応用複素関数 第3回

桂田 祐史
katurada@meiji.ac.jp

2026 年 4 月 28 日, 2026 年 4 月 29 日

3 正則関数の表現 — 無限和と無限積

3.2 広義一様収束と二重級数定理

本日のテーマは、Weierstrass の二重級数定理である (関数論に現れる収束についての議論に対する、一つの最終兵器かもしれない)。その定理を述べるために広義一様収束という言葉を定義する必要がある。

- **広義一様収束**の定義 (任意の compact 部分集合で一様収束するということ)
- Weierstrass の二重級数定理「開集合 Ω で定義された正則関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω で**広義一様収束**すれば、任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して、$\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $f^{(k)}$ に Ω で広義一様収束する」

が本日の主結果である。難しいわけではないが、慣れていないと納得しにくいかもしれない (「複素関数」で紹介しても良いことであるが、私はずっと敬遠している)。一方、使うのは割と簡単であるので、それは是非身につけてもらいたい。

3.2.1 一様収束の復習 (駆け足)

一様収束については、「複素関数」で解説済みである。ここでは駆け足で振り返ろう。「複素関数」の講義ノート桂田 [1] の §3.2「関数列の一様収束」を見よ。

次の定義を講義で板書する場合、ε-N はカットする。

定義 3.1 (関数列の各点収束、一様収束) $\Omega \neq \emptyset$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, また $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω を定義域とする複素数値の関数列 (各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$) とする。

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω (上) で**各点収束**する (pointwise convergent, converges pointwise) とは、

$$(\forall x \in \Omega) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

i.e. $(\forall x \in \Omega)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.
(あるいは $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\forall x \in \Omega)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.)

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω (上) で f に**一様収束**する (uniformly convergent, converges uniformly) とは、

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

i.e. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in \Omega) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.
(あるいは $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in \Omega)$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.)

次の二つの注意も、講義では口頭で述べるに止める。

注意 3.2 (言葉づかいに関する細かい注意 2 点)

- 「各点収束すること」は pointwise convergence, 「一様収束すること」は uniform convergence である。convergence という名詞を修飾するのは形容詞で、一様収束の場合は uniformly ではなく uniform である。pointwise の方は変える必要がない。pointwise という言葉は、形容詞にも副詞にもなる。
- 「Ω (上) で」というのは、英語では "on Ω" という。日本語で表現するとき、「で」を省略して「Ω 上」というテキストが多いが、例えば「Ω 上一様収束」のように、直後に漢字の用語が来ると、まるで「上一様収束」(うえいちようしゅうそく？) という言葉のように感じられてしまい、誤解が生じかねない。そのため「で」を入れることにした。でもこれは普通ではないかもしれない。 ■

応用上、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ がたくさん現れる。このときは、部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(z)$ を $f_n(z)$ とするわけである。この場合、一様収束の判定には次の定理が便利である。

定理 3.3 (Weierstrass の M-test) Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$) とする。ある数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall z \in \Omega)\ |a_n(z)| \leq M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様収束するし (だから項別積分出来る)、各点 z で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ は絶対収束する (だから和の順序が

変えられる)。

次のような改良版を用意しておくと便利である。

命題 3.4 (Weierstrass の M test (改良版)) Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$) とする。ある $N\in\mathbb{N}$, 数列 $\{M_n\}_{n\geq N}$ が存在して、

(i) $(\forall n\in\mathbb{N}\colon n\geq N)\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\leq M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

定理 3.3 の証明は、複素関数の講義ノート (桂田 [1]) にある。それを改良版の証明に直すのは簡単である。

一様収束のありがたみとして、以下のような定理が成り立つことがある。

命題 3.5 (連続関数列の一様収束極限は連続関数、一様収束すれば項別積分可能)

(1) 連続関数列が一様収束すれば、極限も連続である。

(2) 連続関数列が一様収束すれば、積分と lim は交換可能である:

$$\text{(実関数の場合)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx.$$

$$\text{(複素関数の場合)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C\lim_{n\to\infty}f_n(z)\,dz.$$

この定理は、広義一様収束の場合にも自然に拡張される。

次の定理は、実関数の場合はよく使われるが、その複素関数版が関数論で使われることはほとんどない。関数に正則性を仮定すると、はるかに便利で強力な定理 3.11(二重級数定理) が成り立つからである。

命題 3.6 (導関数列も一様収束すれば項別微分可能) 区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束し、$\{f_n'\}$ が I で g に一様収束するならば、f は C^1 級で、$f'=g$.

この証明と同様にして[1]

> $\mathbb{C}$ の領域 Ω 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f(z)$ に各点収束し、導関数の列 $\{g_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で $g(z)$ に一様収束するならば、f は正則で、$f'=g$.

という命題が得られるが、実はもっと強い結果が成り立つ (定理 3.11)。

[1] 既に述べたように、$F'=f$ となる F が存在する場合、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=F(b)-F(a)$ (a, b はそれぞれ C の始点、終点) であるから、$\displaystyle\int_a^z f_n'(\zeta)d\zeta=f_n(z)-f_n(a)$.

3.2.2 広義一様収束

Ω での一様収束性を少し弱めた条件を導入しよう。

定義 3.7 (広義一様収束) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \emptyset$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ n $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω 上で **広義一様収束**するとは、Ω に含まれるすべての compact 集合 K 上で $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束すること、すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f(z) - f_n(z)| = 0$$

が成り立つことをいう。

広義一様収束は、英語では、uniformly convergent on every compact set という (そのものズバリ)。

広義一様収束という条件の言い換えを与える定理 3.10 が重要である。(証明を納得するには、ある程度の慣れが必要かもしれない。トポロジーを受講している人には分かりやすいかもしれないが。「まあ、そんなものか」くらいでスルーして良い。まずは定理の使い方に習熟しよう。)

compact というのは位相空間論の用語で、現象数理学科では「トポロジー」などの科目で説明されているはず。

- 定義「位相空間 X の全ての開被覆が有限部分被覆を持つとき、X は compact であるという。」
- K が compact、Y が位相空間、$f\colon K \to Y$ が連続ならば、$f(K)$ も compact である。特に K が compact で、$f\colon K \to \mathbb{R}$ が連続ならば、f の最大値と最小値が存在する。

考えている集合が compact かどうか判断するために、次の定理は基本的である。

定理 3.8 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 (その特別な場合として $\mathbb{C}$ の部分集合) K について、K が compact $\Leftrightarrow$ K が有界閉集合。

証明 多くの位相空間のテキストに載っている。難しい方「有界閉 $\Rightarrow$compact」は **Heine-Borel の定理**と呼ばれる。その証明は桂田 [2] の付録 C にもある。 ■

例えば、複素平面内の閉円盤 $\overline{D}(c; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \le r\}$ は compact 集合である。

例 3.9 (冪級数と Laurent 級数の場合 — 実は広義一様収束である) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は、収束円 $D(c; \rho)$ で広義一様収束する。
(「複素関数」では、収束円内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c; R)$ $(0 < R < \rho)$ で一様収束する、と説明したが、それは実は広義一様収束と同値である。)

Laurent 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n}$ に対しても、収束円環 $A(c; \rho_1, \rho_2)$ (ただし $0 \le \rho_1 < \rho_2 \le +\infty$) が存在するが (そういう言い方はしてないテキストが多いけれど)、Laurent 級数はそこで広義一様収束する。これも「複素関数」では、$\rho_1 < R_1 < R_2 < \rho_2$ を満たす任意の R_1, R_2 について $\overline{A}(c; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z - c| \le R_2\}$ で一様収束する、と説明してあった。 ■

上の定義に現れる「すべての compact 集合上で…」という条件は、(「すべて」とあるので) 証明しにくく感じるかもしれないが、次の定理があるので、広義一様収束することの証明は実は難しくないことが多い (この辺が compact 集合のありがたみである)。

定理 3.10 (広義一様収束の条件の言い換え) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ($n = 1, 2, \cdots$) とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) $\{f_n\}$ は Ω で f に広義一様収束する。

(ii) すべての $a \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、$D(a;\varepsilon) \cap \Omega$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。

(すべての点 a に対して、(そこでは) 一様収束するような a の近傍が存在する。)

(i) $\Rightarrow$ (ii) は、閉円盤が compact であることに気づけば簡単である。(ii) $\Rightarrow$ (i) は、compact 集合の定義を思い出せばできる。

証明 (i)$\Rightarrow$(ii) $a \in \Omega$ とすると、Ω が開集合であることから、ある $\varepsilon' > 0$ が存在して $D(a;\varepsilon') \subset \Omega$. $\varepsilon := \varepsilon'/2$, $K := \overline{D}(a;\varepsilon)$ とおくと、K は Ω に含まれる compact 集合であるから、K で $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様収束する。

(ii) $\Rightarrow$ (i) K を Ω に含まれる compact 集合とする。仮定より、K の各点 a に対して、$\varepsilon_a > 0$ が存在して $D(a;\varepsilon_a) \cap K$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。もちろん $K \subset \bigcup_{a\in K} D(a;\varepsilon_a)$. K が compact であるから、ある $a_1, \cdots, a_r \in K$ が存在して、$K \subset \bigcup_{j=1}^{r} D(a_j;\varepsilon_{a_j})$. $\{f_n\}$ が、$D(a_j;\varepsilon_{a_j}) \cap K$ ($j = 1, \cdots, r$) で f に一様収束することから、$K = \bigcup_{j=1}^{r} \left(D(a_j;\varepsilon_{a_j}) \cap K\right)$ でも一様収束する。 ■

一様収束することの確認には、Weierstrass の M-test が使える場合が多い。

「複素関数」の講義で、一様収束列は良い性質を持つ、と説明してあるが (定理を証明付きで述べた)、広義一様収束でもほぼ同様のことが成り立つ。

1. 広義一様収束する連続関数列の極限関数は連続である。
   ($\because$ 連続性は局所的性質だから、一様収束の場合と変わらない。)

2. 広義一様収束する連続関数列について項別積分ができる。
   ($\because$ 積分範囲である曲線 C の像 $C^* = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ は、連続写像 φ による compact 集合 $[\alpha, \beta]$ の像であるから compact である。ゆえに $\{f_n\}$ は C^* 上で一様収束する。ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz$ が成り立つ。)

3. 広義一様収束する正則関数列の極限関数は正則で、項別微分ができる。
   この定理は新しい。これは **Weierstrass の二重級数定理**とよばれる。「複素関数」では、(後で説明をすると言いつつ) 説明を端折ったので、以下で解説する。

3.2.3 Weierstrass の二重級数定理 (Weierstrass double series theorem)

定理 3.11 (Weierstrass の二重級数定理, 正則関数列が広義一様収束すれば項別微分可能) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上で定義された正則関数からなる関数列、$f\colon \Omega\to\mathbb{C}$ とする。$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上で広義一様に f に収束するならば、f は正則で、すべての自然数 k に対して

$$f^{(k)}(z)=\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z)\quad (\Omega \text{ で広義一様}).$$

証明 まず f が Ω で連続であることは明らかである (正則ならば連続で、連続関数列の広義一様収束極限は連続であるから)。

$a\in\Omega$ とする。$\overline{D}(a;\varepsilon)\subset\Omega$ となる $\varepsilon>0$ を取る。任意の $z\in D(a;\varepsilon)$ を固定する。$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して、Cauchy の積分公式から、

$$(\sharp)\qquad f_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

$k=0$ の場合に、$n\to\infty$ とするとき、被積分関数は $|\zeta-a|=\varepsilon$ 上で一様収束する。実際、$d:=\varepsilon-|z-a|$ とおくと $d>0$ で、$|\zeta-a|=\varepsilon$ を満たす任意の ζ に対して

$$|\zeta-z|\ge|\zeta-a|-|a-z|=\varepsilon-|a-z|=d$$

となるので、Ω 内のコンパクト集合 $\{\zeta\in\mathbb{C};|\zeta-a|=\varepsilon\}$ 上で、$\{f_n\}$ は f に一様収束することに注意して

$$\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}\left|\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|\le\frac{1}{d}\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta$$

が得られる。ゆえに f は $D(a;\varepsilon)$ で正則であり、

$$(\flat)\qquad (\forall k\in\mathbb{N})\quad f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\quad(z\in D(a;\varepsilon)).$$

最後に、$f_n^{(k)}\to f^{(k)}$ が広義一様収束であることを示す。$(\sharp)$ と $(\flat)$ を用いて

$$\left|f^{(k)}(z)-f_n^{(k)}(z)\right|\le\frac{k!}{2\pi}\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}|f(\zeta)-f_n(\zeta)|\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{k+1}}.$$

$K:=\overline{D}(a;\varepsilon/2)$ とおき、$z\in K$ とする。$|\zeta-a|=\varepsilon$ を満たす任意の ζ に対して

$$|\zeta-z|=|\zeta-a+a-z|\ge|\zeta-a|-|a-z|\ge\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$$

であるから

$$\frac{1}{|\zeta-z|^{k+1}}\le\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1},\quad\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{k+1}}\le\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1}\cdot 2\pi\varepsilon.$$

ゆえに

$$\sup_{z\in K}\left|f^{(k)}(z)-f_n^{(k)}(z)\right|\le k!\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1}\varepsilon\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}|f(\zeta)-f_n(\zeta)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

これは $\{f_n^{(k)}\}$ が K で一様収束することを意味する。■

この定理に「二重級数定理」という名前がついているのはなぜか、それについては省略する(講義ノートを見よ)。

この定理の系として、次の冪級数版が得られる。一様収束することの確認に Weierstrass の M-test が適用しやすく、とても使いやすい。

系 3.12 Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω で定義された正則関数からなる関数列、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ が Ω 上で広義一様収束するならば、和 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ は Ω で正則で、すべての自然数 k に対して

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}(z) \quad (\Omega \text{ で広義一様}).$$

正則関数からなる広義一様収束級数は、何回でも項別微分できる、ということである。

実は、冪級数 (Taylor 級数), Laurent 級数はこの例になっている (つまり広義一様収束する)。どちらも重要なので、「複素関数」では、広義一様収束の定義をする前に直接的に証明したのである。

3.3 具体例コレクション

(ここは少し粗い。修正が入る予定である。)

cot から始めて、ゼータ関数に話を進める。

例 3.13 ($\pi\cot\pi z$ **の部分分数展開、まず展開式の級数が広義一様収束すること)**

(1)
$$f(z):=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

の右辺の級数の和が $\pi\cot(\pi z)$ であることは既に証明済みである。

以下では、(1) の右辺の級数が $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様に収束し、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で定義された正則関数 f を定めることを示す。

大雑把に言うと、$n\to\infty$ のときに、級数の一般項 $\sim \dfrac{2z}{-n^2}$ である、というのが要点である。

K を $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ の任意の compact 集合とする。有界であるから、ある $R\in\mathbb{R}$ が存在して、

$$(\forall z\in K) \quad |z|\le R.$$

$N\ge 2R$ を満たす N を取る。$z\in K$, $n\ge N$ とすると

$$\frac{|z|^2}{n^2}\le\frac{R^2}{N^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

このとき

$$\left|1-\frac{z^2}{n^2}\right|\ge 1-\frac{|z|^2}{n^2}\ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

であるから

$$\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right|=\frac{1}{n^2}\frac{2|z|}{|1-z^2/n^2|}\le\frac{2|z|}{n^2(1-|z|^2/n^2)}\le\frac{2R}{\frac{3}{4}\cdot n^2}=\frac{8R}{3}\frac{1}{n^2}.$$

$M_n := \frac{8R}{3n^2}$ とおくと、命題 3.4 (改良版 Weierstrass M-test) により、級数が K で一様収束することがわかる。ゆえに級数 (1) は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様収束する。

Weierstrass の二重級数定理により、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で正則な関数 f が定まることが分かる。■

例 3.14 (cot の部分分数展開) すでに

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right)$$

が得られている。右辺を項別に積分した (−1 をかけた)

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$$

を考えよう。例 3.13 より、これが $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ で広義一様収束することが分かった。ゆえに Weierstrass の二重級数定理によって

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

は正則関数で、その導関数は項別微分で計算できる:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right) \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$f'(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

これから

$$f(z) = \pi\cot(\pi z) + C = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

f は奇函数であるから $C = 0$. ゆえに $f(z) = \pi\cot(\pi z)$. すなわち

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

これは cot の部分分数展開と呼ばれる式で、色々な場面で応用される。

すべての極における Laurent 展開の主部を寄せ集めると、ぴったり $\cot(\pi z)$ になるという式で、私にはとても不思議な感じがする (この辺で Liouville の定理の話でもするのだろうか…それである程度説明できる。でも、不思議さは消えないかな…)。■

例 3.15 (Riemann のゼータ関数) (以下では、$n \in \mathbb{N}$ に対して $n^z = \exp(z\log n)$ と定義する。ここで $\log n$ は主値、この場合は要するに $\log n \in \mathbb{R}$ となる、高校数学でおなじみの実関数としての対数関数と一致する。n^z は $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である。)

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

の右辺の級数は、領域 $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ で正則な関数を表すことを以下に示す。これは **Riemann のゼータ関数**と呼ばれ、非常に有名である。

任意の $\alpha>1$ を固定して、$K_\alpha:=\{z\in D\mid \operatorname{Re}z\ge\alpha\}$ とおく。$z\in K_\alpha$ とすると

$$|n^z|=|\exp(z\log n)|=\exp\operatorname{Re}(z\log n)=\exp[(\operatorname{Re}z)\log n]=n^{\operatorname{Re}z}\ge n^\alpha.$$

ゆえに $M_n:=\dfrac{1}{n^\alpha}$ とおくとき、

$$\left|\frac{1}{n^z}\right|\le M_n\quad(n\in\mathbb{N},\ z\in K_\alpha),\qquad \sum_{n=1}^\infty M_n=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^\alpha}<+\infty.$$

ゆえに Weierstrass の M-test から、K_α で、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^z}$ は一様収束する。

これから、D で広義一様収束することが分かる[2]。ゆえに Weierstrass の二重級数定理によって、ζ は D を定義域とする正則関数である。

(冪級数のときと同様に、D_α で一様収束するので、そこで正則な関数を定めることを言って、それから α は任意であるから D で…と議論することも出来る。)

Riemann のゼータ関数では、変数を s と書くのが通(つう)である[3]:

$$\zeta(s):=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}.$$

これは $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されるが、その零点について、有名な **Riemann 予想**がある。

Riemann 予想 (1859 年)

$\zeta(s)$ の零点は、自明な零点 $s=-2n$ $(n\in\mathbb{N})$ 以外はすべて直線 $\operatorname{Re}s=\dfrac{1}{2}$ 上に乗っている。

これはもともとは**素数定理**[4]の証明のために持ち出された予想 (1859 年) であるが、素数定理が別の方法[5]で証明された後も未解決として残った。もし証明されれば、様々な重要な結果を導くことが知られている。周辺的な結果は色々得られているが、上の命題自体は、2026 年 4 月現在証明されていない。 ■

[2] 定理 3.10 を用いる手もある。K を D 内の任意のコンパクト集合とするとき、$\min\{\operatorname{Re}z\mid z\in K\}$ が存在するので、それを α とおくと、$\alpha>1$, $K\subset K_\alpha$. 級数は K_α で一様収束するので、K でも一様収束する。ゆえに級数は D で広義一様収束する。

[3] Riemann がそうしたから (Riemann の論文の邦訳が鹿野 [3] にある)、大抵の人はそれに従っている。

[4] x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ について、$\pi(x)\sim\dfrac{x}{\log x}$ $(x\to+\infty)$. Gauss が予想した。

[5] 例えば Bak-Newman [4] §19.5.

系 3.16 (ゼータ関数の正の偶数における値) ζ を Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ とする。$\pi z\cot\pi z$ の 0 の周りの Taylor 展開を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ とするとき

$$\zeta(2m)=-\frac{b_{2m}}{2}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

Bernoulli 数 ($\displaystyle\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$ で定まる $\{B_{2n}\}_{n\ge 0}$) を使って言い替えると

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

証明 (??) より

$$\begin{aligned}\pi z\cot\pi z&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2-n^2}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z^2}{n^2}\right)^m=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\right)z^{2m}\\&=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)z^{2m}.\end{aligned}$$

係数を比較して $b_{2m}=-2\zeta(2m)$ $(m\in\mathbb{N})$ であるから、

$$\zeta(2m)=-\frac{b_{2m}}{2}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

Bernoulli 数を用いると、$\pi z\cot\pi z$ の Taylor 展開は

$$\pi z\cot\pi z=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}z^{2n}. \tag{2}$$

と表されるのであった。ゆえに

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}\quad(m\in\mathbb{N}).\blacksquare$$

余談 3.17 私が高校生の頃、数学の未解決問題として有名なものには、双子素数の問題、四色問題、フェルマー予想、ポアンカレ予想、リーマン予想などがあった。このうち四色問題は 1976 年に解決、フェルマー予想は 1995 年に解決、ポアンカレ予想は 2006 年 (?) に解決した。残っているのは双子素数の問題とリーマン予想だけ…ちょっとさびしい。 ■

速習: Bernoulli 数と cot, tan の Taylor 展開

$f(z):=\dfrac{z}{e^z-1}$ は $|z|<2\pi$ で正則であるから、$B_n:=f^{(n)}(0)$ とおくと

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\quad(|z|<2\pi).$$

この数列 $\{B_n\}$ の最初の数項を計算すると

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad\cdots$$

B_n を **Bernoulli 数**と呼ぶ。ヨハン・ベルヌーイにちなむが、和算家の関孝和も独立に発見していたという話がある (冪乗和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$ の公式に現れる)。その定義には、様々な流儀があるが、上の定義は一番メジャーなもので、Mathematica でも採用されている (`BernoulliB[]` という関数がある)。なお、二番目にメジャーな定義では、$B_1 = 1/2$ (符号が違う) である以外は上と一致するので、以下の cot, tan の Taylor 展開 (B_1 は現れない) には影響しない。

実は $B_{2k-1} = 0$ $(k = 2, 3, \cdots)$ である。これは

$$f(z) + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}$$

が偶関数である (容易に確認可能) ことから分かる。

実は

$$\cot z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \tag{3}$$

実際、

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i \left(1 + \frac{2}{e^{2iz} - 1}\right)$$

より

$$\begin{aligned} z \cot z &= iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = iz + f(2iz) = iz + \left(-\frac{2iz}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2iz)^{2k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \end{aligned}$$

これを z で割って (3) を得る。一方、

$$2 \cot 2z = 2 \frac{\cos 2z}{\sin 2z} = 2 \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{2 \sin z \cos z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{\sin z}{\cos z} = \cot z - \tan z$$

であるから

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} \left(2^{2n} - 1\right) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}. \tag{4}$$

注意 3.18 上の系 3.16 は、神保 [5] によるが、[5] では Bernoulli 数の定義がこの「速習」と食い違っている。

$$\text{神保 [5] の } B_{2n} = (-1)^{n-1} B_{2n} > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

である。■

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/complex2024.pdf (2014〜).

[2] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, 多変数の微積分のうちの重積分についての講義のノート． https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf (2008).

[3] 鹿野健：リーマン予想, 日本評論社 (1991).

[4] Bak, J. and Newman, D. J.: *Complex Analysis, Second Edition*, Springer (1999).

[5] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.