

応用複素関数 第12回 ポテンシャル問題 (3)

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026年7月7日, 2026年7月8日

目次

| | |
|--|----|
| 0 本日の内容・連絡事項 | 1 |
| 6 ポテンシャル問題 | 2 |
| 6.8 ポテンシャル問題の数値解法 (2) 基本解の方法 | 2 |
| 6.8.1 $-\Delta$ の基本解 | 2 |
| 6.8.2 基本解の方法のアルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似) | 3 |
| 6.8.3 基本解の方法の特徴 | 4 |
| 6.8.4 数値等角写像に対する天野の方法 | 5 |
| 6.8.5 Jordan 領域の等角写像の計算プログラム | 6 |
| A 「はじめまして基本解」 | 7 |
| A.1 はじめに | 7 |
| A.2 準備: δ 関数 | 8 |
| A.3 $-\Delta$ の基本解 E | 8 |
| A.4 Gauss, Green の公式, $-\Delta E = \delta$ の証明 | 9 |
| A.5 基本解の物理的解釈 | 11 |
| A.6 Poisson 方程式の特解、一重層ポテンシャル、二重層ポテンシャル, 境界値問題の解法 (ここはスキップする) | 12 |
| A.6.1 Poisson 方程式の特解 | 12 |
| A.6.2 一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャル | 13 |
| B 参考文献 | 13 |
| 参考文献 | 14 |

0 本日の内容・連絡事項

- レポート課題 1¹ の提出先を作り損なった (記憶がないのだけれど、確認ボタンを押し忘れたせいかな…先週講義終了後に指摘されて分かったので、7月3日~~は~~切だったけれど、7月17日~~は~~切に変更した。)。これは「やってみましょう」レベルであり難しくありません。

¹<https://m-katurada.sakura.ne.jp/complex2/report2026-1/>

- 先週レポート課題 2²の説明をして、「今晚 Oh-o! Meiji に」と言ったけれど、 \times 切はどうしようかと迷いましたが、レポート課題 1 の \times 切をずらしたので、時間的余裕を見て、月末ということにしておきます。
- レポート課題は 3 つ出す予定だったけれど、2 つにしようかと考えている。特に反対がなければそうする。
- 定期試験が 7 月 28 日 (火曜) にある。出題範囲は第 8 回授業まで (レポート課題 1 の前まで) とする。試験時間は 60 分しかないので、選択形式で 4 問 (もしかすると 3 問) 解けば良い、とするつもり。

6 ポテンシャル問題

6.8 ポテンシャル問題の数値解法 (2) 基本解の方法

前回、Riemann は写像定理を証明するために、ポテンシャル問題を解く必要があり、Dirichlet 原理を使って解の存在を示そうとしたが、Weierstrass からツッコミが入って頓挫して、解決まで 50 年近い時間が必要だった、という話をしたが、Dirichlet 原理とは違う方法でポテンシャル問題の解の存在を示した人達もいる。

それらの方法の中で、 $-\Delta$ の基本解を利用するものが色々な意味で重要である。そこで $-\Delta$ の基本解について簡単に紹介して、それを利用したポテンシャル問題の数値解法を紹介する。

6.8.1 $-\Delta$ の基本解

次の関数 E は、 $-\Delta$ の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

$$(6.1) \quad E(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (2 \text{次元の場合, } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} & (3 \text{次元の場合, } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases}$$

一体何者か？

数学的な素っ気ない解答 次を満たす。ここで δ は **Dirac のデルタ (超) 関数**。

$$(6.2) \quad -\Delta E = \delta \quad (\Delta \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}).$$

ここでデルタ (超) 関数 δ の話をすべきかもしれない (付録を用意しておく)。

なぜ基本解は重要か？ 重ね合わせることで“任意”の電荷分布 ρ のポテンシャルが得られる。

²<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/report2026-2/>

定理 (のようなもの) Poisson 方程式の特解

$\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき

$$(6.3) \quad u(x) := E * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\rho(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

とおくと、次式が成り立つ。

$$(6.4) \quad -\Delta u = \rho \quad (\text{in } \mathbb{R}^n).$$

(\mathbb{R}^n 全体でなくて、何か領域 Ω で考えても、 $u(x) := \int_{\Omega} E(x-y)\rho(y) dy$ は同様に解となる。)

E のことを、Poisson 方程式の基本解と呼ぶこともある。

E には特異性があるので、(6.4) を証明するのはかなり難しい。

物理的な解答 (解釈) E は原点に置かれた単位点電荷の作る電場のポテンシャル (電位) である。

それが分かると、任意の電荷密度 ρ で分布する場合の電場のポテンシャル u が分かる、という話でもある。この話は、物理的には次のように納得できる。

微小体積 dy に存在する電荷は $\rho(y) dy$ で、それが作る電場のポテンシャルは (基本解を平行移動したものの電荷量倍で) $E(x-y)\rho(y) dy$. それを Ω 全体でトータルした (重ね合わせた) u がポテンシャルになる。実際、 $\mathbf{E} := -\text{grad } u$ は電場で、Maxwell の方程式の1つ $\text{div } \mathbf{E} = \rho$ から³、 $-\text{div grad } u = \rho$ が得られる。すなわち (6.4) が成り立つ。

(基本解の) お仲間? 熱方程式 $u_t(x, t) = \Delta u(x, t)$ (ただし $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t > 0$) の基本解は

$$U(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

である (平均0, 分散 $2t$ の正規分布の確率密度関数に等しい)。

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} U(x-y, t)f(y) dy$$

とおくと

$$u_t = \Delta u, \quad \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x).$$

が成り立つ。物理的には、 $U(x, t)$ は、時刻 $t = 0$ で原点に単位熱量をおいて、それが熱伝導で伝わった場合の、時刻 t , 場所 x での温度を意味する。

6.8.2 基本解の方法のアルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似)

ポテンシャル問題の数値解法 (近似解法) への応用「**基本解の方法** (the method of fundamental solutions)」を紹介する。

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を考えよう (Neumann 境界値問題でも同様)。

$$(6.5) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(6.6) \quad u = g \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

³普通は $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ であるが、ここは単位を適当に取ることで真空の誘電率 ϵ_0 を 1 としている、と考えて下さい。

ここで Ω は \mathbb{R}^n ($n = 2$ or $n = 3$) の領域である。

Ω の外部に、 Ω を取り囲むように、有限個の点 y_1, \dots, y_N を取り、各 y_k に電荷量 Q_k の電荷を置く (Q_k の値は後で定める)。それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$(6.7) \quad u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^N Q_k E(x - y_k).$$

$\Delta E = 0$ (in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) であるから、 Q_k の取り方によらず

$$\Delta u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, \dots, y_N\}). \quad \text{特に} \quad \Delta u^{(N)} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

後は Q_k をうまく選んで、境界条件 (6.6) $u = g$ (on $\partial\Omega$) を近似的に満たすようにする。

一つのやり方として、 $\partial\Omega$ 上に N 個の点 x_1, \dots, x_N を取って

$$(6.8) \quad u^{(N)}(x_j) = g(x_j) \quad (j = 1, \dots, N).$$

(6.8) は次の連立 1 次方程式と同値である。

$$\begin{pmatrix} E(x_1 - y_1) & E(x_1 - y_2) & \cdots & E(x_1 - y_N) \\ E(x_2 - y_1) & E(x_2 - y_2) & & E(x_2 - y_N) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ E(x_N - y_1) & E(x_N - y_2) & \cdots & E(x_N - y_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}.$$

Gauss の消去法などを用いて、 Q_k ($k = 1, \dots, N$) が求められる。(係数行列は、いわゆる密行列であるが、それほど大きな N は必要ないので、さほど難しくない⁴。)

非常に素朴な感じがするが、やってみると、とてもうまく行くことが多い。

6.8.3 基本解の方法の特徴

(1) ある ρ ($0 < \rho < 1$), C が存在して

$$\|u - u^{(N)}\| \leq C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$

が成り立つ (誤差の指数関数的減少, 後で数値例を示す)。

しばしば、高精度の解が非常に少ない計算量で得られることが期待できる。

Cf. 差分法, 有限要素法では、典型的な場合に $\|u - u^{(N)}\| \leq \frac{C}{N^2}$ とか。

(2) $u^{(N)}$ は調和関数である ($\Delta u^{(N)} = 0$ を満たす)。特に $\text{grad } u^{(N)}$ の計算が簡単:

$$\text{grad } u^{(N)}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N Q_k \frac{x - y_k}{|x - y_k|^2} \quad (2 \text{次元の場合}).$$

(例えばポテンシャル流や電場の計算を思い浮かべると、とても便利と分かる。)

しかも $\|\text{grad } u - \text{grad } u^{(N)}\|$ も指数関数的に減少する。

Cf. 差分法や有限要素法では、微分するのが難しかったり、微分することで精度が下がったりする。

(3) 理論的な基礎づけは、差分法、有限要素法と比べて不十分である。

(4) 同次方程式にしか適用できない (Poisson 方程式は無理)、具体的な基本解が必要 \rightarrow 汎用性は低い。

汎用性は低いですが、使えるときは、差分法・有限要素法に性能で勝る場合が多い。

⁴差分法や有限要素法では、 N が数百万以上、場合によっては億超えということも珍しくないが、基本解の方法では、 N が数十～数百程度である。それよりも行列の条件数の方が問題で、これは慎重に検討すべき問題である。

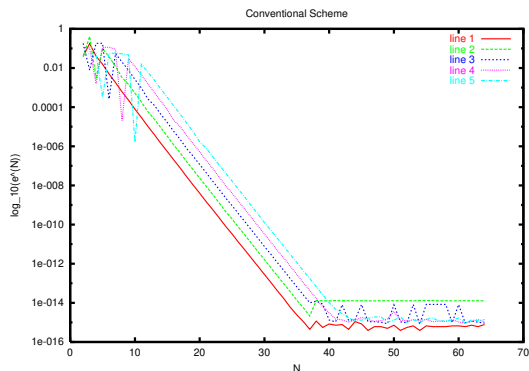


図 1: $m = 1, \dots, 5$

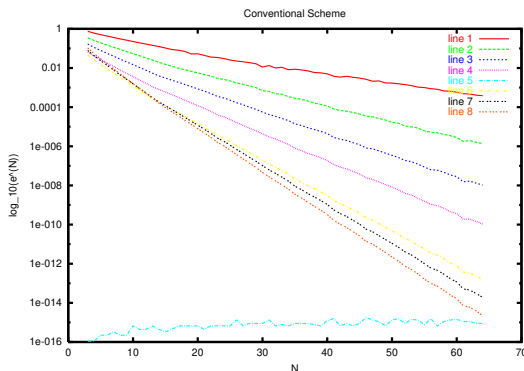


図 2: $p = 1.2, 1.4, \dots, 2.6$. p が大きい (特異点が遠い) ほど速く減衰

数値例

Ω が円盤 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| < 1\}$ の場合に、原点中心半径 $R = 2$ の円周上に一様に電荷点 y_k を配置した場合の近似解の精度を示す。

左が $g(\mathbf{x}) = \operatorname{Re}[(x + iy)^m]$, 右が $g(\mathbf{x}) = \log|\mathbf{x} - \mathbf{p}|$ ($\mathbf{p} = (p, 0)$) の場合。

誤差の減少は非常に速い！

片側対数目盛で、直線上にのることから、誤差が指数関数的に減少している。減少の速さについては研究されていて、ある程度まで説明可能である。

(2026/7/7 の講義はこの辺まででした。)

6.8.4 数値等角写像に対する天野の方法

天野 ^{かなめ} 要は、§6.4.3 (2026/6/23 講義) で述べた等角写像の求め方 (定理 6.7) と、基本解の方法を組み合わせた、数値等角写像 (領域の写像関数を数値的に求めること) の効率的なアルゴリズムを提唱した (天野 [1])。それを解説する。

§6.4 で導入した記号を用いる。

u の近似 $u^{(N)}$ を基本解の方法で求めよう。 $N \in \mathbb{N}$ に対して、 $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$ を「 Ω を取り囲むように」 $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ から選び、

$$(6.9) \quad u^{(N)}(z) := \sum_{k=1}^N Q_k \log|z - \zeta_k|$$

とおく。ここで Q_k ($k = 1, \dots, N$) は未知の実定数である。

$\{z_j\}_{j=1}^N$ を $\partial\Omega$ から選び、連立 1 次方程式

$$(6.10) \quad u^{(N)}(z_j) = -\log|z_j - z_0| \quad (j = 1, \dots, N)$$

を解いて Q_k ($k = 1, \dots, N$) が求められる。

$u^{(N)}$ の共役調和関数 $v^{(N)}$ ($u^{(N)}$ を実部に持つ正則関数) を求めたい。

天下りになるが、

$$(6.11) \quad f^{(N)}(z) := Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k}, \quad Q_0 := \sum_{k=1}^N Q_k \log|z_0 - \zeta_k|$$

とおく。ここで Log は主値を表すとする ($\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ を定義域とする)。

$$\text{Re } f^{(N)}(z) = \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k| + \sum_{k=1}^N Q_k \log \left| \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k} \right| = \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k| = u^{(N)}(z)$$

である。さらに

$$f^{(N)}(z_0) = Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \text{Log} \frac{z_0 - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k} = Q_0 + \sum_{k=1}^N 0 = Q_0 \in \mathbb{R}.$$

言い換えると $\text{Im } f^{(N)}(z_0) = 0$ 。この $f^{(N)}$ は、 $f = u + iv$ の良い近似であると考えられる。以上をまとめると、次のアルゴリズムが得られる。

天野のアルゴリズム

(再掲 6.9)
$$u^{(N)}(z) := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k|,$$

(再掲 6.10)
$$u^{(N)}(z_j) = -\log |z_j - z_0| \quad (j = 1, \dots, N),$$

(再掲 6.11)
$$f^{(N)}(z) := Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \text{Log} \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k}, \quad Q_0 := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k|$$

(0) $\{\zeta_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$, $\{z_j\}_{j=1}^N \subset \partial\Omega$ を適当に選ぶ。

(1) (6.9), (6.10) で $\{Q_k\}$ を求める (つまり $\sum_{k=1}^N Q_k |z_j - \zeta_k| = -\log |z_j - z_0|$ ($j = 1, \dots, N$) という連立1次方程式を解く)。

(2) (6.11) で $f^{(N)}$ を定める。

(3) $\varphi^{(N)}(z) := (z - z_0) \exp f^{(N)}(z)$ で定義される $\varphi^{(N)}$ を、等角写像 $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$ の近似解に採用する。

6.8.5 Jordan 領域の等角写像の計算プログラム

以下の Python プログラム conformalmap-v2.py では

$$\Omega = D_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad z_0 = \frac{1}{2}$$

の場合の Ω の写像関数、すなわち双正則な $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$ で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0$$

を満たすものを求める。この場合、実は次の1次分数変換が解である。

$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

プログラム入手 — ターミナルで次を実行 —

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/conformalmap-v2.py
```

ターミナルで次のように実行
`python conformalmap-v2.py`

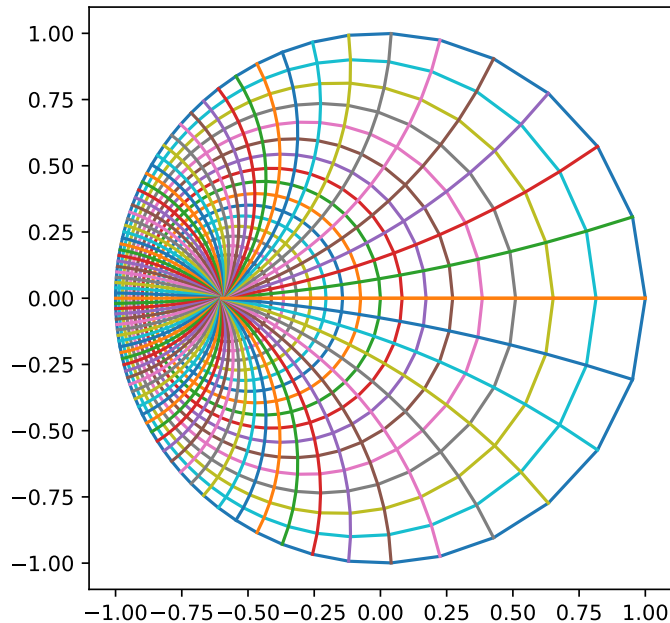


図 3: $z_0 = 0.6$ の場合. $w = \varphi(z)$ による z 平面の原点中心の同心円、単位円の半径の像を描いた。

有限要素法では FreeFEM のような専用のプログラミング言語を使ったが、基本解の方法では、Python のような普通のプログラミング言語で、ほどほどの行数のプログラムが書けるのは嬉しい。

A 「はじめまして基本解」

A.1 はじめに

(これは 2026/7/7 の講義の前振りにしよう。)

Riemann は写像定理を証明するために、ポテンシャル問題を解く必要があり、Dirichlet 原理を使って解の存在を示そうとしたが、Weierstrass からツッコミが入って頓挫して、解決まで 50 年近い時間が必要だった、という話をしたが、Dirichlet 原理とは違う方法でポテンシャル問題の解の存在を示した人達もいる。

それらの方法の中で、 $-\Delta$ の基本解を利用するもの色々な意味で重要である。そこで $-\Delta$ の基本解について簡単に解説して、それを利用したポテンシャル問題の数値解法を紹介する。

A.2 準備: δ 関数

素朴な定義 デルタ関数 δ は、しばしば

$$(A.1a) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ +\infty & (x = 0), \end{cases}$$

$$(A.1b) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) dx = 1.$$

を満たすものと説明される。(A.1a) の代わりに

$$(A.1c) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0)$$

という条件を置くこともある。

δ は、Dirac (1902–1984) のデルタ (超) 関数と呼ばれることが多いが、実質的に Heaviside (1850–1925) が導入済みであったと言われている。

しかし、通常の数学理論としては、この条件を満たす関数は存在しない ($\delta(x) = 0$ ($x \neq 0$) であれば、それだけで $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) dx = 0$ となってしまう ((A.1b) や (A.1c) と合わせると) 矛盾が生じる)。

そのため、物理学者が変なことをやり始めたとして異端視する数学者が珍しくなかった。

Schwartz の超関数 Laurent Schwartz (1915–2002) は、超関数 (distribution) という概念を導入して、これらを数学的に厳密に論じることを可能にした。

Schwartz の超関数論においては、 δ は

$$(A.2) \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$$

で定義される超関数である (一般に、 $\langle T, \varphi \rangle$ は、超関数 T の φ での値を表す記法である。超関数は汎関数の一種であるから、 $T[\varphi]$ と書く方が親しみやすいかもしれない。)。これを (A.1c) と見比べてみよう。

この式自身は難しいところはないが、Schwartz の超関数の厳密な定義は難しい⁵。

A.3 $-\Delta$ の基本解 E

定義 A.1 ($-\Delta$ の基本解) \mathbb{R}^n における $-\Delta$ の基本解を次式で定義する。

$$(A.3) \quad E(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-3}} & (n \neq 2) \end{cases}$$

ここで ω_n は n 次元単位球の測度である: $\omega_n := \int_{|x| \leq 1} dx$.

⁵ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ の双対空間 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ の要素を超関数と呼ぶ、というのが一つの定義であるが、 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ には、位相線形空間としての構造として距離空間とはならないものを採用するので、やや面倒な議論が必要となる。

$n = 2, 3$ のとき良く使われる。 $n = 3$ のとき、 $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$ であるから

$$E(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}.$$

定理 A.2 (普通の微分の意味で)

$$\Delta E(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

δ をデルタ超関数とすると、 \mathbb{R}^n における超関数として次式が成り立つ:

$$(A.4) \quad -\Delta E = \delta.$$

これが何を意味するかは後述する (定理 A.7)。

A.4 Gauss, Green の公式, $-\Delta E = \delta$ の証明

(要点) まず2つの良く知られている定理を復習し、その上で (あまり知られていない?) Green の third identity (補題 A.5) を述べる。それから $-\Delta E = \delta$ が導ける。

定理 A.3 (Gauss の発散定理) Ω を \mathbb{R}^n の有界領域、 $\Gamma = \partial\Omega$ は有限個の C^1 級正則超曲面からなり、 \vec{n} は Γ 上の点における Γ の外向き単位法線ベクトルとするとき、 $\bar{\Omega}$ の近傍で定義された C^1 級の任意のベクトル場 \vec{f} に対して

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f} \, dx = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

ただし $d\sigma$ は Γ の面積要素とする。

証明 ベクトル解析のテキストを見よ。例えば桂田 [2] など。■

定理 A.4 (Green の積分公式 (Green's identities)) $\Omega, \Gamma, \vec{n}, d\sigma$ は、定理 A.3 と同じとする。

(1) u, v が $\bar{\Omega}$ の近傍でそれぞれ C^2 級, C^1 級ならば

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \text{grad } v \cdot \text{grad } u \, dx.$$

(Green's first identity と呼ぶ。直訳すると「Green の第 1 恒等式」だが「Green の第 1 積分公式」という言い方が普通?)

(2) u, v が $\bar{\Omega}$ の近傍で C^2 級ならば

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma.$$

(Green's second identity と呼ぶ。)

(3) u が $\bar{\Omega}$ の近傍で C^2 級ならば

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

特に u が調和関数である場合は $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0$.

証明 ベクトル解析のテキストを見よ。例えば桂田 [2] など。■

Green の second identity

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dy = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma_y$$

の $v(y)$ に $v(y) = E(x - y)$, Ω に $\Omega \setminus \overline{B(x; \varepsilon)}$ を代入して、 $\varepsilon \rightarrow +0$ とすることにより、次の補題が得られる (証明の詳細は、桂田 [3] の §3.5.2 「Green の third identity」を見よ)。

補題 A.5 (Green の公式 (Green's third identity)) Γ を \mathbb{R}^m の滑らかな単純閉曲面、 Ω を Γ で囲まれる有界領域、 $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 級の関数、 E を定義 A.1 で定義した $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ 上の関数とすると、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} E(x - y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\Gamma} E(x - y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \, d\sigma_y - \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x - y) \, d\sigma_y \\ & = \begin{cases} u(x) & (x \in \Omega) \\ \frac{1}{2} u(x) & (x \in \Gamma) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}). \end{cases} \end{aligned}$$

ただし $x \in \Gamma$ の場合、左辺第 3 項の積分は次の主値積分であると解釈する。

$$\text{p.v.} \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x - y) \, d\sigma_y := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x - y) \, d\sigma_y, \quad \Gamma_{\varepsilon} = \{y \in \Gamma; |y - x| \geq \varepsilon\}.$$

この補題の系として、次の 2 つの定理を得る。

まず u が調和関数ならば、境界上の積分で表示できる、という定理。

定理 A.6 (調和関数の境界積分表示) Γ, Ω, u は上の通りで、さらに $\Delta u = 0$ (in Ω) が成り立っているならば

$$\int_{\Gamma} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y - \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) d\sigma_y = \begin{cases} u(x) & (x \in \Omega) \\ \frac{1}{2}u(x) & (x \in \Gamma) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}). \end{cases}$$

ただし $x \in \Gamma$ の場合、左辺第 2 項の積分は主値積分であると解釈する。

証明 $\Delta u = 0$ を代入するだけ。■

次に宿題となっていた、 E が $-\Delta$ の基本解であるという定理。

定理 A.7 (E は $-\Delta$ の基本解である) $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ とするとき、

$$-\int_{\mathbb{R}^n} E(x-y) \Delta f(y) dy = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

特に ($x = 0$ として)

$$(A.5) \quad -\int_{\mathbb{R}^n} E(y) \Delta f(y) dy = f(0).$$

証明 $f \in C_0^\infty(\Omega)$ であれば、 $\Gamma = \partial\Omega$ で $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ を満たすので、境界上の積分は 2 つとも 0 である。■

超関数の微分の定義

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} T, \varphi \right\rangle := - \left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right\rangle \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega))$$

より

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega))$$

であるから、(A.5) は、 E が超関数として、 $-\Delta E = \delta$ を満たすことを意味している。

一般に、微分作用素 $P(D)$ について $P(D)U = \delta$ を満たす U のことを $P(D)$ の**基本解**と呼ぶ。上の定理は、 E が $-\Delta$ の基本解であることを意味する。

A.5 基本解の物理的解釈

物理的には、 δ 関数について、「 δ は、原点に置かれた単位点電荷の電荷密度である」という比較的簡単な解釈が可能である。

$$\mathbf{E}(x) := \text{grad } E(x)$$

とおくと、 $-\Delta E = \delta$ は

$$-\text{div } \mathbf{E}(x) = \delta$$

と書き直せる。これは、電荷密度として δ を取った場合の Maxwell の方程式の一つである。 \mathbf{E} は原点に置かれた単位点電荷の作る電場であると解釈される。

すなわち、**基本解 E は、原点に置かれた単位点電荷の作る電場の電位である。**

電磁気学のテキストを紐解くと、原点に置かれた単位点電荷の作る電場の電位は

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|}$$

である。ここで $\epsilon_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{10^7}{4\pi c^2}$ (c は光速) は真空の誘電率と呼ばれる正の定数である。

A.6 Poisson 方程式の特解、一重層ポテンシャル、二重層ポテンシャル、境界値問題の解法 (ここはスキップする)

この項は、今後の「応用複素関数」では必要ないので、講義ではスキップするが、基本解の有名な性質とその応用を述べる。

A.6.1 Poisson 方程式の特解

基本解との畳み込みによって、Poisson 方程式の特解が構成できる。実際、次の定理が成り立つ。

定理 A.8 ($E * f$ は Poisson 方程式の特解である) Ω は \mathbb{R}^n の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が次のいずれかの性質を満たすとす。

- (i) $f \in C^1(\Omega)$ かつ f は有界である。
- (ii) ある $\gamma \in (0, 1)$ と $C \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(A.6) \quad (\forall x, y \in \Omega) \quad |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\gamma.$$

このとき

$$(A.7) \quad u(x) := \int_{\Omega} E(x - y) f(y) dy$$

とおくと、 $u \in C^2(\Omega)$ かつ $-\Delta u = f$ が成り立つ。

証明 省略する。(i) については藤田他 [4] の定理 3.9、(ii) については神保 [5] §4.6 「ポアソン方程式」定理 15 を見よ。■

物理的な解釈 点 y_1, \dots, y_N に電荷 q_1, \dots, q_N が置いてある場合、それら N 個の電荷の作る電場の電位は $\sum_{j=1}^N q_j E(x - y_j)$ であるから、電荷密度 $f(y)$ で電荷が分布しているとき、それら電荷の作る電場の電位は (和を積分に取り替えた) $u(x) := \int_{\Omega} E(x - y) f(y) dy$ となる。 $-\Delta u = -\operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\operatorname{div} \mathbf{E} = f$ が成り立つと期待される。■

上の定理から、Poisson 方程式の境界値問題を解くためには、Laplace 方程式の境界値問題を一般の境界条件に対して解ければ良い。次はそれを考える (やはり E を用いて解くことができる)。

A.6.2 一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャル

定理 A.9 (一重層, 二重層ポテンシャルの性質 (ペトロフスキー [6] §§34.3 定理1~5))

Γ は \mathbb{R}^2 における区分的に C^1 級の単純閉曲線とする。

(1) 任意の $\tau \in C(\Gamma^*)$ に対して

$$(A.8) \quad U(x) := \int_{\Gamma} \tau(y) E(x-y) d\sigma_y \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

は $C(\mathbb{R}^2)$ に属し、 $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma^*$ において、 $\Delta U = 0$ を満たす。

(2) 任意の $\rho \in C(\Gamma^*)$ に対して

$$(A.9) \quad U(x) := \int_{\Gamma} \rho(y) \frac{\partial E}{\partial n_y}(x-y) d\sigma_y \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

は、任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して収束し、 $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ において $\Delta U = 0$ を満たす。内部領域 Ω_i の閉包 $\bar{\Omega}_i$ で連続な u_i と、外部領域 Ω_e の閉包 $\bar{\Omega}$ で連続な u_e が存在して、

$$\begin{aligned} U(x) &= u_i(x) & (x \in \Omega_i), \\ U(x) &= u_e(x) & (x \in \Omega_e), \\ U(x) &= \frac{1}{2} (u_e(x) + u_i(x)) & (x \in \Gamma), \\ u_e(x) - u_i(x) &= \rho(x) & (x \in \Gamma). \end{aligned}$$

ρ を適当に選ぶことにより、境界値問題の解にすることができる。

例えば ρ として積分方程式

$$\frac{1}{2}\rho(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n_y}(x-y)\rho(y) d\sigma_y = \phi(x) \quad (x \in \Gamma)$$

の解 ρ を取り

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n_y}(x-y)\rho(y) dy & (x \in \Omega) \\ \phi(x) & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

とおくと、(実は $u = u_i$ on $\bar{\Omega}$ であるので) u は $\bar{\Omega}$ で連続で

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u(x) = \phi(x) \quad (x \in \partial\Omega).$$

すなわち u は Dirichlet 境界値問題の解である。

B 参考文献

参考文献

- [1] 天野 要^{かなめ} : 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- [2] 桂田祐史 : 多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (内容はベクトル解析) (2006~).

- [3] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」), <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/pde2013.pdf> 内容は偏微分方程式入門である。(1997 年～).
- [4] 藤田宏, 池部晃生, 犬井鉄郎, 高見穎郎：数理物理に現われる偏微分方程式 I, II, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店 (1977, 1979), 岩波オンデマンドボックスで復刊された (2019/9/10)。数理物理に出て来る偏微分方程式を数学的にきちんと説明している。「現れる」と書く人が多いが、元々の書名は「現われる」である。岩波書店の WWW サイトでも間違えていたことがあった。
- [5] 神保秀一：偏微分方程式入門, 共立出版 (2006).
- [6] I. G. Petrovskii(イ・ゲ・ペトロフスキー)：偏微分方程式論, 東京図書 (1958), 吉田耕作校閲／渡辺毅訳。偏微分方程式論 (特に双曲型方程式) の大家であるペトロフスキーによるテキスト。忙しいカリキュラムでは飛ばされるようなことが、ゆったりと説明されている。学部 3 年生のときの輪講のテキストだった。そのおかげでかなりの部分を読むことができて、とてもためになった。