応用複素関数 第 2 回

〜 留数定理の応用 (2) 定積分計算 (続き), 級数の和計算 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024 年 4 月 23 日

目次

連絡事項, 本日の内容

次の内容を講義します。

- 前回の話 ($\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$) の続き。
- 留数定理の級数の和への応用 (講義ノート [1] の §1.3 の内容)

積分の定義には色々な流儀がある (大抵の場合に値は一致するけれど)。メジャーなものは次の 2 つ

1. Riemann 積分
   微積分での定番。“Riemann 和の極限として” 積分を定義する。
   $\int_\Omega f(x)\,dx$ で Ω と f が有界な場合に定義される。
   $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が有界とは　$(\exists R \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \Omega)\ |x| \le R.$
   $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ が有界とは　$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \Omega)\ |f(x)| \le M.$
2. Lebesgue（ルベーグ）積分
   ある意味で究極の積分とされる。関数解析では必須。現象数理学科では応用測度論で講義される。
   Ω や f が有界の場合も特別なことをしないで定義される。

Riemann 積分の場合に、Ω や f が有界でない場合にどうするかを以下考察する。→ 広義積分、主値積分の登場

1.1.3 広義積分と主値積分

Riemann 積分で、Ω や f が有界でない場合にどうするか？
$\to$ (まず) **広義積分**として定義する。

積分範囲が有界でない場合、有界な範囲の積分の極限として定義する。例えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R_1, R_2 \to \infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{dx}{x^2+1} = \cdots = \pi.$$

関数がその点の近傍で有界でないような点があれば、有界であるように穴を開けて、極限として定義する。例えば、$\alpha > 0$ とするとき

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \int_{\varepsilon_2}^{2} \frac{dx}{|x|^\alpha} \right) = \begin{cases} \infty & (\alpha \geq 1) \\ \dfrac{2^{1-\alpha}+1}{1-\alpha} & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$$

対称 ($R_1 = R_2$ とか $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) にやってはいけない。つまり

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R}, \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{2} \right)$$

は、広義積分の定義としては間違い (関数が定符号 (つねに $f \geq 0$ あるいはつねに $f \leq 0$) であったり、積分が "絶対収束" である場合は、値が一致するけれど)。

1.1.3 広義積分と主値積分

$\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$ は広義積分可能でない。実際

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\left([\log|x|]_{-1}^{-\varepsilon_1}+[\log|x|]_{\varepsilon_2}^{1}\right)$$
$$=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\left(\log 2+\log\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)=\text{発散}$$

(実際、$\varepsilon_1=\varepsilon_2$ のとき $\log 2$, $\varepsilon_1=3\varepsilon_2$ のとき $\log 2+\log 3$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2^2$ のとき $\log 2+\log\varepsilon_2\to-\infty$)

しかし、左右対称の穴 ($\varepsilon_1=\varepsilon_2$) を開けた場合に意味があることもある。(実際 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ への応用がそう。) それを **Cauchy の主値積分** (principal value) とよび、p.v. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$ と表す。

$$\text{p.v.}\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{-\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x}\right)=\log 2.$$

一般の場合の主値積分の定義は書かないが、特異点を避ける「穴」を対称性があるように取るのが要点である。

1.1.4 実軸上に 1 位の極がある場合の主値積分の公式

定理 1.9 (実軸上に 1 位の極がある場合の定積分の公式 — 再提示)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, P は $\mathbb{R}$ 上で高々 1 位の零点しか持たないとする。

1. $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ のとき
$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f; c) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} c=0} \operatorname{Res}(f; c).$$
2. $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ のとき、任意の $a > 0$ に対して
$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} c=0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c)..$$

念のため: 「複素関数」では、P は $\mathbb{R}$ 上で零点を持たない ($(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$)、という条件を課した定理を紹介した。$P$ の 1 位の零点が存在する場合は、広義積分は存在しないが、主値積分は存在し、留数を用いて計算できる、ということである。

以下では、(1) だけ証明する (それで証明のアイディアは十分分かるから)。

定理1.9 (1) の証明の概略 (part 1)

f の極のうち、実軸上にあるものを $c_1 < c_2 < \cdots < c_N$ とする。

$\overline{D}(c_j;\varepsilon)$ に c_j 以外の極が含まれないように $\varepsilon > 0$ を十分小さく取る。

R を十分大きく取り、f のすべての極が $|z| < R$ の中にあり、$-R < c_1 - \varepsilon$, $c_N + \varepsilon < R$ を満たすとする。

半円弧 $C_{\varepsilon,j}$ $(j = 1, \cdots, N)$ を

$$-C_{\varepsilon,j} : z = c_j + \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0,\pi])$$

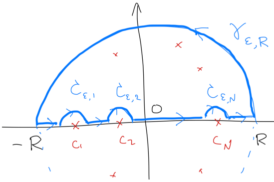
で定め (ふつうと逆向き, 時計回り)、

$$\Gamma_{\varepsilon,R} := [-R, c_1 - \varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} \left(C_{\varepsilon,j} + [c_j + \varepsilon, c_{j+1} - \varepsilon]\right) + [c_N + \varepsilon, R],$$

$$C_R : z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0,\pi]),$$

$$\gamma_{\varepsilon,R} := \Gamma_{\varepsilon,R} + C_R$$

により閉曲線 $\gamma_{\varepsilon,R}$ を定める。



定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 2)

留数定理により、

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)\,dx\right) + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \\
&\quad + \int_{C_R} f(z)\,dz \\
&= \left(\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \sum_{j=1}^{N}\int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)dx\right) + \sum_{j=1}^{N}\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{C_R} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

この右辺第 1 項は、$\varepsilon \to +0$ のとき

$$\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N-1}\int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \to \text{p.v.}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz$ について考える。

f の c_j における Laurent 展開の主部は $\dfrac{A_j}{z-c_j}$ である。ただし $A_j := \mathrm{Res}(f;c_j)$.

g_j を Laurent 展開の主部以外、つまり $g_j(z) := f(z) - \dfrac{A_j}{z-c_j}$ とすると

$$\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz = \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{A_j}{z-c_j}\,dz + \int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z)\,dz,$$

$$\int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{A_j}{z-c_j}\,dz = -\int_0^{\pi} \frac{A_j}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta = -\pi i A_j.$$

g_j は c_j の十分小さな近傍で正則であるから、$\varepsilon \to +0$ とするとき $\displaystyle\int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z)\,dz \to 0$.

ゆえに $\varepsilon \to +0$ のとき $\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz \to -\pi i \sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;c_j).$

定理 1.9(1) の証明の概略 (part 4)

ゆえに

$$\mathrm{p.v.}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx - \pi i\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;c_j) + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}(f;c).$$

$R\to+\infty$ のとき、左辺第 3 項は 0 に収束する。ゆえに

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}(f;c) + \pi i\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;c_j). \qquad \square$$

1.1.5 Dirichlet 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ (解決)

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

これは普通の広義積分として収束し、主値積分とも一致する。

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{Im}\,\frac{e^{ix}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right).$$

定理 1.9 (2) を用いて主値積分を計算すると

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z};0\right)\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(z)'}\right|_{z=0}\right) = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Im}\left(\pi i\cdot e^{i0}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

注意　「複素関数」の教科書 (神保 [2]) では、この定積分は主値積分という言葉は使わずに説明してあるが、実際にやっている議論は本質的に上と同じである。主値積分は色々なところで顔を出すので、それを紹介するような説明をしてみた。

1.2 級数の和

1.2.1 イントロ

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、a_n がある正則関数 f に対して、$a_n = f(n)$ となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を 1 位の極に持ち、} \mathrm{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、$f \cdot s$ についての線積分を考える、というのが基本的なアイディアである ($\mathrm{Res}(f\,s; n) = f(n)\,\mathrm{Res}(s; n) = f(n)$ に注意)。

具体的には、s として次の関数を採用する:

$$s_2(z) := \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad (\cot \text{ 知らなくても後で説明します}).$$

実はこの s_2 は色々な場面で利用される。(「応用複素関数」の中で、最低一つはそういう話を見せておきたいので、ここでやってみた。)

1.2.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、位数は 1.
  実際

  $$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = n.$$

  さらに $\left.\frac{d}{dz}(\sin \pi z)\right|_{z=n} = \pi\cos(n\pi) = (-1)^n \pi \neq 0.$
- s_1, s_2, s_3 の極は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、その位数は 1. 留数は

  $$\operatorname{Res}(s_1; n) = \left.\frac{\pi}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = (-1)^n,$$

  $$\operatorname{Res}(s_3; n) = \operatorname{Res}(s_2; n) = \left.\frac{\pi\cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = 1.$$

2024年4月23日の授業はこの辺まで。続きは来週。

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

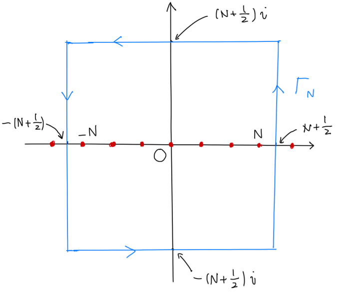


図 1: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は 1/2.
- $|s_j(z)| \le 2\pi$ ($j = 1, 2$; $z \in \Gamma_N^*$).
  (この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1] §1.3 には書いてある。)

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では sin, cos, tan の露出度が高いが、

sec(セカント), cosec(コセカント), cot(コタンジェント) というのもある:

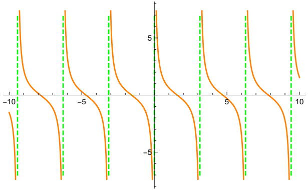
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の Trigonometric tables 等参照)、sin, tan, sec の値が載っていた。

cos(ine), cot(angent), cosec(ant) は、それぞれ余角の sin, tan, sec である:

$$\mathrm{co}\,某\,\theta = 某\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (\text{ゆえに数表はほとんど不要}).$$

$y = \cot x$ のグラフは、$\cot x = \tan(\pi/2 - x)$ に気づくとすぐ分かる。



参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).

[2] 神保道夫（じんぼう）：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では
https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063
でアクセスできる.