応用複素関数 第 6 回

〜 Riemann 球面, 1 次分数変換 (3), 流体力学への応用 (1) 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024 年 5 月 21 日

目次 I

本日の内容・連絡事項

- 今日の前半 (1 次分数変換) までの範囲のレポート課題を出す (後 1 問何にしようか考えているがほぼ揃った)。〆切は 7 月 2 日 (教育実習のことを考えて緩め)。
- 今日の後半からコンピューター実習を伴う範囲「流体力学への応用」に入る。レポート課題を 2 つ出す予定。〆切は課題を出してから 3 週間後。教育実習の人は事前に相談して下さい。
- 関数論と流体力学についての資料 (PDF にはリンクを張ってある)
  - 「複素関数と流体力学」桂田 [1]···講義ノートのようなもの。ただし、今年度は内容 (物理的な議論) を大きくカットする予定。
  - ベクトル解析を未修の人は適当な機会に学ぶことを勧めるが、とりあえず桂田 [2], [3] 紹介しておく。

  参考書としては、今井「複素解析と流体力学」 [4] をあげておく。

連絡事項&本日の内容

- 今回から、しばらく (3 回程度) 流体力学への応用の話をする。
- 今日は、流体力学で出て来る諸概念と、有名な方程式 (連続の方程式、非圧縮条件、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式、Stokes 方程式) の紹介をする (駆け足)。
- 次回以降、以下のものを使う可能性がある。
  - Mathematica
    Mac で動くかチェックすること。ライセンスが切れて動かない場合は、桂田に相談すること (アクティベーション・キーの再発行ができる)。
  - FreeFem++
    これについてはインストール方法を紹介する資料を準備し、授業で実演する。
  - C コンパイラー
    macOS をアップデートして C コンパイラーが動かなくなっている人が時々いる。その場合、Xcode またはコマンドラインツールの再インストールをする。

同型について

数学で構造が同じものを同型という言葉で表現する。
線形空間で、全単射な線型写像が存在するとき。
群で、全単射な準同型写像が存在するとき。
位相空間で、連続かつ全単射で逆写像も連続なものが存在するとき。
複素平面の領域について…

領域の写像関数という概念を紹介する。これについては後で近似計算アルゴリズムを含めて詳しく説明するが、有名かつ重要な話を3つ“先行上映”する。

(i) Riemann の写像定理
(ii) 単位円盤の写像関数
(iii) 上半平面の写像関数

(ii), (iii) が1次分数変換となることが、1次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1次分数変換は基本的ツールとして使われる。

2.11 1次分数変換による領域の写像関数　写像定理

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、**双正則**(そうせいそく)という。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、$\varphi\colon \Omega \to D_1$ が双正則であるとき、φ を **Ω の写像関数**あるいは **Ω の等角写像**, the mapping function, Riemann mapping とよぶ。

定理 7.1 (Riemann の写像定理)

$\mathbb{C}$ の領域 Ω が単連結で、$\Omega \ne \mathbb{C}$ ならば、Ω の写像関数が存在する。

Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $z_0 \in \Omega$ とするとき、Ω の写像関数で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

(1)
$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0.$$

"簡単な" 領域の写像関数が 1 次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が 1 次分数変換そのものでなくても、その構成に 1 次分数変換が使われるものはとても多い)。

実は用語が統一されていなくて、話を聴くときテキストを読むときに注意が必要である。以下は講義では話さない。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω_1, Ω_2 について、$f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ が双正則であるとき、f を写像関数と呼ぶこともある (単に双正則という意味で写像関数と呼んでいる)。

Ω_2 が単位円盤 $D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ や上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ のような “標準的な” 領域の場合にのみ、f を単に写像関数 (the mapping function) と呼ぶことも多い。

Ω_1 の写像関数を Ω_1 の等角写像と呼ぶこともある。しかし、正則で至るところ $f' \neq 0$ を満たす写像 f を等角写像と呼ぶことも多いので、混同しないように注意が必要である。

他にもある。

このように、用語の使い方がまちまちである。自分が使うときは最初に定義を述べておくのが無難かもしれない。

Riemann mapping と呼ぶのは (The Riemann mapping theorem に出て来る写像ということで) 混乱が生じにくいかもしれない、と個人的に考えている (しかしあまり自信はない)。

2.11 1次分数変換による領域の写像関数　円盤の場合

次は非常に有名な定理である。

定理 7.2 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{2}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)
$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

この定理の証明を期末レポート課題 (のうちの一つ) にする。計算で $|\varphi(z)|^2 - 1 = \varphi(z)\overline{\varphi(z)} - 1 = \dfrac{\left(1 - |z_0|^2\right)\left(|z|^2 - 1\right)}{|1 - \overline{z_0} z|^2}$ が得られるので、(2) の φ が条件を満たすことが分かる。また、条件を満たす 1 次分数変換が (2) に限られることの証明は鏡像の原理を用いれば分かる。

双正則という仮定から、φ が 1 次分数変換に限られる、というところに **Schwarz の補題**という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。
多くの本に載っているので、自分で参考資料を探してみよう。

例 7.3 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面** (the upper half-plane) とよぶ。

(3)
$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

は H の写像関数である。

略証　1 次分数変換は、一般に $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への双正則写像であるから、$\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる次式から分かる。

$$1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}. \quad \square$$

この φ は**Cayley変換**(ケーリー) とよばれる。応用上頻出する。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

なお、上半平面を単位円板に写す 1 次分数変換の一般形は

(4) $$w = \alpha \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \operatorname{Im} \beta > 0.$$

$\beta = i$, $\alpha = 1$ のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

上半平面を上半平面に写す 1 次分数変換の一般形は

(5) $$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) = (f(z),f(\alpha),f(\beta),f(\gamma))$$

が成り立つ。
(証明) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w,f(\alpha),f(\beta),f(\gamma)) \quad (w\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi\circ f$ は α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi\circ f(z) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z),f(\alpha),f(\beta),g(\gamma)) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}). \qquad \square$$

流体 (**fluid**) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。
(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, $\cdots$)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

次のことが言える。

$$\text{2 次元の非圧縮流体の渦なしの流れ} = \text{正則関数}$$

この意味を理解して、その場合に応用できるようになることが、応用複素関数の (1 つの) 目標である。

3.1 はじめに (続き)

流体力学の定番本として、今井 [5], 巽 [6] をあげておく。関数論の応用については、今井 [4] がある。

必要な数学として、関数論、ベクトル解析、偏微分方程式の基本的な知識をあげておく (一応この授業で説明)。

3.2 流体の運動の表現　何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は位置, t は時刻を表す。

- 速度 (velocity) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

  ($\boldsymbol{v}$ の代わりに $\boldsymbol{u}$ という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure) $p(\boldsymbol{x}, t)$
- 密度 (density) $\rho(\boldsymbol{x}, t)$
- 温度 (temperature)　今回は考えない。

問　水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)
解答　水は 1 ml で 1 g とすれば、$\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 ℓ であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、$\rho = 1.3\ \mathrm{kg/m^3}$ となる。

3.3 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

(6)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ)　流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

(7)
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial V} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、$d\sigma$ は面積要素、∂V は V の境界である。

(7) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [2], [3] を見よ。

左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} = -\int_V \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}.$$

V は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \quad \square$$

3.4 物質微分 (1) 定義

積の微分法から $\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = \operatorname{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

(8) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

物質微分 (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素 $\frac{D}{Dt}$ を次式で定義する:

(9) $$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

これを使うと (8) は次のように表せる。

(10) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

3.4 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\boldsymbol{x}(t)$ とする。すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), t) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t) x_j'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t) v_j(\boldsymbol{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t), t)\end{aligned}$$

が成り立つ。

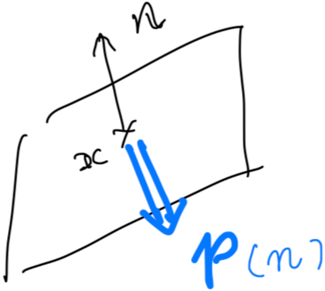
注意　流体粒子の速度は、位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t が分かれば $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ で与えられるが、その加速度は $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ でなく、$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$ である。よく考えてみよう。

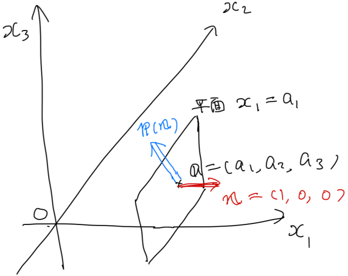
3.5 応力 (1) Cauchy の応力原理, 応力の定義

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置 x, 時刻 t, 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で指定する) で定まる (**Cauchy の応力原理**)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。





参考文献 I

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).

[2] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).

[3] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2023/vector_analysis.pdf (2021/5/31〜).

[4] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).

[5] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。

[6] 巽 友正（たつみ ともまさ）：流体力学, 培風館 (1982).