

応用複素関数 第10回

～ポテンシャル問題～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024年6月25日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 ポテンシャル問題
 - はじめに
 - Poisson 方程式の境界値問題
 - Riemann の写像定理 (復習 — 再掲)
 - 正規化条件
 - Jordan 領域の写像関数
 - Jordan 曲線定理
 - ポテンシャル問題への帰着
 - Carathéodory の定理
 - Dirichlet の原理 (次回に回す)
 - 証明
 - 反省
 - ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法
- 3 FreeFem++ を体験しよう
 - どういうものか
 - 入手とインストール
 - サンプル・プログラム
- 4 参考文献

- 今回から「ポテンシャル問題」の解説を始める (それについてレポート課題 3 を出す予定)。

4 ポテンシャル問題

4.1 はじめに

まず復習から。非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす (第7回授業)。

$$(1a) \quad \Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(1b) \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

$\partial\Omega$ 上の \mathbf{v} が分かれば、(1a), (1b) は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題である。(かなり一般的な条件下で) 定数差を除いて一意的に解が存在する。

ϕ が求まれば、 $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$ により \mathbf{v} が得られ、流れが決定される。

$\partial\Omega$ 上の \mathbf{v} さえ分かれば、(1a), (1b) を解いて流れが求まる。

前節で既知の正則関数を組み合わせることで色々な2次元流れを表す、という手法を紹介した。例えば円柱周り的一様流の問題などを解いた。扱える問題の範囲が異なり、どちらが優れているとも言えないが、こちらの方法の有効性を想像するのは難しくないであろう (実際、とても強力である)。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題 (その重要性の説明)

Laplace 方程式の境界値問題 (1a), (1b) を少し一般化する。

Ω は \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) の領域、その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

と分割されていて、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとする。また \mathbf{n} は、 Γ_2 上の点における外向き単位法線ベクトルとする。

このとき $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ で、次の方程式を満たすものを求めることを考える。

$$\begin{aligned} (2a) \quad & -\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega) \\ (2b) \quad & u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ (2c) \quad & \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \end{aligned}$$

(2a) は有名な ポアソン **Poisson方程式** である。

(2b), (2c) はそれぞれ ディリクレ Dirichlet 境界条件, ノイマン Neumann 境界条件と呼ばれる。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題 (その重要性の説明)

Poisson 方程式は、**楕円型偏微分方程式の典型例**であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場 f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー

静電場 f は電荷密度, ϕ は電位

熱平衡 f が発生する熱量, ϕ は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

その中でも $f = 0$ の場合 (Laplace 方程式 $\Delta u = 0$) がとりわけ重要である。**ポテンシャル問題**と呼ばれる。これは関数論においても、多くの基本的な結果を得るための基礎となる (調和関数を決定する問題が解ける)。

ポテンシャル問題には、**差分法** (FDM, finite difference method)、**有限要素法** (FEM, finite element method) をはじめとする多くの数値計算法が適用できる。特に Laplace 方程式の場合は、**基本解の方法** (method of fundamental solution) が有効である。

4.3 Riemann の写像定理 (復習)

関数論で基本的な Riemann の写像定理を説明する (1 次分数変換のとき、一瞬間を出した)。

定義 10.1 (双正則)

U と V は \mathbb{C} の領域, $\varphi: U \rightarrow V$ とする。 φ が**双正則**であるとは、 φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。**双正則写像は関数論としての同型写像**と言える。

定理 10.2 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は \mathbb{C} の単連結領域で、 $\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

証明は省略する (例えば Ahlfors [1], 高橋 [2] を見よ)。

φ のことを、**領域 Ω の等角写像**、あるいは**領域 Ω の写像関数**と呼ぶ。

いくつか簡単な形の領域の写像関数を、1 次分数変換で具体的に求めることができる (簡単なものしか紹介していない)。

4.3 Riemann の写像定理 (復習) 正規化条件

\mathbb{C} の単連結領域で \mathbb{C} と異なるものは、関数論的には円盤領域と同型である、ということになる。

系 10.3

\mathbb{C} 内の単連結領域で \mathbb{C} とは異なるものは互いに同相 (位相同型) である。

証明 Ω_1, Ω_2 が \mathbb{C} とは異なる \mathbb{C} の単連結領域とすると、双正則写像 $\varphi_1: \Omega_1 \rightarrow D(0; 1)$, $\varphi_2: \Omega_2 \rightarrow D(0; 1)$ が存在する。このとき $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ は双正則である。特に同相写像であるので、 Ω_1 と Ω_2 は同相である。 \square

4.3 Riemann の写像定理 (復習) 正規化条件

単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ が与えられたとき、 Ω の写像関数は一意的には定まらない。定めるためには追加の条件が必要だが、次のものが有名である。

命題 10.4 (写像関数の決定)

Ω は \mathbb{C} の単連結領域で、 $\Omega \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ とする。このとき、双正則写像 $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で

$$(3) \quad \varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0$$

を満たすものは一意的である。

(3) を**正規化条件**と呼ぶ。

証明は、円盤に帰着して、1次分数変換の議論をする。

4.4 Jordan 領域の写像関数 Jordan 曲線定理

平面内の単連結領域の重要な例として、以下に紹介する Jordan 領域がある。Jordan 領域の写像関数はポテンシャル問題を解いて求まる (すぐ後)。

定理 10.5 (Jordan 曲線定理 (Jordan-Schöflies))

平面内の任意の単純閉曲線 C に対して、ある領域 U_1, U_2 が存在して、 U_1 は有界、 U_2 は非有界、さらに

$$C = U_1 \cup C^* \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \cap C^* = \emptyset, \quad U_2 \cap C^* = \emptyset.$$

ただし、 C^* は C の像とする。さらに C^* は U_1, U_2 の共通の境界である。さらに U_1 は円盤領域、 U_2 は円の外部領域とそれぞれ同相である。

(単純とは、自分自身と交わらないことを意味する。)

単純閉曲線のことを **Jordan 曲線** (あるいは Jordan 閉曲線) とも呼ぶ。

単純閉曲線 C に対して、定理で存在を保証される U_1 を、 C の囲む **Jordan 領域** と呼ぶ。

定理 10.5 は直観的に納得しやすいが、証明はなかなか面倒ということで有名である。ここでは省略する。

4.4 Jordan 領域の写像関数 ポテンシャル問題への帰着

\mathbb{C} 内の Jordan 領域は単連結であるから、 Ω の写像関数が存在する。

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 10.6 (Jordan 領域の写像関数)

Ω を \mathbb{C} 内の Jordan 領域、 $z_0 \in \Omega$ とする。 u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(4a) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(4b) \quad u(x, y) = -\log |z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega).$$

の解、 v を u の共役調和関数で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0) \exp(u(z) + iv(z))$$

は、 Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

4.4 Jordan 領域の写像関数 ポテンシャル問題への帰着

駆け足の証明 (2 ページ) 後述の Carathéodory の定理により、 φ を $\bar{\Omega}$ から $\bar{D}(0; 1)$ への同相写像に拡張できることが分かる。それを同じ記号 φ で表す。

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0)$$

であるから、 z_0 は $\frac{\varphi(z)}{z - z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\frac{\varphi(z)}{z - z_0}$ を $\bar{\Omega}$ で連続に拡張した写像を ψ で表す。 ψ は Ω では正則である。

実は $\psi(z) \neq 0$ ($z \in \Omega$) である。(実際、 $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ とするとき $\varphi(z) \neq \varphi(z_0) = 0$ であるから $\psi(z) \neq 0$ 。一方、 φ は単射であるから $\varphi'(z_0) \neq 0$ が成り立つので、 $\psi(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$ 。)

Ω は単連結であるから、 $\log \psi(z) = \log \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を u, v とする。

$$(5) \quad \log \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = u(z) + iv(z).$$

u は調和関数であり、 v は u の共役調和関数である。

$z \in \partial\Omega$ のとき $|\varphi(z)| = 1$ であるから

$$u(z) = \log \left| \frac{\varphi(z)}{z - z_0} \right| = -\log |z - z_0| \quad (z \in \partial\Omega).$$

4.4 Jordan 領域の写像関数 ポテンシャル問題への帰着

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解である。

$$(6a) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(6b) \quad u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega).$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、 z_0 を始点、 $z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x dx + v_y dy) = \int_{C_z} (-u_y dx + u_x dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、 v の値は確定する)。

(5) を φ について解くと

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp(u(z) + iv(z)).$$

これから $\varphi(z_0) = 0$. また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z)) \exp(u(z) + iv(z)),$$

$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

これから、 $\varphi'(z_0) > 0 \Leftrightarrow v(z_0) \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad v(z_0) = 2k\pi$. どの k でも φ は変わらないので $k = 0$. すなわち $v(z_0) = 0$ で v を定めれば良い。 \square

定理 10.7 (Carathéodory の定理)

C を \mathbb{C} 内の Jordan 曲線、 Ω を C の囲む Jordan 領域、 $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1)$ を双正則とすると、 φ は同相写像 $\tilde{\varphi}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}(0; 1)$ に拡張できる。

有名な定理であるが、証明が載っているテキストが意外と少ない (手持ちのテキストで載っているものを探したのだけれど…有名な Ahlfors [1] も give up している)。私自身はチェックしていないが、Wikipedia [▶ Link](#) に証明の情報がある。

時間配分の問題から、5「FreeFem++を体験しよう」は早めにやりたいので、次の「Dirichletの原理」, 「ポテンシャル問題の数値解法」を後回しにした。

4.5 Dirichlet の原理 (次回に回す)

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(7a) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(7b) \quad u = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (7b) を満たす関数の全体 X と、 X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \{u \mid u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in \partial\Omega) u(x) = g(x)\},$$

$$J[u] := \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\Delta u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (7a), (7b) の解である。

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

4.5 Dirichlet の原理

証明

$v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ は、条件 $v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv = g + t \cdot 0 = g$ (on $\partial\Omega$)。ゆえに $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy + t^2 \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) dx dy$$

は t の 2 次関数であり、 $t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$(8) \quad \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = 0.$$

Green の公式 $(\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy)$ より

$$\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = 0.$$

これが任意の v について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \square$$

4.5 Dirichlet の原理

反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、 J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがある。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。

以上の話は、少し込み入っていて、初めて聴く人には分かりにくいと思われるので、振り返っておこう。

- Riemann の写像定理という関数論で基本的と考えられている定理がある。それは領域の写像関数の存在に関する定理である。
- Jordan 曲線 (単純閉曲線) で囲まれた領域¹ の写像関数は、Laplace 方程式のある Dirichlet 境界値問題を解くことで求まる。
- Riemann は、その境界値問題が次のように解けると主張した:
汎関数 $J[u] := \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$ の最小化問題 (変分問題) が解ければ良い (∵ Dirichlet の原理)。この J の最小値の存在は明らか。
→ ツッコミが入って、頓挫したが、結局は解決された。

最小性は

$$\iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = 0 \quad (v \text{ は条件 } v = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ を満たす任意の関数})$$

という条件と同値である。この式は弱形式と呼ばれる。有限要素法という数値解法では、微分方程式の近似解を弱形式の解として求める。

¹穴が空いていないということで、最も単純と考えられる。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイデアは次の2つ:

- ① **弱形式**を用いる。
- ② 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

実は Dirichlet 原理の証明中に現れた (8) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱形式である。(弱形式については、次回解説を行う。)

今回は「百聞は一見にしかず」で、まずはプログラム(スライド1枚)を紹介する。

2,3行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。

```

// potential2d-v0.edp --- 2次元非圧縮ポテンシャル流
// 速度ポテンシャル, 速度を求め、等ポテンシャル線, 速度場を描く
border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y; //  $\Omega$ が単位円で,  $V=(1,2)$  のとき  $V \cdot n=x+2y$ 

// 速度ポテンシャル $\phi$ を求め、その等高線(等ポテンシャル線)を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
// ベクトル場  $(v1,v2)=\nabla\phi$  を描く(ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);

```

FreeFem++ を体験しよう どういうものか

FreeFem++ は、2次元, 3次元の偏微分方程式の問題を有限要素法で解くための、一種の PSE (problem solving environment) である。

パリ第6大学 J. L. Lions 研究所の Frédéric Hecht, Oliver Pironneau, A. Le Hyaric, 広島国際学院大学の 大塚厚二氏らが開発した。

ソースコードとマニュアル (700 ページ超、幸い英文)、主なプラットフォーム (Windows, Mac, Linux) 向けの実行形式パッケージがフリーで提供されている。

従来のプログラミング言語では、短くても数百行のプログラムを書く必要があったような問題が、十数行のプログラム (スライド1枚に入ったりする) を書くだけで解けてしまったりする。

① FreeFem++ の WWW サイト

分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [3] がある。

パラパラしてみると、どういうことが出来るか分かる。

② 大塚・高石 [4] という日本語の解説書がある (現在品切だが、明治大学の学生は、図書館あるいは Maruzen eBook で読める)。

③ 色々な WWW サイトがある (その多くは信頼できる)。
まず自作を紹介しておく

- 「FreeFem++の紹介」
- 「FreeFem++ ノート」

日本応用数学会のチュートリアルの資料&サンプル・プログラム

- 「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング - 中級編 -」 (2016/2/11,12)
- 「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング - 上級編 -」 (2016/6/4,5)

FreeFem++ を体験しよう 入手とインストール

現在、メンテナンスをしていた人が交代したためか、インストールが少し難しい。

2024/6/23 時点で、version 4.14 が最新版である。

インストール手順は、「[FreeFem++ 4.14 のインストール](#)」を参考にしてください。授業で実演するので真似してやってみよう。

- macOS Ventura 以降を使っている人は書かれている手順を良く読んで、慎重に作業してください。
- Ventura より前、Mojave 以降の macOS を使っている人は比較的簡単にインストールできるはず。
- macOS が 10.11(El Capitan)～10.13(HighSierra) ならば、FreeFem++ version 4.9 (FreeFem++-4.9-full-MacOS_10.11.pkg) を試してみる。

いずれにせよ、トラブルが生じたら気軽に相談してください。

文法はC言語に似ているので、見様見真似でプログラムが書けると思われるが、簡単な説明を用意する予定である。

FreeFem++ を体験しよう サンプル・プログラム

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを新しく開いて、以下の4つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp
```

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp
```

FreeFem++ では、`plot()` 実行後に一時停止することがあります (グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。

参考文献

- [1] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).
- [2] 高橋礼司: 複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された。丸善 eBook では、
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441> でアクセスできる。
- [3] Hecht, F.: Freefem++, <https://github.com/FreeFem/FreeFem-doc/raw/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>, 以前は <http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> にあった。 (??).
- [4] 大塚厚二, 高石武史: 有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++ 数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014),
<https://sites.google.com/a/comfos.org/comfos/ffempp> というサポート WWW サイトがある。 Maruzen eBook に入っているので、
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545> でアクセス出来る。