立つ。

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

証明 質量保存が成り立つので、任意の領域  $V$  内の流体の質量の変化は、 $V$  の境界  $\partial V$  から出入りする質量に等しい。

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dx = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

(この右辺が理解出来なければ、ベクトル解析の復習が必要である。すぐ後でフォローする。)

左辺に微分と積分の順序交換、右辺に Gauss の発散定理<sup>4</sup>を用いて

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx.$$

これが任意の  $V$  について成り立つことから、(2.1) を得る。■

(念のため: (2.2) の右辺の面積分が、単位時間に  $V$  の境界  $\partial V$  をよぎって  $V$  内に流れ込む流体の質量であることは、ベクトル解析では常識的なことであるが、説明を読みたければ、例えば桂田 [15] の例 3.3.2 を見よ。任意の領域  $V$  での積分が等しいことから、被積分関数が等しいことを導くには、例えば  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(a; \varepsilon)|} \int_{B(a; \varepsilon)} f(x) \, dx = f(a)$  を用いれば良い。これについては、桂田 [16] の例 B.3.1 を見よ。)

<sup>3</sup>個人的にはこれがお勧めなのだが、一番入手しにくいかもしれない(一番新しいのに...)。

<sup>4</sup>細かい仮定は省略する。  $\int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx.$

問 2. (1)  $\text{div}$  の定義を述べよ。(2) (積の微分法)  $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = \text{grad } \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \text{div } \mathbf{v}$  ( $\nabla$  を使って表すと  $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v}$ ) を確かめよ。

(2.1) は次のようにも書ける。

$$(2.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

$$(2.4) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

で定義される Lagrange 微分 (物質微分, material derivative)  $\frac{D}{Dt}$  を用いると、(2.1) は次のようにも書ける。

$$(2.5) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

物質微分について

流体の流れに沿って運動する粒子の、時刻  $t$  での位置を  $\mathbf{x}(t)$  とする。すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数  $f(\mathbf{x}, t)$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t) \dot{x}_j(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t) v_j(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{Df}{Dt}. \end{aligned}$$

密度の Lagrange 微分が 0 であること、すなわち条件

$$(2.6) \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

が成り立つとき、流体は**非圧縮である** (縮まない, incompressible) という。これは

$$(2.7) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

と同値である。(実際、(2.1) ( $\Leftrightarrow$  (2.5)) がつねに成り立つので、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0$ .)

普通は、(2.7) を**非圧縮条件**と呼ぶ。

特に、密度  $\rho$  が定数ならば非圧縮であるが、逆は必ずしも成り立たない。時々、 $\rho$  が定数になることを非圧縮条件と考えている人もいるが、定義は上のようになるそうである。場所ごとに濃度の異なる食塩水の流れを考えると、食塩水は縮まないが、 $\rho$  は定数にはならない。非圧縮かつ (ある瞬間に) 空間的に一様であれば、密度は定数となる (この非圧縮性の説明は、今井 [5] による)。

現実にある液体、気体は程度の差はあれ、圧縮性があるが、しばしば、「流れの速さがマッハ数<sup>5</sup>で 0.3 以上であれば圧縮性の影響を考える必要がある」と言われている。空気の場合は時速 367 km 以上であれば、ということになる。それ以外に、熱現象とも関係していて、流体の温度が著しい高温になったりする場合も圧縮性を考える必要が生じる。

## 2.2 応力テンソルと圧力

この項の内容には、物理学のテキストからの受け売りが多い。詳しい説明が読みたい場合は、例えば巽 [7] を見よ。

“方程式の紹介” のつもりである。

重力のような力は体積に比例するため、**体積力** (body force) と呼ばれるが、流体が接触することによって及びす力などは、接触面の面積に比例するため、**面積力** (surface force) と呼ばれる。面積力の場合は、単位面積当たりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。

流体の応力は、もちろん位置  $\boldsymbol{x}$  と時刻  $t$  に依存するが、それだけでなく面の向きに依存する。面の向きは、その面の外向き単位法線ベクトル  $\boldsymbol{n}$  で表せる。流体の応力は、位置  $\boldsymbol{x}$  と時刻  $t$  と向き  $\boldsymbol{n}$  のみで定まる。これを **Cauchy の応力原理** という。

### Cauchy の応力原理

流体が接触することで及びす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置  $x$ , 時刻  $t$ , 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル  $\boldsymbol{n}$  で指定する) で定まる。

以下しばらく場所と時刻を固定しておく ( $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ,  $t = \tau$ )。流体の応力  $\boldsymbol{p}$  は  $\boldsymbol{n}$  の関数である：  
 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ .

座標平面に平行な平面  $x_i = a_i$  を通して、正の側が負の側に及びす単位面積当たりの力を  $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ ,  $P := (p_{ij})$  とおく。  $P$  を**応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ<sup>6</sup>。定義から

$$\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるが、実は任意の  $\boldsymbol{n}$  に対して

$$(2.8) \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P^\top \boldsymbol{n} \quad (\text{Cauchy の式})$$

<sup>5</sup>マッハ数とは、流速を音速で割った値である。

<sup>6</sup>応力テンソル (stress tensor) を表すために、 $\sigma$  という文字を使うことも多い。 $\sigma$  は  $S$  に対応するギリシャ文字であるから、もっともな選択ではある。

である。

テキストによっては、 $\mathbf{p}(e_i) = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \end{pmatrix}$  (添字の順番が逆!) と定めている。混乱が起こりそ

うだが、実は応力テンソルについては、角運動量の保存則から、一般に

$$(2.9) \quad p_{ij} = p_{ji}$$

が成り立つ ( $P$  は対称テンソルである) ので、あまり気にする必要はない。

授業では、(2.8), (2.9) が成り立つ理由を説明する余裕はない。こういうことが気になる人は (気になる方が健全だと思うが) 物理学を学ぼう。

**問 3.** (流体力学あるいは弾性力学の本で勉強して) (2.8) を示せ。

**問 4.** (流体力学あるいは弾性力学の本で勉強して) 応力テンソルは一般に対称テンソルであることを示せ。

$\mathbf{v}$  を流体の速度場とするとき、

$$(2.10) \quad E := (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定まる  $E$  を <sup>ひず</sup>歪み速度テンソル (rate-of-strain tensor, strain rate tensor) と呼ぶ。

**注意 2.1 (用語・記号について)**  $E$  のことを変形速度テンソル (deformation rate tensor) と呼ぶようである。“deformation rate tensor” という言葉はない、“rate of deformation tensor” が正しい、というお説教を読んだこともある。この辺りの用語の使い方については、(私が門外漢であることもあって) あまり自信がない。

また、歪み速度テンソルを表すために  $D$  という文字を使う (つまり  $D = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$  と定める) 人もいる。 $D$  という文字を速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) に使う (つまり  $D = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$  と定める) 人もいるので、注意が必要である。

というわけで、私の結論: これらの記号を用いるときは、言葉だけで説明するのではなく、必ず式を書くべきである。■

メモ

$\nabla \mathbf{v}$  という記号を使うことがある。 $\mathbf{v}$  の Jacobi 行列の転置行列という意味らしい。

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

この記号を使うと、速度勾配テンソルは  $\nabla \mathbf{v}^T$ , 歪み速度テンソルは  $\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ .

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた(一様、等方、 $E = 0$  のとき  $P = -pI$  等々)。それから

$$(2.11) \quad P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで  $I$  は単位テンソルである。さらに **Newton 流体**の仮定 ( $P$  は  $E$  の 1 次式) をおくと

$$(2.12) \quad P = (-p + \lambda \operatorname{div} v)I + 2\mu E$$

を得る (岡本・中村 [11] の定理 10.11)。ここで  $\lambda, \mu$  は非負定数であり、 $p = p(\mathbf{x}, t)$  はスカラー関数である。

非圧縮な Newton 流体では

$$(2.13) \quad P = -pI + 2\mu E$$

が成り立つ。ここで  $\mu$  は**粘性率**(粘性係数, 粘度, viscosity) と呼ばれる非負定数であり、 $p = p(\mathbf{x}, t)$  は**圧力**(pressure) と呼ばれる。

以下この文書では、(2.13) が成り立つ流体について論じることにする。(  $\mu$  が定数である場合を **Newton 流体**、定数でない場合を**非 Newton 流体**、と呼ぶそうで、我々は以下では Newton 流体だけを考察する、ということでもある。)

もしも  $\mu = 0$  あるいは  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (静止流体) ならば、 $P = -pI$  であるから、応力  $\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}$  は  $-p\mathbf{n}$  に等しい。つまり応力の方向は面に垂直 (内向き)、大きさは面の方向に依らない一定値  $p$  である。

(応力  $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ , 応力テンソル  $P$ , 圧力  $p$ , と文字  $P$  を使って表すものがたくさんあるけれど、混同しないように気をつけよう。)

$\mu = 0$  である流体を**完全流体**(perfect fluid) または**非粘性流体**(inviscid fluid) と呼ぶ。一方、 $\mu > 0$  である流体を**粘性流体**(viscous fluid) と呼ぶ。

**粘性率はどの程度の大きさか** 粘性率は温度に依存する。摂氏  $20^\circ$  で、水は粘性率  $\mu \doteq 0.001005 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。サラダ油の粘性率は、水の  $60 \sim 80$  倍程度とか。また空気は  $\mu \doteq 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。気体の場合、粘性率は圧力にほとんど依存しない (広い範囲で定数と近似して問題が生じない)。

## 2.3 運動方程式 (運動量の保存)

最初に流体を構成する粒子の加速度は  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  ではなく、 $D\mathbf{v} / Dt$  であることを注意しておく。ただしベクトル場  $\mathbf{v}$  に対する物質微分  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  は

$$(2.14) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} := \begin{pmatrix} \frac{Dv_1}{Dt} \\ \frac{Dv_2}{Dt} \\ \frac{Dv_3}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

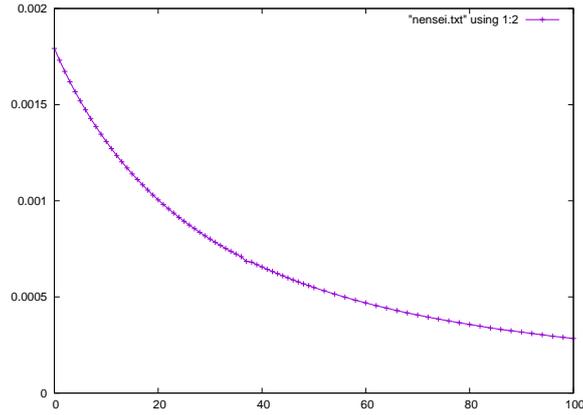


図 1: 水の粘性率の温度依存性 — 縦軸は粘性率 (単位は Pa · s), 横軸は温度 (単位は摂氏)

で定義する。この右辺を  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  と書くことが多い。つまり

$$(2.15) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

であるから、

$$(2.16) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

ということであろう。

**問 5.** 時刻  $t$  で  $\mathbf{x}$  にある 流体粒子の加速度は  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  でなく、 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  であることを説明せよ。

流体の運動方程式は

$$(2.17a) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P.$$

ただし

$$(2.17b) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとの div})$$

である。

**証明** 任意の領域  $V$  において、運動量の保存から

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma.$$

右辺のベクトルの第  $i$  成分に Gauss の発散定理を適用すると

$$\int_{\partial V} (p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3)d\sigma = \int_{rdV} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} dx = \int_V (\operatorname{div} P)_i dx.$$

ゆえに

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_V \operatorname{div} P d\mathbf{x}.$$

この被積分関数を比較する。 ■

**問 6.**  $P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$  ( $\lambda, \mu$  は定数) とするとき

$$(2.18) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (= -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v})$$

であることを示せ。

**余談 2.2 (圧縮性流体の運動方程式)** この文書では圧縮性流体についての議論は行わないが、上の議論から

$$(2.19) \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

が成り立つことが分かる。これが圧縮性流体の運動方程式である。

一様等方弾性体の振動現象のモデル方程式 (弾性波の方程式)

$$(2.20) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

と見比べると面白い。 ■

非圧縮完全流体では  $\operatorname{div} P = -\nabla p$  であるから、運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

すなわち

$$(2.21) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

これが非圧縮完全流体の運動方程式として有名な **Euler 方程式** である。

非圧縮粘性流体では、 $P = -pI + 2\mu E$ . つまり  $\lambda = 0$  とすれば良いので、(2.18) から

$$(2.22) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu (\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

ゆえに運動方程式は

$$(2.23) \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu (\Delta \mathbf{v} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})).$$

非圧縮条件  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  を代入すると (右辺の最後の項が  $\mathbf{0}$  であるので)

$$(2.24) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の運動方程式として有名な **Navier-Stokes 方程式** (Navier-Stokes equation) である。ただし

$$\nu := \frac{\mu}{\rho}$$

とおいた。この  $\nu$  を **動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

**問 7.** (2.21), (2.24) をベクトル表記を用いずに、 $\mathbf{v}$  の成分  $u, v, w$  を用いて表せ。

**問 8.** 静止している池の水圧がどのようになるか、一様な重力場を仮定して、Navier-Stokes 方程式を解いて説明せよ。

**問 9.** 水面から 1 m 下のところの水圧はどれくらいか。1 気圧 (1013 hPa — h は 100 倍を表し、1 Pa は  $1 \text{ m}^2$  あたり 1 N の力がかかるということ) の何倍か。

**問 10.** 静止した水の中では  $p(\mathbf{x}) = -\rho g x_3 + \text{定数}$  であることを仮定して (ただし水面を  $x_3 = 0$  と考えている)、アルキメデスの浮力の原理を示せ。

(結果: 物体  $\Omega$  の体積を  $|\Omega|$  と表すことにすると、物体が水から受ける力 (いわゆる浮力) は、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho |\Omega| g \end{pmatrix} \cdots \text{向きは鉛直上向き、大きさは物体の体積の水にかかる重力に等しい}$$

**余談 2.3 (それでは大気圧は?)** 大気圧は同じように求められるだろうか?

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

は成り立つと考えられるが、大気の場合  $\rho$  は定数ではないであろう。状態方程式

$$\rho = \frac{p}{R_d T} \quad (R_d \text{ は気体定数, } T \text{ は温度})$$

を代入して、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -p \frac{g}{R_d T}.$$

$g$  は定数であると仮定すると (本当はそうではないが、空気が残っているような高さでは、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  として十分良い近似になる)、

$$\log p(z_1) - \log p(z_0) = -\frac{g}{R_d} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{T}.$$

ところが温度  $T$  は (気象条件や  $x, y$  への依存性については目をつむるにしても)  $z$  にも依存する。熱力学的な議論が必要になる。細かいことは無視すると、圧力は高度  $z$  についての指数関数で近似できるが、合致の程度はほどほどである。

(少し話がトンド) 飛行機の高度計は、本当は気圧計だそうである<sup>7</sup>。  $T(z)$  の標準値を定めて、それから関数  $p(z)$  を求めておき、測定した気圧の値から高度  $z$  を推定する (小倉 [17])。

Euler 方程式も、Navier-Stokes 方程式も非線形偏微分方程式である (速度の物質微分  $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  が  $\mathbf{v}$  について非線形であることに注意する)。

$\nu\Delta\mathbf{v}$  を粘性項と呼ぶ。Navier-Stokes 方程式の粘性項を落としたものが Euler 方程式である。

一方、Navier-Stokes 方程式の非線形項  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  を落とした線形方程式

$$(2.25) \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}.$$

を **Stokes 方程式** と呼ぶ。線形方程式であるので、数学的には大分簡単化したことになる。乱暴な近似であるように感じられるかもしれないが、流速が小さい場合には、Stokes 方程式は Navier-Stokes 方程式の実用上十分良い近似になっている、と言われている。

**余談 2.4 (Navier-Stokes 方程式 — 間違えずに覚えられるか)** Navier-Stokes 方程式 (2.24) を初めて学んだとき、こんな (複雑な形をした) 方程式を覚えられるのだろうか、と不安に思ったものである。その方程式を某コミックスの中<sup>8</sup>で見つけてちょっと驚いた。Navier-Stokes 方程式もメジャーの仲間入り? でも残念ながら誤植があった。

$$(2.26) \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{p}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (\text{間違い探し}).$$

( $\mathbf{F}$  は外力項であり、これは誤植ではない。また、ラプラシアン  $\Delta$  を  $\nabla^2$  と書くのも、よくある流儀であって、誤植ではない。) (2.26) の誤植を正せ、という問題を試験に出そうか考えてみたことがあるけれど、さすがに悪趣味かと思ってやめた。練習問題くらいが良いだろうか。

問 11. (2.26) の誤植を正せ (解答 p. 43)。

## 2.4 数学的チャレンジ: Euler 方程式、Navier-Stokes 方程式は解けるか?

一般に、未知関数の個数と方程式の個数が一致することが方程式が解けるための必要十分条件というわけではないが (例外はいくつもあげられる)、以下のように考えると分かりやすいと思われる。

ベクトルを成分ごとに分けて考えると、連続の方程式は1つの方程式で、運動方程式は3つの方程式である。速度と圧力で4つの未知関数であるから、密度が既知であるとすれば、連続の方程式と運動方程式を連立すると、未知関数の個数と方程式の個数が4でつりあって、速度と圧力が求まる可能性があると考えられる。

<sup>7</sup>GPS のある現在もそうであるかは疑問である。もう違っているのかしら?

<sup>8</sup>蛇蔵, 「決してマネしないでください。3」, 講談社 (2016) の p. 142.

例えば密度が定数の場合、連続の方程式は非圧縮条件となり、これと Euler の方程式、または Navier-Stokes 方程式、さらに適当な境界条件と初期条件を連立させた**初期値境界値問題の解の存在と一意性**を調べよ、という数学的な問題が考えられる。

これは古典的な問題であるが、非線形偏微分方程式であるために難しく、3次元領域における非定常 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題は、現在も完全な解決には至っていない。これについては、岡本 [9] を見よ。

## 2.5 状態方程式

(ここは授業ではごく簡単に。最初の段落だけ？もしかしたらカットする。)

$\rho$  が未知関数のときは、連続の方程式と運動方程式だけでは、方程式が不足していて解けない。そこで、以下に説明する状態方程式を補うことが多い。

$p$  が  $\rho$  のみの関数である、という**バロトロピー流体**の仮定

$$p = f(\rho)$$

をおくことで解ける場合が多い。具体的には、例えば断熱変化を仮定すると、 $\exists \gamma > 1$  s.t.

$$\rho \propto p^{1/\gamma}.$$

等温変化を仮定すると、

$$\rho \propto p.$$

より一般に

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla w$$

を満たす  $w$  が存在するとき、**isentropic** であるといい、 $w$  を**エンタルピー** (enthalpy) と呼ぶ。バロトロピー流体は isentropic である。

## 3 非圧縮流体の渦なしの流れ

(以下の話では、粘性はあっても良い。言い換えると完全流体でも、粘性流体でも、以下の話は通用する。以下の議論を見ると、Laplace 方程式や Poisson 方程式の重要性が感じられると思われる。これについては別の解説を用意する。)

### 3.1 渦度と渦なしの流れ

$\boldsymbol{v}$  を流体の速度場とするとき、

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \boldsymbol{v} \quad (\text{これは } \nabla \times \boldsymbol{v} \text{ とも書ける})$$

うずどを**渦度** (vorticity) と呼ぶ。これは流体粒子の自転の角速度の2倍に等しい(そうである)。

$\omega = 0$  であるとき、流体は渦なしまたは非回転 (irrotational), 層状 (lamellar) という。流体が渦なしであれば、局所的に  $\boldsymbol{v}$  のポテンシャル  $\phi$  が存在する:

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi.$$

(この  $\nabla\phi$  は grad とも書ける。)

### 3.2 完全流体における Lagrange の渦定理

(ここはしばらく工事中)

今井 [5] の第 2 章「完全流体」は内容豊富である。そこからいくつかピックアップする必要があると感じている。

「粘性のないバロトロピー流体が保存力のもとに運動するとき、渦は発生することも消滅することも無い。」という Lagrange の渦定理が成り立つ。

実在の流体は必ず粘性を持つが、Reynolds 数が大きい場合は完全流体という近似 (“理想化”) が許される。

物体表面の薄い境界層では、粘性の効果が現れ渦が発生するが、それ以外の場所では渦の発生は見られない。また境界層から渦がはがれて、渦が “主流” の中に押し出されて行くことがあるが、その場合その渦はなかなか消えない。

### 3.3 非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (3次元の場合)

流体の速度場  $\boldsymbol{v}$  に対して、

$$\nabla\phi = \boldsymbol{v}, \quad \text{i.e.} \quad u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

を満たす  $\phi$  (いわゆる  $\boldsymbol{v}$  のポテンシャル) が存在するとき、 $\phi$  を流体の速度ポテンシャルと呼び、その流れはポテンシャル流であるという。

問 12. (ベクトル解析の復習がてら)

- (1) ポテンシャル流は渦なしであることを示せ。
- (2) 単連結領域内の渦なしの流れはポテンシャル流であることを示せ。

以下、流体が非圧縮で渦なしであり、領域全体で  $\boldsymbol{v}$  のポテンシャル  $\phi$  が存在すると仮定する。一般に  $\text{div } \nabla = \text{div grad} = \Delta$  であるから、

$$\Delta\phi = \text{div grad } \phi = \text{div } \boldsymbol{v}.$$

非圧縮条件  $\text{div } \boldsymbol{v} = 0$  を用いると

$$(3.1) \quad \Delta\phi = 0.$$

すなわち、非圧縮流体のポテンシャル流において、速度ポテンシャルは調和関数である。まとめると

渦なしならば (局所的には) 速度ポテンシャルが存在し、  
さらに非圧縮ならば速度ポテンシャルは調和関数である。

例えば、流体の占める領域  $\Omega$  の境界で  $\mathbf{v}$  が分かっているならば、 $(\partial\phi/\partial\mathbf{n} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}$  より)

$$(3.2) \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

であるから、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題 (3.1), (5.5) が得られ、それを解けば  $\phi$  が求まる ( $\mathbf{v}$  も求まる)。

このような Laplace 方程式の境界値問題はポテンシャル問題と呼ばれる。ポテンシャル問題は非常に重要である。流体力学に限ったものではないので、別文書にまとめることにする。

ここでは、連続の方程式から導かれる非圧縮条件だけから (運動方程式を用いずに)  $\mathbf{v}$  が求まった。それが出来た理由は、ポテンシャルが存在する場合は、非圧縮条件は1つの未知関数  $\phi$  に関する1つの方程式 (3.1) に帰着されるから、と言えるであろう。

上のようにして、速度が求まったとして、残る圧力は運動方程式から求められると期待される。それについて、一つの定理を紹介しよう。

完全渦なし流体のポテンシャル流においては、(さらに適当な仮定を追加において) 「一般化された Bernoulli の定理」が成り立つ。ここでは簡単のため、 $\rho$  が定数 (つまり一様で非圧縮) と仮定しよう。 $\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla p$  であるから、Euler 方程式に代入して、

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right).$$

ベクトル解析の公式

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

より

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}.$$

$\mathbf{v} = \nabla\phi$  と、 $\text{rot } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  を代入すると

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p}{\rho}\right) = \mathbf{0}.$$

これから  $t$  のみの関数  $g = g(t)$  が存在して

$$(3.3) \quad p = -\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g(t)\right].$$

これを一般化された Bernoulli の定理と呼ぶ (以上の議論は完全渦なしのバロトロピー流体に拡張出来る)。

大雑把に言って、 $\phi$  が分かっているならば、 $p$  も求まる、ということになる (細かい注意: 方程式の中で  $p$  は  $\nabla p$  の形でしか現れないので、もともと  $p$  は一意的には定まらない)。

### 3.4 非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (2次元の場合)

流体の流れが2次元的であるとは、 $\mathbf{v}(x, t) = (u, v, w)$  が次の条件を満たすことを言う。

(a)  $z$  成分である  $w$  は 0.

(b)  $z$  によらない。

すなわち

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & v & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & w & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x - u_y \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \omega := v_x - u_y.$$

以下では、2次元の速度場  $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$  について考えることにして、

$$(3.4) \quad \text{rot } \mathbf{v} := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u \\ \frac{\partial}{\partial y} & v \end{vmatrix} = v_x - u_y$$

と定める (割と良くやる定義)。

三次元の場合と同様に、

- $\mathbf{v}$  がポテンシャルを持てば ( $\mathbf{v} = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y)$  を満たす関数  $\phi$  が存在すれば)、 $\omega = 0$ .
- $\omega = 0$  であれば、 $\mathbf{v}$  は局所的にはポテンシャルを持つ。
- $\omega = 0$  であり、考えている領域  $\Omega$  が単連結であれば、 $\mathbf{v}$  は  $\Omega$  全体でポテンシャルを持つ。

$\phi$  のことを流体の速度ポテンシャルと呼ぶのは3次元と同様である。

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = u_x + v_y = \text{div } \mathbf{v}.$$

ゆえに流体が非圧縮であれば  $\Delta\phi = 0$ .

$\omega = 0$  であることを渦なしの定義とする本が多いが、実際には領域全体でポテンシャルが存在することを仮定しているのので、ポテンシャルが存在することと渦なしの定義と考えるのが良いかもしれない。あるいはポテンシャルが多価関数になることを許して扱うことになる (そうしている場合もある)。

ところで

$$\begin{aligned} \text{非圧縮} &\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x + v_y = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x = (-v)_y \\ &\Leftrightarrow \text{局所的に } \exists \psi \text{ s.t. } \psi_x = -v, \quad \psi_y = u. \end{aligned}$$

問 13. 上のことを確かめよ。

問 14. 流れ関数が存在し、境界条件  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  が成り立つとき、流れ関数は境界をなす各閉曲線の上で定数であることを示せ。

一般に

$$(3.5) \quad \psi_x = -v, \quad \psi_y = u$$

を満たす  $\psi$  を  $\mathbf{v} = (u, v)$  の**流れ関数** (stream function) と呼ぶ<sup>9</sup>。このとき、流れ関数は次の Poisson 方程式を満たす:

$$-\Delta\psi = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = -(-v_x + u_y) = \omega.$$

ゆえに渦なしの非圧縮流ならば、流れ関数は調和関数である:

$$\Delta\psi = 0.$$

さらに、このとき

$$(3.6) \quad \phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x.$$

が成り立つ。

これは

$$(3.7) \quad f(z) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

についての Cauchy-Riemann 方程式である。ゆえに  $f$  は正則関数である。

$f$  を  $\mathbf{v}$  の**複素速度ポテンシャル**という。

$f = \phi + i\psi$  であるとき、

$$f' = \phi_x + i\psi_x = u - iv$$

であるから、

$$u = \operatorname{Re} f', \quad v = -\operatorname{Im} f'.$$

$f'$  の極形式を  $f' = qe^{-i\theta}$  とすると、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} q \cos \theta \\ q \sin \theta \end{pmatrix}$ 。ゆえに  $q$  が速さ、 $\theta$  が速度の方向となる。

このことを背景に、 $f'$  のことを**複素速度**と呼ぶ(共役複素速度と呼ぶ人もいるらしく、その気持ちわかるけれど、複素速度という方が普通である)。

まとめると、2次元の流れについて

---

<sup>9</sup>一般に、時刻  $t$  における流れの流線 (stream line) とは、流れの領域の中の曲線で、その各点における曲線の接線ベクトルと、その点における流れの速度ベクトルの向きが一致するものをいう。曲線を  $s \mapsto \mathbf{x}(s)$  とすると、 $\mathbf{x}'(s) \parallel \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), t)$  を満たすことが流線であるための条件である。

- (1) 渦なしならば (局所的には) 速度ポテンシャルが存在する。  
(逆に速度ポテンシャルが存在するならば渦なしである。)
- (2) 非圧縮ならば (局所的には) 流れ関数が存在する。  
(逆に流れ関数が存在するならば非圧縮である。)
- (3) 非圧縮かつ渦なしならば (局所的には) 速度ポテンシャル  $\phi$ , 流れ関数  $\psi$  が存在して、ともに調和関数である。 $\psi$  は  $\phi$  の共役調和関数であり、 $f := \phi + i\psi$  は複素速度ポテンシャルと呼ばれる正則関数となる。
- (4)  $\mathbf{v} = (u, v)$  の複素速度ポテンシャル  $f$  が存在するとき、 $f' = u - iv$ .

**注意 3.1**  $\Omega$  が単連結でなくても、 $\Omega$  全体で一価関数の流れ関数が存在する場合もある。実際、一価関数となるためには、 $\Omega$  内の任意の閉曲線  $C$  に対して、

$$\int_C u \, dy - v \, dx = \int_C \psi_x \, dx + \psi_y \, dy = 0$$

が成り立つことが必要十分である。(穴があると、その周りを一周積分すると 0 にならないかもしれないが、いつも  $\neq 0$  というわけではない。) ■

**問 15.** 流れ関数が存在するとき、Euler 方程式は次のように書ける ( $p$  が消去できることに注目)。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - J(\psi, \Delta \psi) = 0.$$

ただし

$$J(f, g) := f_x g_y - f_y g_x.$$

(流れ関数が存在するならば非圧縮なので、この方程式は、Euler 方程式と非圧縮方程式を連立させた方程式と同値であることになる。)

### 3.5 流線と等ポテンシャル線

速度場や圧力が時刻によらない場合を定常解、定常流と呼ぶ (流体が止まっているのではない)。定常流を可視化するための最も適当な方法は流線を描くことである。

**定義 3.2** 時刻  $t$  における流れの流線 (streamline) とは、流れの領域の中の曲線で、その各点における接線ベクトルと、その点における流れの速度ベクトルの方向が一致するものをいう。式で表すと、曲線  $s \mapsto \mathbf{x}(s)$  で、

$$\mathbf{x}'(s) \parallel \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), t)$$

を満たすものが流線である。

- 流線は時刻ごとに異なる。

- 流線は粒子の軌道とは異なる概念であるが、定常流の場合は流線は粒子の軌道と一致する。
- 他に流脈線というものもあるが省略する。(流れの実験で良く可視化されるが、これは一般には流線とも、粒子の軌道とも一致しない。)

2次元の場合、流れ関数の任意の等高線は、流線である。

**例 3.3 (円盤領域内のポテンシャル流の有限要素法による計算)**  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2)$  のとき、Laplace 方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \quad ((x, y) \in \Omega), \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \quad ((x, y) \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

の解として、速度ポテンシャル  $\phi$  が求まる。その等高線 (等ポテンシャル線) を描く。同様に流れ流線を求めて、流線を描く。速度場は  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  として求まる。次のプログラム potential2.edp

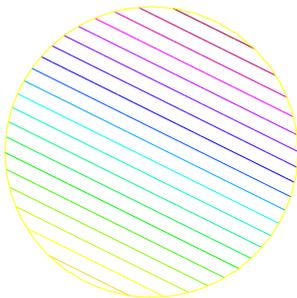


図 2: 等ポテンシャル線

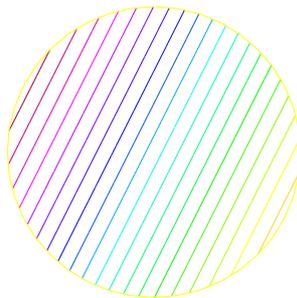


図 3: 流線

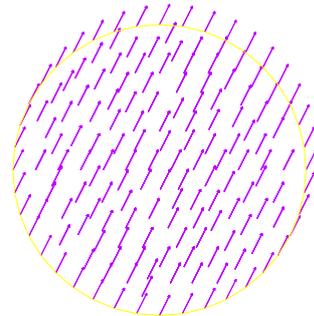


図 4: ベクトル場

を用意して、

FreeFem++ による数値計算&結果の描画

```
$ FreeFem++ potential2.edp
```

(1つ図を描くごとに止まるので、`Enter` キーを押して、次に進む。最後に `esc` キーを押して終了する。)

potential2.edp

```
// potential2d.edp
// http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d.edp
// 2次元非圧縮ポテンシャル流
// 速度ポテンシャル、流れ関数、速度を求め
// 等ポテンシャル線、流線、速度場を描く

border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");

fespace Vh(Th,P1);
Vh u, v, phi, psi;
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で、V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);

// 流れ関数ψを求め、その等高線（流線）を描く（ちょっと安直なやり方）
func Vn2=y-2*x;
solve Laplace2(psi,v) =
  int2d(Th)(dx(psi)*dx(v)+dy(psi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma)(Vn2*v);
plot(psi,ps="streamline.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線と流線を同時に描く
// plot(phi,psi,ps="lines.eps", wait=1);

// ベクトル場 (u,v)=∇φ を描く（ちょっと雑なやり方）
u=dx(phi);
v=dy(phi);
plot([u,v],ps="vectorfield.eps");
```

流体内にある仮想的な曲線（障害物にはならないという意味）の微小部分  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$  を通過する流量（単位時間あたりの体積）は、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$  であり、

$$\mathbf{n} ds = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = -v dx + u dy = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi.$$

従って曲線  $C$  全体を、左から右に通過する流量は、 $C$  の始点を  $P_0$ 、終点を  $P_1$  として

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C d\psi = \psi(P_1) - \psi(P_0).$$

ゆえに、2つの流線ではさまれた領域を流れる流体の流量は、流線上の流れ関数の値の差である。

単純閉曲線  $C$  で囲まれる範囲内に連続の方程式が成り立たない領域あるいは点が存在する場合、湧き出しがあるいは吸い込みがあることになる。このとき  $C$  から外に湧き出る流量は、いわゆる流束積分

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

に等しい。

領域  $D$  の境界  $\partial D$  に対して、

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx$$

非圧縮流体であればこれは 0 である。

流体の占める領域内の任意の閉曲線  $C$  に対して、

$$\Gamma := \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

を閉曲線  $C$  に沿う循環と呼ぶ。

## 4 正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れとその可視化

### 4.1 基本的な流れ

#### 4.1.1 一様な流れ

$c \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = cz$  の場合、 $c = Ue^{-i\alpha}$  ( $U > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) とする。複素速度は

$$u - iv = f' = Ue^{-i\alpha}.$$

すなわち

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \cos \alpha \\ U \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\begin{cases} \phi(x, y) = \operatorname{Re}((U \cos \alpha - i \sin \alpha)(x + iy)) = U(x \cos \alpha + y \sin \alpha), \\ \psi(x, y) = \operatorname{Im}((U \cos \alpha - i \sin \alpha)(x + iy)) = U(-x \sin \alpha + y \cos \alpha). \end{cases}$$

等ポテンシャル線も、流線も平行直線群で、それらは互いに直交する。

**余談 4.1**  $c = p - iq$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) と置いた方が簡単ではないか？このとき

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

$$f(z) = cz = (p - iq)(x + iy) = px + qy + i(py - qx),$$

$$\phi(x, y) = px + qy, \quad \psi(x, y) = py - qx. \blacksquare$$

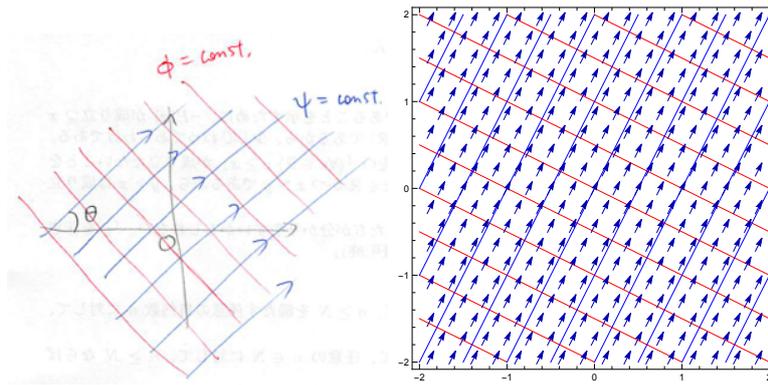


図 5: 一様な流れ

#### 4.1.2 湧き出し、吸い込み

$m \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = m \log z$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) の場合 (多価関数!). (多価関数は気持ち悪いかもしれないが、しばらく我慢。 $\sqrt{z}$  などと違って微分すると一価関数になるので、案外面倒なことにはならない。)

$z = re^{i\theta} = x + iy$  とすると、

$$u(x, y) - iv(x, y) = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{r} (\cos \theta - i \sin \theta).$$

すなわち

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r} \cos \theta \\ \frac{m}{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

(方向は  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  と同じ、 $m > 0$  ならば向きも同じ、 $m < 0$  ならば反対向き、大きさは原点から遠いほど小さい。)

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\begin{cases} \phi = m \log r. \\ \psi = m\theta. \end{cases}$$

( $\phi$  は一価関数、 $\psi$  は多価関数である。)

原点の周りを一周する任意の閉曲線  $C$  を取ると、 $C$  から外に湧き出る流量 (流束) は

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_C d\psi = \text{Im} \int_C df = \text{Im} \int_C f'(z) dz = \text{Im} \int_C \frac{m}{z} dz = 2\pi m \quad (\text{怪しい雰囲気})$$

と一定値である。

(計算の確認: 既に見たように、 $\mathbf{n} \, ds = \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix}$  であり、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = -v \, dx + u \, dy = \psi_x \, dx + \psi_y \, dy = d\psi$  である。また、 $df = f'(z) dz = (\phi_x + i\psi_x)(dx + idy) = \phi_x \, dx - \psi_x \, dy + i(\psi_x \, dx + \phi_x \, dy) = (\phi_x \, dx + \phi_y \, dy) + i(\psi_x \, dx + \psi_y \, dy) = d\phi + id\psi$ .)

この流れは、 $m > 0$  ならば原点に置いた**湧き出し** (source)、 $m < 0$  ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

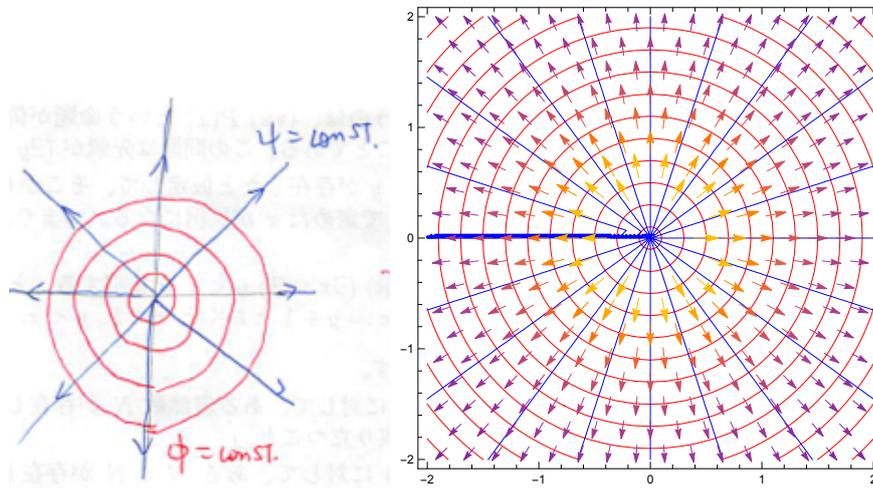


図 6: 湧き出し

### 4.1.3 渦糸 (点渦)

(上の  $f$  の  $m$  を純虚数に変えてみる。)

$\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = i\kappa \log z$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) の場合。  $z = re^{i\theta} = x + iy$  とすると、

$$u(x, y) - iv(x, y) = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{\kappa}{r} i (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{\kappa}{r} (\sin \theta + i \cos \theta).$$

すなわち

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{r} \sin \theta \\ -\frac{\kappa}{r} \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{-\pi}{2} & -\sin \frac{-\pi}{2} \\ \sin \frac{-\pi}{2} & \cos \frac{-\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

(方向は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を  $-\pi/2$  回転した方向。)

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\begin{cases} \phi = -\kappa\theta \\ \psi = \kappa \log r. \end{cases}$$

流線は原点を中心とする円で、等ポテンシャル線は原点を端点とする半直線である。

この流れは、原点に置かれた渦糸 (vortex filament) または点渦 (point vortex) と呼ばれる。渦度は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  全体で 0 であることに注意しよう。

## 4.2 Mathematica で可視化してみる (やり方の説明)

(これは少し古い。アップデート待って下さい。)

複素数の計算、二変数関数の等高線と 2 次元ベクトル場の描画が出来れば良い。

虚数単位は `I`, 実部 `Re[]`, 虚部 `Im[]`, 共役複素数 `Conjugate[]`, 絶対値 `Abs[]`, 偏角 (の主値) `Arg[]`, それと `ComplexExpand[]` などが用意されている。

2 変数関数の等高線には `ContourPlot[]`, ベクトル場の描画には `VectorPlot[]` が用意されている。これらの使い方はオンライン・ヘルプを見よ。

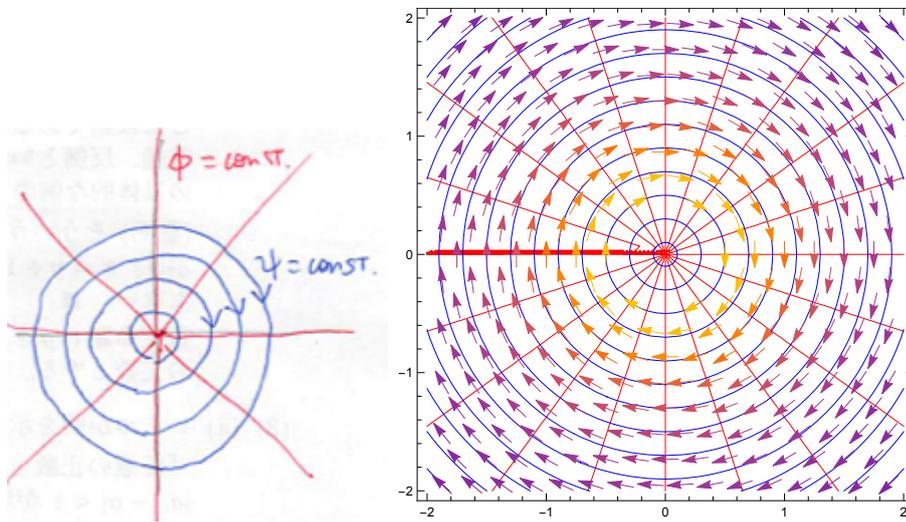


図 7: 渦糸

```
uniform_flow.nb
(* uniform_flow.nb *)

c=1-2I
f[z_]:=c z
phi[x_,y_]:=ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]
psi[x_,y_]:=ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]

phi[x,y]
psi[x,y]

g1=ContourPlot[phi[x,y]==Table[c,{c,-5,5,1.0}],{x,-2,2},{y,-2,2},
  ContourStyle->Directive[Red,Thin]]
g2=ContourPlot[psi[x,y]==Table[c,{c,-5,5,1.0}],{x,-2,2},{y,-2,2},
  ContourStyle->Directive[Blue,Thin]]

vv[x_,y_]:={Re[f'[x+I y]],-Im[f'[x+I y]]}
g3 = VectorPlot[vv[x,y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]

gall=Show[g1,g2,g3]

Export["uniform_flow.png",gall]
```

ComplexExpand[] は事前に Evaluate させる効果も考えて採用したが、いつもこれを使うのが良いかは良く分からない。

一様流は素直なので簡単に描画できるが、そうでないものは色々調整が必要そうだ。

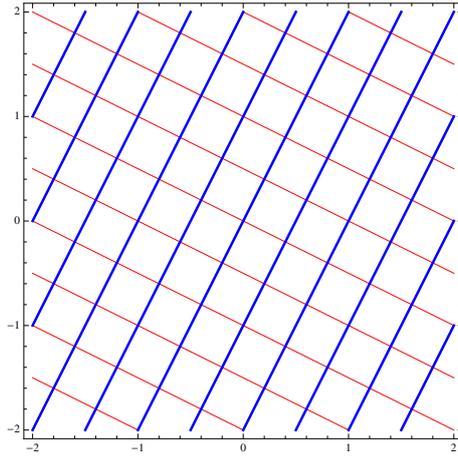


図 8: 一様流の等ポテンシャル線と流線 (もちろん直交する)

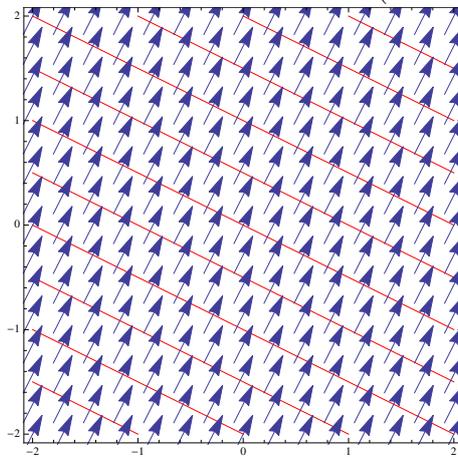


図 9: 一様流の等ポテンシャル線、流線と速度ベクトル

```
source.nb
```

```
(* source.nb --- 湧き出しを見る *)
m=1;
f[z_]:=m Log[z]
ComplexExpand[f[x+I y]]
phi[x_,y_]:=ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]
psi[x_,y_]:=ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]
phi[x,y]
psi[x,y]

(* 等高線のレベルの決め方に注目 *)
g1=ContourPlot[phi[x,y]==Table[Log[r],{r,0.1,3.0,0.2}],{x,-2,2},{y,-2,2},
  ContourStyle->Directive[Red,Thick]]
g2=ContourPlot[psi[x,y]==Table[c,{c,-Pi,Pi,Pi/10}],
  {x,-2,2},{y,-2,2},ContourStyle->Directive[Blue,Thin]]

vv[x_, y_] := {Re[f'[x + I y]], -Im[f'[x + I y]]}

(* 次はうまく行かない *)
g3 = VectorPlot[vv[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]

(* 改良版 (特異点のある原点近傍はカット) *)
g3 = VectorPlot[vv[x, y]Boole[x^2+y^2>0.2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]

gall=Show[g1,g2,g3]

Export["source.png",gall]
```

### 4.3 基本的な流れの重ね合わせ

§§4.1 で紹介した基本的な流れを重ね合わせた流れを調べてみよう。おおむね今井 [4] に従った説明をするが、修正が必要などところがあるようだ。

2つの2次元渦なし非圧縮流があるとき、速度場をそれぞれ  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , また複素速度ポテンシャルを  $f_1, f_2$  とする。このとき  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  を速度場とする流れは、やはり2次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは  $f_1 + f_2$  である。

実際、 $\text{rot } \mathbf{v}_1 = \text{rot } \mathbf{v}_2 = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{v}_1 = \text{div } \mathbf{v}_2 = 0$ ,  $f_1' = u_1 - iv_1$ ,  $f_2' = u_2 - iv_2$  であれば、

$$\begin{aligned}\text{rot}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= 0, \\ \text{div}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= 0, \\ (f_1 + f_2)' &= (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2).\end{aligned}$$

**例 4.2 (一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ)**  $U > 0, m > 0$  とする。複素速度ポテンシャルが  $f_1(z) = Uz$  の一様流と、複素速度ポテンシャルが  $f_2(z) = m \log z$  の湧き出しの重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = Uz + m \log z = Ur \cos \theta + m \log r + i(Ur \sin \theta + m\theta).$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta.$$

$\theta = 0$  とすると  $\psi = 0$ , また  $\theta = \pi$  とすると  $\psi = m\pi$  であるから、これらは  $\psi$  の等高線である。ゆえに実軸 (から原点を除いたもの) は流線である。

また

$$\begin{aligned} \psi = m\pi &\Leftrightarrow Ur \sin \theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta} \\ (4.1) \quad &\Leftrightarrow r = \frac{m}{U} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

ただし  $\varphi := \pi - \theta$ . この (4.1) は、 $0 < \theta < 2\pi$  の範囲で考えるのが良い。そのとき  $-\pi < \varphi < \pi$  が対応する。これ右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である<sup>10</sup>。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響は受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。■

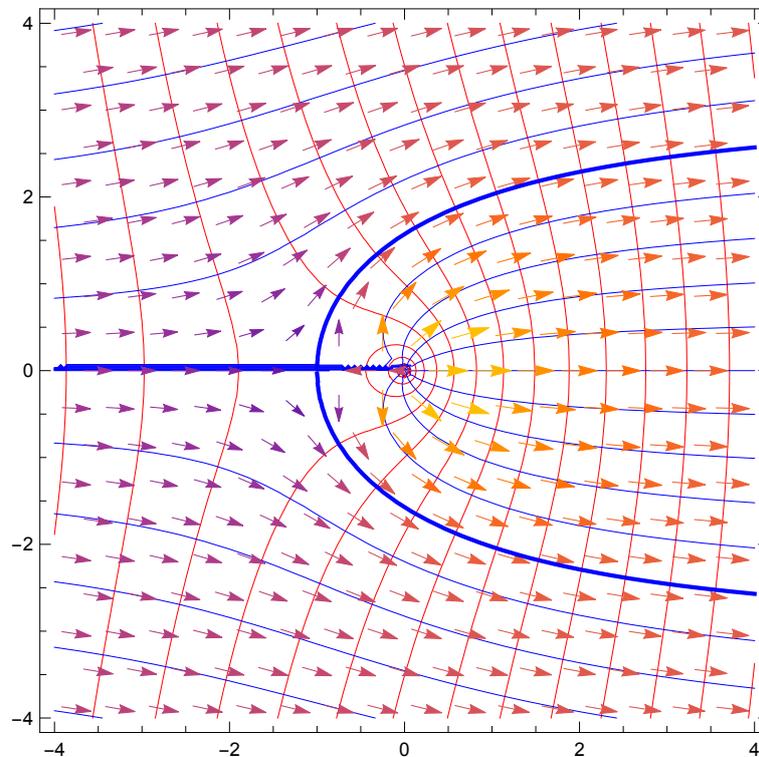


図 10: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は  $\psi = \pm m\pi$ )

**例 4.3 (同じ強さの湧き出し・吸い込みの対)** 等しい強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせを考えよう。 $z = a$  に置いた強さ  $m$  の湧き出し、 $z = -a$  に置いた強さ  $-m$  の吸い込みを重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

<sup>10</sup>昨年度まで、おかしなことを書いてしまっていた。 $-\pi < \theta < \pi$  と考えていたせいであるが、勘違いであった。

(これは実は  $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$  で一価正則な関数である。)

分子、分母の  $z$  をそれぞれ

$$z = a + r_1 e^{i\theta_1}, \quad z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$$

で置き換えると、

$$f(z) = m(\log r_1 + i\theta_1) - m(\log r_2 + i\theta_2) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im(\theta_1 - \theta_2).$$

等ポテンシャル線の方程式は  $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$  であり、これはアポロニウスの円を表す。

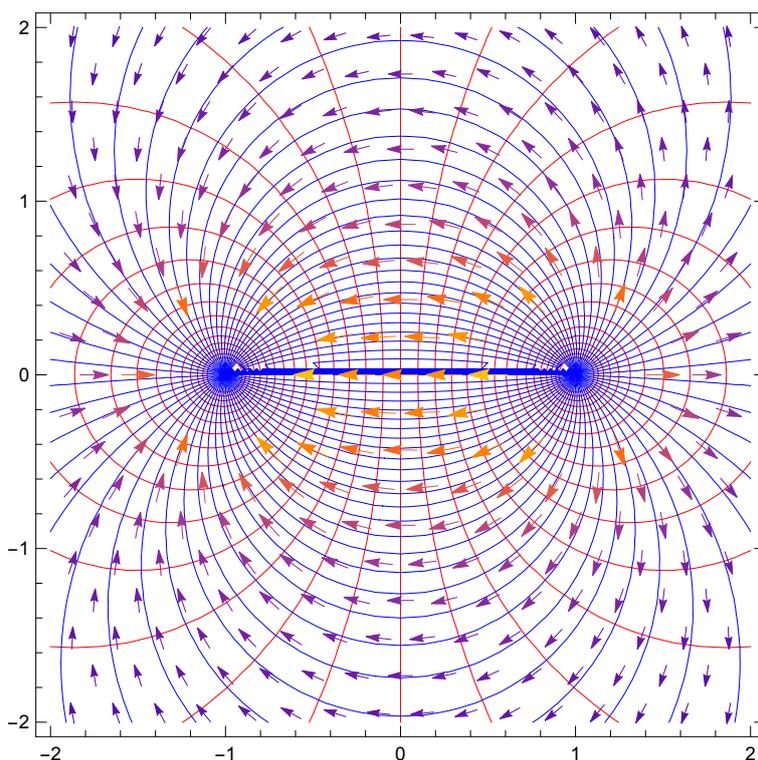


図 11: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

一方、流線の方程式は  $\Theta := \theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$ .  $\Theta$  は  $a, -a$  から点  $z$  を見込む角であるから、流線は、2点  $\pm a$  を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。■

**例 4.4 (同じ強さ、反対向きの渦の対)** 等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦の重ね合わせを考えよう。  $z = a, -a$  に置いた点渦の複素速度ポテンシャルをそれぞれ

$$f_1(z) = i\kappa \log(z - a), \quad f_2(z) = -i\kappa \log(z + a)$$

とする。これら流れの重ね合わせの複素速度ポテンシャルは、

$$f(z) := f_1(z) + f_2(z) = i\kappa \log \frac{z - a}{z + a}.$$

等ポテンシャル線は

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{定数},$$

流線は

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$$

である。■

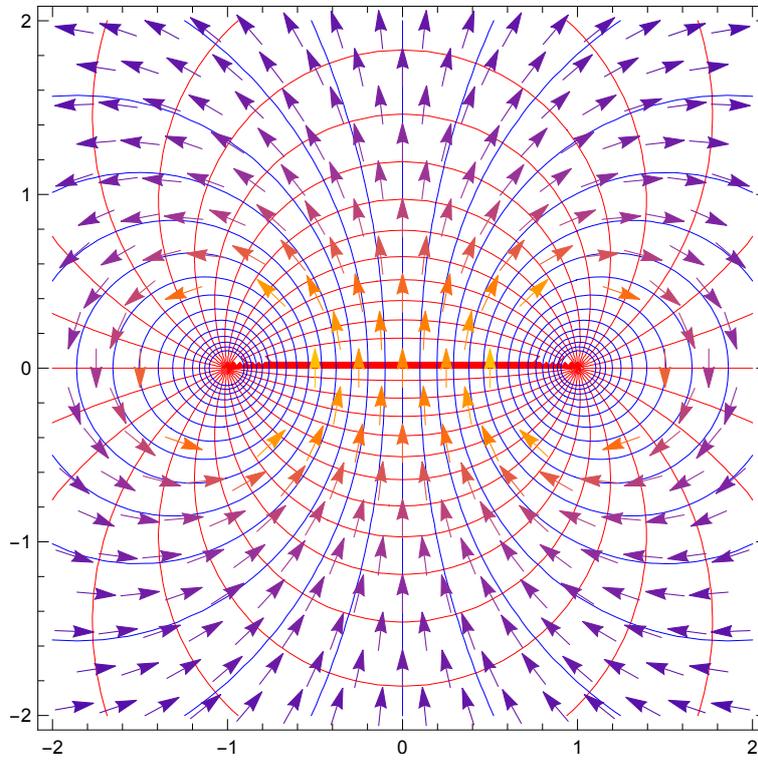


図 12: 同じ大きさ、反対向きの2つの渦 (渦対) の重ね合わせ

**例 4.5 (ランキンの卵形 (Rankine body))**  $U > 0, m > 0, a > 0$  とする。一様流  $f_1(z) = Uz$ , 強さ  $m$  の  $-a$  に置いた湧き出し  $f_2(z) = m \operatorname{Log}(z+a)$ , 強さ  $-m$  の  $a$  に置いた吸い込み  $f_3(z) = -m \operatorname{Log}(z-a)$  を重ね合わせた流れを調べてみよう。

$$f(z) := Uz + m \log(z+a) - m \log(z-a) = Uz + m \log \frac{z+a}{z-a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

実軸 ( $y = 0$ ) では、 $\psi = 0$  であるから、実軸は流線である。

また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U} \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine body) と呼ぶ<sup>11</sup>。■

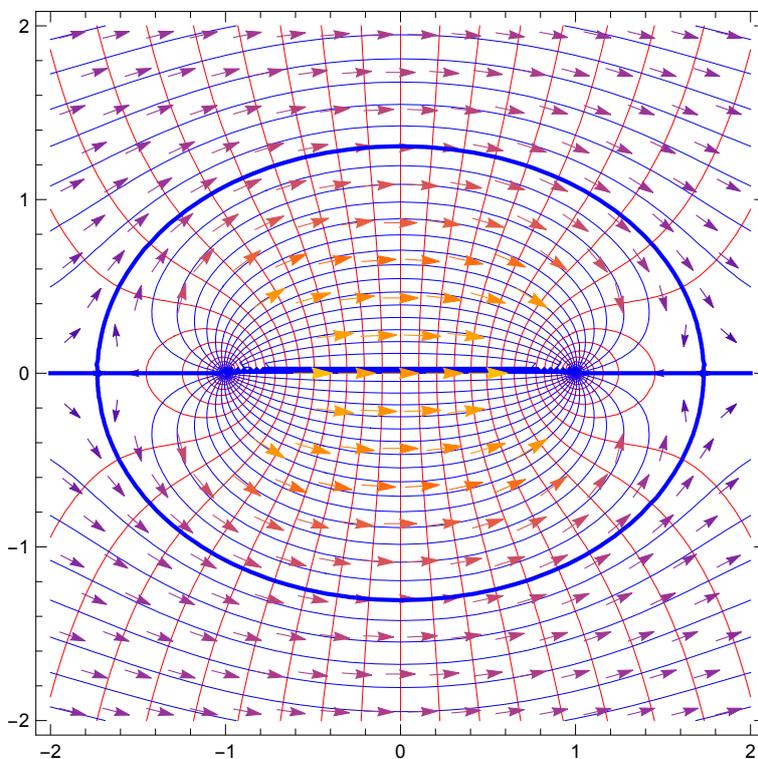


図 13: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

**例 4.6 (2重湧き出し (doublet))** 例 4.3 の流れの極限を考える。正定数  $\mu$  を取り、 $2am = \mu$  という関係式を保ったままで、 $a \rightarrow 0$  とする。

$$f(z) = -\frac{2ma}{z} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{z} \right)^2 + \dots \right) \rightarrow -\frac{\mu}{z} \quad (a \rightarrow 0).$$

<sup>11</sup>発見者の William John Macquorn Rankine (1820–1872) にちなむ。

(というよりも、 $m = \frac{\mu}{2a}$  を代入して、 $f(z) = m \log(z-a) - m \log(z+a) = -\mu \frac{\log(z+a) - \log(z-a)}{2a} \rightarrow -\mu \frac{d}{dz} \log z = -\frac{\mu}{z}$  とするのが簡単だと思う。) この流れを **二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。 ■

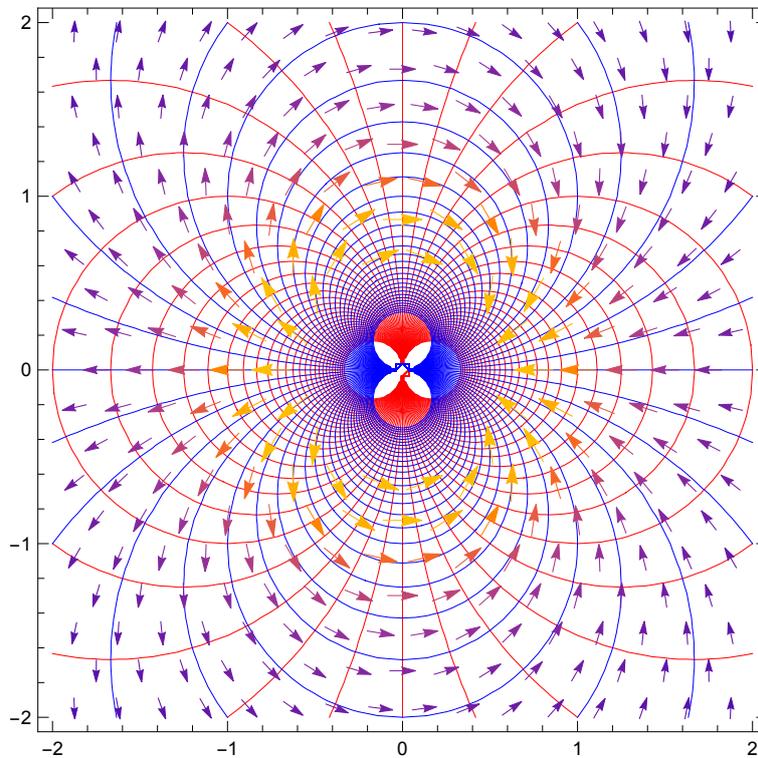


図 14: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

(Mathematica で Manipulate を使って、 $a \rightarrow 0$  でどうなるかを見てみよう。)

**例 4.7 (円柱を過ぎる一様流)** ランキンの卵形で  $2am = \mu$  (正定数) として  $a \rightarrow 0$  としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言えるか)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z}.$$

$R := \sqrt{\mu/U}$  とおくと

$$f(z) = U \left( z + \frac{R^2}{z} \right).$$

速度ポテンシャル  $\phi$  と流れ関数  $\psi$  は

$$\phi = U \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$\psi = U \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

円周  $r = R$  上で  $\psi = 0$  であるから、 $r = R$  は流線である。 ■

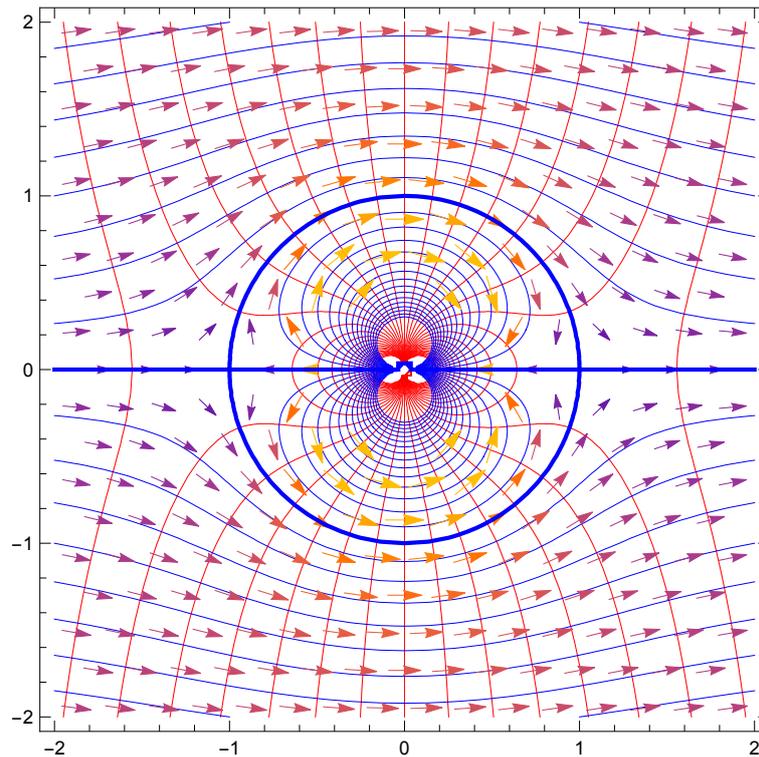


図 15: 円柱を過ぎる一様流

## 5 ポテンシャル問題を解いて流れを求める

別に「ポテンシャル問題とその数値解法」<sup>12</sup> という文書を用意している。この節の内容は簡潔なものにして、多くのことはその文書を見てもらうようにするつもり (今はごっちゃになっていて申し訳ない)。

### 5.1 ポテンシャル問題とは

Laplace 方程式  $\Delta u = 0$  の境界値問題をポテンシャル問題という。正則関数の実部・虚部は調和関数 (ラプラス方程式の解) であるため、関数論のあちこちの重要な場面でポテンシャル問題が登場する。

2次元渦無し非圧縮流の速度ポテンシャル  $\phi$  は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$(5.1) \quad \Delta \phi = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \partial \Omega$$

の解である、ということを既に紹介した。

以下では、これを少し一般化した Poisson 方程式<sup>13</sup>の境界値問題 (5.3), (5.4), (5.5) を考える。

<sup>12</sup><http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/applied-complex-function-2018/potential/>

<sup>13</sup> $-\Delta u = f$  という形の微分方程式を Poisson 方程式,  $f = 0$  の場合、すなわち  $\Delta u = 0$  が Laplace 方程式である。

実は、この問題は非常に筋の良い問題である。そのため、様々な数値計算法が適用出来る。ここでは有限要素法による数値計算を説明する。

その他の数値計算法については、解説文書「ポテンシャル問題の数値計算」(<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential.pdf>) という文書を用意した。

## 5.2 有限要素法でポテンシャル問題を解く

### 5.2.1 Poisson 方程式の境界値問題とそれに対する弱形式

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界な領域、その境界  $\partial\Omega$  が  $\Gamma_1, \Gamma_2$  に分かれているとする。

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

また領域  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  上の点における外向きの単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とする。

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}, g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき、

$$(5.3) \quad -\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(5.4) \quad u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1)$$

$$(5.5) \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2)$$

を満たす  $u$  を求めよ、というのが Poisson 方程式の境界値問題である。

注:  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{n}) - u(\mathbf{x})}{h} = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}.$

この問題は、次のように変形できる (弱定式化, weak formulation)。

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.

$$(5.6) \quad \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds \quad (v \in X).$$

ここで

$$X_{g_1} := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = g_1 \text{ on } \Gamma_1\}, \quad X := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_1\}.$$

(念のため:  $\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_x v_x + u_y v_y.$ )

条件 (5.6) を弱形式と呼ぶ。適当な条件のもとで、弱形式を満たす  $u \in X_{g_1}$  は一意に定まり、それがもとの問題の解となる。弱形式を満たす  $u$  を求めることでもとの問題を解く方法を弱解の方法と呼ぶ。(そのルーツとして有名なのは、Riemann による写像定理の、Dirichlet の原理を用いた証明である — これについては後日説明する。)

## 5.2.2 有限要素法, FreeFem++

**有限要素法** (finite element method) は、弱解の方法を原理とする数値計算法である。それはかなりの部分を自動化出来るため、専用のソフトウェアが開発されている。

その1つである、**FreeFem++**<sup>14</sup> は、パリ第6大学 J. L. Lions 研究所の Frédéric Hecht, Oliver Pironneau, A. Le Hyaric, 広島国際学院大学の 大塚厚二氏らが開発した、2次元, 3次元問題を有限要素法で解くための、一種の PSE (problem solving environment) である。ソースコード、マニュアル (約 400 ページ, 幸い英文)、主なプラットフォーム (Windows, Mac, Linux) 向けの 実行形式パッケージが公開されている。

FreeFem++ については、大塚・高石 [18] という解説書も出ているが、簡単なことは、「FreeFEM++ の紹介」<sup>15</sup> を読めば分かるであろう。

インストールは次の手順で行う。授業でやって見せるので、なるべくその時に一緒にやってみて、分からなかったら質問して下さい。

1. 自分が使っている Mac OS X (macOS) のバージョンを確認する (「この Mac について」を見るとよい)。
2. 「応用複素関数」の WWW サイト (または **FreeFem++**<sup>16</sup>) 上記の WWW サイトから、自分の OS のバージョンに合ったインストール用の .pkg ファイル (FreeFem++-3.53-1-MacOS\_10.11.pkg のような名前) を入手する。
3. 入手した .pkg ファイルを実行する (Control+クリックする必要があるかも)。もしも検証に時間がかかるならば、/System/Library/CoreServices にある “インストーラ” を起動し、そこから .pkg ファイルを指定する。
4. /usr/local/ff++ の下にある bin という名前のディレクトリを探し、PATH にそれを設定する。FreeFem++-3.53-1-MacOS\_10.11.pkg の場合は、/usr/local/ff++/openmpi-2.1/3.53/bin というディレクトリなので、 ~/.profile (または ~/.bash.profile) の下の方に

```
export PATH=$PATH:/usr/local/ff++/openmpi-2.1/3.53/bin:/usr/local/ff++/openmpi-2.1/bin
```

(従来の \$PATH に : で区切って追加する。)

という行を書き込む。ターミナルを起動し直すか、source ~/.profile のようにして設定を読み直す。

/usr/local/ff++/share/freefem++/freefem++doc.pdf というマニュアルがある。

<sup>14</sup><http://www.freefem.org/ff++/>

<sup>15</sup><http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/welcome-to-freefem/>

<sup>16</sup><http://www.freefem.org/ff++/>

### 5.2.3 (5.1), (5.2) を解くための FreeFem++ のプログラム

速度ポテンシャルを求める境界値問題

$$(再 5.1) \quad \Delta \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(再 5.2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial \Omega)$$

の場合は、 $\Gamma_1 = \emptyset, \Gamma_2 = \partial \Omega, f = 0, g_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ .

特に  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  のときは、 $(x, y) \in \partial \Omega$  において  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  であるから、

$$g_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y.$$

速度ポテンシャルを求める potential2d-v0.edp<sup>17</sup> ← これを保存する

```
// potential2d-v0.edp
// http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
// 2次元非圧縮ポテンシャル流
// 速度ポテンシャル, 速度を求め、等ポテンシャル線, 速度場を描く

border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");

fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で, V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線(等ポテンシャル線)を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);

// ベクトル場(v1,v2)=∇φを描く(ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi);
v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps",wait=1);
```

プログラムはテキスト・エディター (mi, emacs, Xcode, テキスト・エディット<sup>18</sup>など) で作成し、ターミナルから、

<sup>18</sup>テキストエディットで、テキスト・ファイルを入力・編集するには若干の設定が必要である。<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/knowhow-2015/node1.html> を見よ。

こんなふうにして実行

FreeFem++ potential2d.edp

とタイプして実行できる。リターン・キーを打つごとに次の図に進み、最後 (ベクトル場と等ポテンシャル線を描いてお終い) は Escape キーを打って終了する。

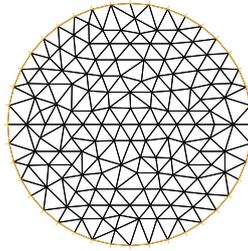


図 16:  $\Omega$  の三角形分割

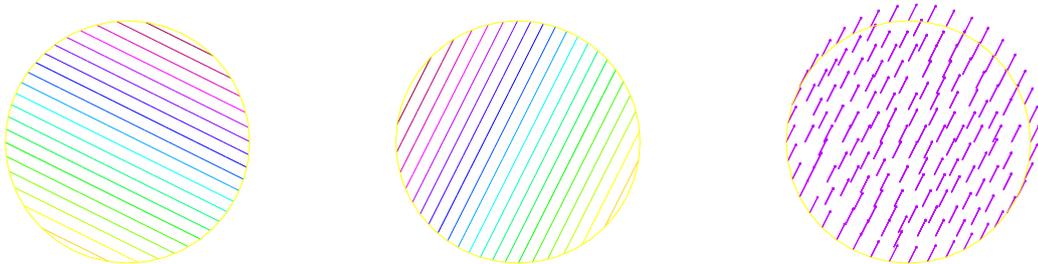


図 17: 一様流の等ポテンシャル線, 流線, ベクトル場

このプログラムは、図の PostScript データ “counterpotential.eps”, “vectorfield.eps”, “both.eps” を出力している。

(実は、上の弱形式は解の一意性がないので、このプログラムは少し危ういところがある。)

FreeFem++ はポテンシャル問題に限らず、色々な問題を解くことが出来る。時間が余った時の脇道用: Navier-Stokes 方程式による、有名な円柱の周りの水の流れのシミュレーション・プログラム NS-cylinder.edp<sup>19</sup> (鈴木 厚先生の Finite element programming by FreeFem++ – intermediate course<sup>20</sup> から)

<sup>19</sup><https://www.ljll.math.upmc.fr/~suzukia/FreeFempp-tutorial-JSIAM2016/EDP/NS-cylinder.edp>

<sup>20</sup><https://www.ljll.math.upmc.fr/~suzukia/FreeFempp-tutorial-JSIAM2016/>

# 付録

## A ベクトル解析駆け足の復習

さすがに線積分、面積分の定義の復習は省略する (桂田 [15])。

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の領域とする。 $\Omega$  を定義域とする実数値ベクトル値関数  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  のことを  $\Omega$  上のスカラー場と呼ぶ。また、 $\Omega$  を定義域とする  $n$  次元ベクトル値関数  $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  のことを  $\Omega$  上のベクトル場と呼ぶ。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ とするとき、}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{f} := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$$

とおき、 $\operatorname{div} \mathbf{f}$  を  $\mathbf{f}$  の発散 (divergence) と呼ぶ。 $\operatorname{div} \mathbf{f}$  のことを  $\nabla \cdot \mathbf{f}$  とも書く。 $\operatorname{div} \mathbf{f}$  は  $\Omega$  上のスカラー場である。

“良い” 境界を持つ領域  $\Omega$  の閉近傍で  $C^1$  級のベクトル場  $\mathbf{f}$  に対して、

$$(A.1) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

が成り立つ (Gauss の発散定理)。ただし  $\mathbf{n}$  は、 $\partial\Omega$  上の点における外向き単位法線ベクトルであり、 $d\sigma$  は面積要素 (2次元の場合は線要素) を表すとする。

問 16. (A.1) は

$$(A.2) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f n_j \, d\sigma \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

と同値であることを確認せよ。ただし、 $n_j$  は  $\mathbf{n}$  の第  $j$  成分である。

$C^1$  級の関数  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、

$$\operatorname{grad} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

とおき、 $F$  の勾配 (gradient) と呼び、 $\nabla F$  とも書く。これは  $\Omega$  上のベクトル場である。

$\Omega$  上のベクトル場  $\mathbf{f}$  に対して、

$$\operatorname{grad} F = \mathbf{f} \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たす関数  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が存在するとき、 $F$  を  $\mathbf{f}$  のポテンシャルと呼ぶ。

$f$  の  $C^2$  級のポテンシャル  $F$  が存在するならば、

$$(A.3) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (\text{in } \Omega; i, j = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

逆に  $C^1$  級のベクトル場  $f$  が (A.3) を満たしている、 $\Omega$  が単連結ならば、 $f$  のポテンシャルが存在する。実際、 $\Omega$  内に任意の選んだ定点  $\mathbf{a}$  を始点として、 $\Omega$  内の任意の点  $\mathbf{x}$  に対して、 $\mathbf{x}$  を終点とする、 $\Omega$  内の区分的に滑らかな曲線  $C_{\mathbf{x}}$  に対して

$$\int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

の値は、 $C_{\mathbf{x}}$  の取り方によらずに  $\mathbf{x}$  のみで定まり、

$$F(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

とおくことで得られる関数  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $f$  の一つのポテンシャルになる。

$\Omega$  自身が単連結でない場合も、任意の開球は単連結領域であるから、 $f$  が (A.3) を満たしていれば、任意の点の十分小さな近傍でポテンシャルが存在することになる。

3次元の  $C^1$  級ベクトル場  $f$  に対して、

$$\text{rot } \mathbf{f} := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

とおき、 $f$  の回転 (rotation) と呼び、 $\nabla \times \mathbf{f}$ ,  $\text{curl } \mathbf{f}$  と表す。 $\text{rot } \mathbf{f}$  は3次元のベクトル場である。

3次元の  $C^1$  級ベクトル場  $f$  に対して、(A.3) は

$$\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

と同値である。ゆえに、3次元のベクトル場  $f$  がポテンシャルを持てば  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  が成り立ち、逆に  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  が成り立つならば、単連結領域において  $f$  のポテンシャルが存在する。

2次元のベクトル場  $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  に対しては、(A.3) は

$$v_x - u_y = 0$$

と同値であり、同様のことが成り立つ。

最後になったが、

$$\text{rot grad} = \mathbf{0}, \quad \text{div rot} = 0, \quad \text{div grad} = \Delta.$$

なお

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{f}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}.$$

## B 流体力学の補足

この講義は流体力学ではないので、やりすぎてはいけないのだけれど…(どこで止めるかが難しい。)

### B.1 Navier-Stokes 方程式の無次元化と Reynolds 数

無次元化された Navier-Stokes 方程式は

$$(B.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}.$$

ただし  $\text{Re}$  は、代表的な速度  $U$  と代表的な長さ  $L$  を用いて

$$(B.2) \quad \text{Re} := \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}$$

で定義される無次元数 (dimensionless number) であり、**Reynolds 数** (the Reynolds number) と呼ばれる。

幾何学的に相似な領域で、Reynolds 数が等しい2つの流れは、相似であるという。

無次元化方程式の導出

代表的な長さ  $L$ , 代表的な速さ  $U$  を取って

$$(B.3) \quad x' := \frac{x}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad u' := \frac{u}{U}$$

とおくと、 $x'$  と  $t'$  は無次元の独立変数であり、 $u'$  は無次元の従属変数である。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'}$$

$\nabla'$ ,  $\Delta'$  を  $x'$  に関する微分作用素とすると

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x'_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla', \quad \Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2} \Delta'$$

以上を Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

に代入して

$$\rho \left[ \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'} U u' + \left( U u' \cdot \frac{1}{L} \nabla' \right) U u' \right] = -\frac{1}{L} \nabla' p + \mu \frac{1}{L^2} \Delta' U u'$$

左辺、右辺それぞれ整理して

$$\frac{\rho U^2}{L} \left[ \frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' \right] = -\frac{1}{L} \nabla' p + \frac{\mu U}{L^2}$$

両辺を  $\rho U^2/L$  で割ると

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' = -\frac{1}{\rho U^2} \nabla' p + \frac{\mu}{\rho U L} \Delta' u'$$

そこで

$$(B.4) \quad p' := \frac{1}{\rho U^2} p, \quad \text{Re} := \frac{\rho U L}{\mu}$$

とおくと、どちらも無次元の量で

$$(B.5) \quad \frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' = -\nabla' p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta' u'$$

## B.2 Bernoulli の定理

「Bernoulli の定理」は非常に有名であり、しばしば言及されるが、何を仮定しているかきちんと書いてあることは非常に稀である。

(準備中)

## C 問の略解

解答 1. 水  $1 \text{ cm}^3$  は  $1 \text{ g}$  であるから、 $1 \text{ m}^3$  では、 $100^3 \text{ g} = 10^6 \text{ g} = 10^3 \text{ kg}$ . ゆえに  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ . (1 立方メートルの水は 1 トン)

空気は、酸素 (分子量 32) と窒素 (分子量 28) が、おおよそ 20:80 の体積比で混合されているので (もう少し精密にやると酸素、窒素、アルゴンが 21 : 78 : 1)、平均の分子量は、 $32 \times 0.2 + 28 \times 0.8 = 28.8$ . ゆえに  $1 \text{ mol}$  の質量は  $28.8 \text{ g} = 2.88 \times 10^{-2} \text{ kg}$ . この体積は、 $0^\circ\text{C}$ ,  $1$  気圧で、 $22.4 \text{ l} = 2.24 \times 10^4 \text{ cm}^3 = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ . ゆえに  $\rho = \frac{2.88 \times 10^{-2}}{2.24 \times 10^{-2}} \text{ kg/m}^3 \doteq 1.3 \text{ kg/m}^3$ . (もう少し精密に計算すると  $1.293 \text{ kg/m}^3$ )

水の密度  $\div$  空気の密度は、 $\frac{10^3}{1.3} \doteq 770$ . ■

解答 2. (1)  $\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ . (2) (簡単なので略) ■

解答 3. (準備中) ほぼ答えを打ち込んだのに上書きして消してしまった。立ち直れない…他の本を見て下さい。例えば岡本・中村 [11] が参考になる。

解答 4. (準備中 — 角運動量の保存によるそうだ。)

解答 5. (準備中)

解答 6. 第  $i$  成分は

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -(p + \lambda \text{div } \mathbf{v}) \delta_{ij} + 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= - \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (p + \lambda \text{div } \mathbf{v}) + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} (p + \lambda \text{div } \mathbf{v}) + \mu \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\text{div } P = - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{v}. \blacksquare$$

解答 7. (準備中)

解答 8. 重力加速度を  $g$  をとすると、外力項は  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$  となる。静止しているということ

とは  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$  ということであるから、Navier-Stokes 方程式は、

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f},$$

すなわち

$$0 = -\frac{p_x}{\rho}, \quad 0 = -\frac{p_y}{\rho}, \quad 0 = -\frac{p_z}{\rho} - g.$$

これから  $p(x, y, z) = -\rho gz + F(t)$ . 水面を  $z = 0$  として、 $F(t)$  を大気圧  $p_{\text{大気}}$  にすると、

$$p(x, y, z) = p_{\text{大気}} - \rho gz. \blacksquare$$

**解答 9.** 上の面が水面に含まれる、1 辺が 1 m の立方体を考える。底面に  $1 \text{ m}^3$  の水に働く重力がかかる。水は  $1 \text{ cm}^3 = (10^{-2})^3 \text{ m}^3$  の質量が  $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$  であるから、 $1 \text{ m}^3$  の水に働く重力は

$$10^6 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 9.81 \times 10^3 \text{ N}.$$

ゆえに水圧は  $9.81 \times 10^3 \text{ Pa}$ . 一方、大気圧は  $1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  であるから、大気圧は水圧の  $\frac{1.013 \times 10^5}{9.81 \times 10^3} \doteq 10.3$  倍である。大気圧の方が 1 桁大きい。水面から 10 m 下のところの水圧がほぼ 1 気圧ということになる。意外に大気圧は大きい (と筆者は感じた)。■

**解答 10.** 静止しているから、 $E = 0$  であるので、 $P = -pI$ . ゆえに  $\mathbf{p}(n) = -p\mathbf{n}$ .

物体の占める領域を  $\Omega$  とする。物体表面  $\partial\Omega$  の微小部分  $d\sigma$  が水から受ける力は、 $-p\mathbf{n}d\sigma$  であるから、物体全体では、

$$\mathbf{F} := \int_{\partial\Omega} (-p\mathbf{n}) d\sigma.$$

この第  $j$  成分は、発散定理 (A.2) によって

$$F_j = - \int_{\partial\Omega} p n_j d\sigma = - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho g d\mathbf{x} = \rho g |\Omega| & (j = 3) \\ \int_{\Omega} 0 d\mathbf{x} = 0 & (j = 1, 2). \end{cases}$$

ゆえに

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g |\Omega| \end{pmatrix}. \blacksquare$$

**解答 11.** 右辺第 1 項は  $\frac{1}{p}\nabla p$  でなく、 $-\frac{1}{\rho}\nabla p$  である。

- (i) 密度  $\rho$  であるべきところが、圧力  $p$  になってしまっているのは、字が似ているからだろう。(2.24) の導出の過程で、両辺を  $\rho$  で割る操作があったことを思い出して欲しい。
- (ii) 負号  $-$  が落ちているのも細かいようだが、(単位体積あたりの) 力 (の一部) を表す項で、(粘性を無視すればつねに) 圧力の高い方から低い方に力が働くことが納得できるので、 $-$  がないとおかしい、と気付けるはずである。■

解答 12. (1) 一般に  $\text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$  が成り立つ。(2) 領域内の定点から任意の点  $\mathbf{x}$  にいたる領域内の曲線  $C_x$  を取って、 $\phi(\mathbf{x}) = \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  とおくと、 $\phi$  は  $\mathbf{v}$  のポテンシャルである。■

解答 13. 要点のみ:  $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_x} u dy - v dx$  とする。■

解答 14.  $\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$  であることが導かれる。■

解答 16. (準備中)

## 参考文献

- [1] 桂田祐史：関数論の流体力学への応用 (1) 流体力学の方程式, [https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/AC05\\_0518\\_handout.pdf](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/AC05_0518_handout.pdf) (2021/5/18).
- [2] 桂田祐史：関数論の流体力学への応用 (2) 渦無しと非圧縮条件, [https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/AC06\\_0525\\_handout.pdf](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/AC06_0525_handout.pdf) (2021/5/25).
- [3] 桂田祐史：関数論の流体力学への応用 (3) 複素関数の表す流れ, [https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/AC07\\_0601\\_handout.pdf](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/AC07_0601_handout.pdf) (2021/6/1).
- [4] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [5] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。
- [6] 今井功：応用超関数論 I, II, サイエンス社 (1981), 版元在庫切れで中古市場でプレミア価格がついている。
- [7] たつみともまさ 巽 友正：流体力学, 培風館 (1982).
- [8] ホレースラム：ラム流体力学 1, 2, 3, 東京図書 (1988), Lamb, Hydrodynamics, Dover Publications (1945) の今井功, 橋本英典による翻訳である。原著の PDF がネットで入手できる。
- [9] 岡本久：ナビエ・ストークス方程式の数理, 東京大学出版会 (2009).
- [10] ダニエル・フライシュ：物理のためのベクトルとテンソル, 岩波書店 (2013/1/30), 川辺哲次 訳。
- [11] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996~1999) の分冊を単行本化したもの。

- [12] 岡本久：ナビエ-ストークス方程式の導き方, 数理科学, Vol. 48, No. 11, pp. 71–77 (2010), 2010年11月号.
- [13] Chorin, A. J. and Marsden, J. E.: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer (1979, 1990, 1993).
- [14] Meyer, R. E.: *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*, Dover Publications (2012/3/8), 元々は Wiley & Sons, Inc. から 1971 年に出版された.
- [15] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (内容はベクトル解析) (2006～).
- [16] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf> (2008).
- [17] 小倉義光：一般気象学 第 2 版補訂版, 東京大学出版会 (2016/3/25).
- [18] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++ 数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), <https://sites.google.com/a/comfos.org/comfos/ffempp> というサポート WWW サイトがある. Maruzen eBook に入っているので, <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545> でアクセス出来る.